Ensayo

Cultura, Álgebra y Didáctica

Culture, Algebra and Didactics

Rolando A. García-Hernández[1]

Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Maracay, Venezuela

Identificador ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4534-8479

rolandoantoniogarciahernandez@gmail.com

Franzyuri F. Hernández-Fajardo[2]

Universidad de Carabobo, Valencia, Venezuela

Identificador ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2748-8005

franzyurihernandez@gmail.com

fhernan@uc.edu.ve

Zoraida C. Villegas-Montero[3]

Universidad de Carabobo, Valencia, Venezuela

Identificador ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1507-446X

zcvillegas@gmail.com

Recibido:12/2/2021. Aceptado: 30/11/2020.

Resumen

Con el propósito de descubrir algunas características del pensamiento algebraico y cómo desarrollarlo con la ayuda de una didáctica específica se presenta el siguiente ensayo. Primero, destacamos la dimensión cultural de la matemática y en particular del álgebra resaltando los aportes de civilizaciones humanas en el transcurso de la historia, dedicados a crear, ampliar y aplicar el conocimiento algebraico a los distintos problemas que afrontaban estas sociedades. Luego, todo este conocimiento generado tenía que ser preservado para las futuras generaciones, ahí entran en juego los aportes de la *educación matemática*, y quizás de las teorías culturales de este campo de estudio la más pertinente es la *enculturación matemática* propuesta por Alan Bishop (1988), en la que destacan actividades matemáticas comunes a casi todos los grupos humanos: contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar. Por último, se resaltan algunos rasgos del *pensamiento algebraico* y de una didáctica del álgebra escolar.

Palabras clave: cultura, matemática, álgebra, didáctica.

Abstract

With the purpose of discovering some characteristics of algebraic thinking and how to develop it with the help of a specific didactics, the following essay is presented. First, we highlight the cultural dimension of mathematics and in particular of algebra, highlighting the contributions of human civilizations throughout history dedicated to creating, expanding and applying algebraic knowledge to the different problems faced by these societies. Then all this generated knowledge had to be preserved for future generations, there the contributions of mathematics education come into play, and perhaps of the cultural theories of this field of study the most pertinent is mathematical enculturation proposed by Alan Bishop (1988), in which six mathematical activities common to almost all human groups: count, locate, measure, design, play and explain. Finally, some features of algebraic thinking and a didactics of school algebra stand out.

Keywords: culture, mathematics, algebra, didactics.

1 Profesor Titular del Departamento de Matemática. Doctor en Educación (Universidad Pedagógica Experimental Libertador).

2 Profesor Asociado del Departamento de Informática. FaCE. Doctorante en Educación Matemática (Universidad Pedagógica Experimental Libertador).

3 Profesora Titular a del Departamento de Matemática y Física. FaCE. Doctora en Educación (Universidad de Carabobo).

Introducción

La cultura según la Organización de las Naciones Unidas para la Ciencia, la Educación y la Cultura (UNESCO) es el conjunto de rasgos que diferencian a un grupo que pueden ser tanto espirituales como materiales, "(...) y que abarca además de las artes y las letras, los modos de vida, las maneras de vivir juntos, los sistemas de valores, las tradiciones y las creencias" (2001, p. 1), es decir todo lo que produce el hombre en su existencia puede ser considerado cultura, como lo menciona Bronislaw Malinowski "La cultura, creación acumulativa del hombre" (1931, p. 35). En este mismo orden de ideas en la Ley Orgánica de Cultura Venezolana se define cultura como: "La manera de concebir e interpretar el mundo, las formas de relacionarse los seres humanos entre sí, con el medio creado y con la naturaleza, el sistema de valores, y los modos de producción simbólica y material de una comunidad" (2014, p. 2).

Una de las creaciones de la humanidad es la ciencia y dentro de esta nos encontramos con la matemática, uno de los orígenes del conteo se relaciona con actividades cotidianas como la ganadería, al respecto, José Hernández afirma que: el hombre "Cuando se dedicó al pastoreo y se encontró con la necesidad de contar las cabezas de ganado, aunque entonces fuera de un modo muy primitivo, empezó a elaborar las primeras matemáticas" (1998, p. 450). Con el pasar de los siglos estas matemáticas primitivas se complicaron y diversificaron, ahora debido a lo extenso del conocimiento matemático para poder estudiarlo lo dividimos en las siguientes áreas: álgebra, análisis, aritmética, cálculo, ecuaciones diferenciales, estadística, geometría y probabilidad.

Las raíces del álgebra se ubican en la antigua matemática babilónica, donde se había desarrollado un avanzado sistema aritmético con el que los pueblos de Mesopotamia (actual Irak) fueron capaces de hacer cálculos en una forma algorítmica. Con este sistema lograron encontrar fórmulas y soluciones para resolver problemas que hoy en día suelen resolverse mediante ecuaciones lineales, ecuaciones de segundo grado y ecuaciones indeterminadas (Hildegard Lewy, 1951). En contraste, la mayoría de los egipcios de esta época y matemáticos griegos y chinos del primer milenio a. C., normalmente resolvían tales ecuaciones por métodos geométricos, como los descritos en el *Papiro de Rhind*, los *Elementos de Euclides* y los *Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático* (Dirk Struik, 1985).

En la Antigua Grecia, los matemáticos introducen un álgebra en la cual los términos se representaban mediante los lados de objetos geométricos, y a estas líneas asociaban letras (Carl Boyer, 1986). Los helénicos Herón de Alejandría y Diofanto, así como también los matemáticos indios como Brahmagupta, continuaron las tradiciones egipcias y babilónicas, aunque la *Arithmetica* de Diofanto y el *Brahmasphutasiddhanta* de Brahmagupta se hallan a un nivel de desarrollo mucho más alto. Como ejemplo de ello, la primera solución aritmética completa (incluyendo al cero y soluciones negativas) para ecuaciones cuadráticas fue descrita por Brahmagupta en su libro *Brahmagupta Siddhanta*. Más tarde, los matemáticos árabes y musulmanes desarrollarían métodos algebraicos a un grado mucho mayor de sofisticación. Diofanto (siglo III d. C.), fue un matemático alejandrino, autor de una serie de libros intitulados Arithmetica. Estos textos tratan de las soluciones a las ecuaciones algebraicas.

En la Edad Moderna representó una época de innumerables innovaciones para el álgebra alcanzándose resultados que superan los obtenidos por los árabes, persas, indios o griegos. Parte de este avance viene del estudio de las ecuaciones polinómicas de tercer y cuarto grado. Las soluciones para ecuaciones polinómicas de segundo grado ya eran conocidas por los matemáticos babilónicos cuyos resultados se difundieron por todo el mundo antiguo. El descubrimiento de soluciones algebraicas de tercer y cuarto orden tiene lugar durante el siglo XVI en Italia. De igual manera merece hacerse notar la definición de determinante descubierta por el japonés Kowa Seki en el siglo XVII, más tarde por Gottfried Leibniz con la resolución del sistema de ecuaciones lineales simultáneas con matrices (Carl Boyer, ob. cit.).

Más tarde, entre los siglos XVI y XVII se consolida la noción de número complejo, otorgándole al álgebra una cierta distancia de las cantidades medibles, en el siglo XVIII Gabriel Cramer hizo su aporte con el trabajo sobre matrices y determinantes, también Leonhard Euler, Joseph-Louis Lagrange, Adrien-Marie Legendre y numerosos matemáticos del siglo XVIII hicieron avances notables en álgebra. Así llegamos al siglo XIX cuando se desarrolla el álgebra abstracta inicialmente centrada en lo que hoy se conoce como teoría de Galois y en temas de la constructibilidad. La búsqueda de una fundamentación matemática rigurosa y una clasificación de los diferentes tipos de construcciones matemáticas llevaron a crear áreas del álgebra abstracta durante el siglo XIX absolutamente independiente de nociones aritméticas o geométricas (algo que no había sucedido con el álgebra de los siglos anteriores). Esta línea del tiempo nos ayuda a consolidar la idea de que el álgebra históricamente ha ido adquiriendo una identidad propia, con su propio lenguaje, métodos muy particulares y como un área y disciplina matemática con un objeto de estudio bastante preciso, lo cual se ha venido consolidando a través del tiempo. Con todo lo anterior, se puede decir que el álgebra es una rama de la matemática en la cual las operaciones son generalizadas empleando números, letras y signos que representan simbólicamente un número u otra entidad matemática.

Todo este conocimiento matemático generado en distintas partes del mundo por hombres y mujeres (de manera individual o colectiva) es necesario preservarlo y transmitirlo a las generaciones futuras para el desarrollo de la sociedad y de la vida en el planeta. Al respecto, Rolando García afirma que: "(…) la educación matemática reúne ciencias tanto naturales como sociales con el fin de explicar cómo aprendemos Matemática y cómo la enseñamos a las nuevas generaciones" (2017, p. 173). Entre estas ciencias naturales y sociales que nutren la educación matemática tenemos; según Juan Godino (1991), el modelo tetraédrico propuesto por Higginson en el que se pretende dar respuesta a cuatro preguntas básicas con la ayuda de algunas disciplinas, estas son: ¿Qué enseñar? (matemáticas), ¿por qué? (filosofía), ¿a quién y dónde? (sociología) y ¿cuándo y cómo? (psicología). Además, Juan Godino (ob. cit.) aclara el sistema de enseñanza de la matemática de Steiner compuesto por los subsistemas: la clase de matemáticas, la formación de profesores, el desarrollo del currículo, la propia educación matemática, además de las ciencias referenciales: matemática, epistemología y filosofía de las matemáticas, historia de las matemáticas, psicología, sociología, pedagogía y lingüística.

Por su parte, David Mora explica que: la educación matemática "(…) se ha de concebir entonces como un cuerpo interdisciplinar" (2001, p. 22), en el que no sólo interviene la matemática como disciplina, sino también: la pedagogía, la psicología, la sociología, la filosofía, la lingüística, la antropología, la didáctica general, las ciencias naturales, la historia y epistemología de las ciencias, la historia de la matemática y la informática.

Al mismo tiempo Walter Beyer (2001) afirma que, la Educación Matemática en Venezuela es entendida como un campo de creación de saberes, que se desarrolla gracias a las relaciones que se pueden establecer entre cuatro componentes básicos: (a) Los Postgrados (Especializaciones, Maestrías o Doctorados), (b) Las Publicaciones (libros, Trabajos de Grado de Maestría, Tesis Doctorales, publicaciones periódicas, artículos en memorias de eventos), (c) Los Eventos (locales, regionales, nacionales e internacionales) y (d) La Investigación (creación de núcleos o centros de investigación, investigaciones libres, investigaciones que conducen a la obtención de algún grado académico). Estos componentes conforman el Sistema de la Educación Matemática Venezolana (SEMV).

Luego, Asdrúbal Belisario (2015) amplía el Sistema de la Educación Matemática Venezolana (SEMV) propuesto por Walter Beyer, y lo denomina: Constelación de Categorías de la Educación Matemática Venezolana (CCEMV) en la cual, interactúan las siguientes categorías: (a) publicaciones, (b) investigaciones, (c) eventos, (d) postgrados, (e) instituciones, (f) organizaciones, y (g) actores de referencia.

Por otro lado, la educación matemática posee distintos enfoques tales como: cognitivo, curricular, didáctico, tecnológico, resolución de problemas, afectivo, histórico social, crítico, epistemológico, sistémico, socio cultural, entre otros. Este último el socio cultural, se subdivide en cinco teorías: la etnomatemática, la educación matemática crítica, la educación matemática realista, la socioepistemología y la enculturación matemática.

En la *enculturación matemática* se plantean seis actividades matemáticas comunes a casi todas las culturas, a continuación, se mencionan:

- ✓ Contar, "(…) que quizás sea la que más sugiere un desarrollo matemático y que probablemente es la actividad matemática mejor investigada en la literatura cultural" (Alan Bishop, 1988, p. 43), ejemplo de ello son los sistemas de numeración de los pueblos: babilonios, egipcios, griegos, indio, árabes, mayas, entre otros.
- ✓ Localizar, necesaria para "(…) demostrar la importancia del entorno espacial para el desarrollo de las ideas matemáticas" (Alan Bishop, ob. cit., p. 48), esta acción se relaciona directamente con la geometría plana y del espacio.

- ✓ Medir, "(...) importante para el desarrollo de las ideas matemáticas y se ocupa de comparar, ordenar y cuantificar cualidades que tienen valor e importancia" (Alan Bishop, ob. cit., p. 55), ejemplo de esto las medidas relacionadas con las partes del cuerpo: el codo, el pie, el palmo; empleadas por distintas civilizaciones alrededor del planeta.
- ✓ Diseñar, esta actividad se refiere a "(...) la tecnología, los artefactos y los objetos manufacturados que todas las culturas crean para su vida doméstica, para el comercio, como adorno, para la guerra, para jugar y con fines religiosos" (Alan Bishop, ob. cit., p. 60), este autor señala que el diseñar también se puede aplicar a "(...) las casas, las aldeas, los huertos, los campos, las carreteras y hasta las ciudades" (Alan Bishop, ob. cit., p. 61), ejemplo de ello las tumbas de los faraones en Egipto en forma piramidal.
- ✓ Jugar, "(...) puede parecer extraña, hasta que nos damos cuenta de la gran cantidad de juegos que tienen conexiones matemáticas" (Alan Bishop, ob. cit., p. 65), por ejemplo: el ajedrez y el go entre otros.
- ✓ Explicar, esta actividad busca centrar la atención en las "(...) abstracciones y formalizaciones que se derivan de las otras actividades y, mientras que éstas tienen que ver con la respuesta a preguntas relativamente simples como: ¿cuántos?, ¿dónde?, ¿qué? y ¿cómo?, explicar se ocupa con responder a la pregunta compleja ¿Por qué?" (Alan Bishop, ob. cit., p. 71), esta última actividad se relaciona claramente con el álgebra y el pensamiento algebraico.

La educación matemática se concibe entonces como una disciplina encargada de estudiar la enseñanza y aprendizaje de las distintas áreas de la matemática en la escuela, además de un campo para el desarrollo de investigaciones en distintas áreas y disciplinas que conforman la Matemática Escolar tal como el Álgebra, la cual, según el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), se propone como uno de los cinco bloques de contenido, junto con Números y Operaciones, Geometría, Medida, Análisis de Datos y Probabilidad para trabajar con los niños desde los primeros grados (Lilia Aké, Juan Godino y Margherita Gonzato, 2013). De esta manera, se entiende el Álgebra Escolar como una de las áreas y niveles fundamentales a ser desarrollada dentro de la Educación Matemática, con una forma particular de ser enseñada y aprendida, denominada para estos efectos como didáctica del Álgebra, y desde la cual se promueve lo que se conoce como el pensamiento algebraico.

Ahora bien, para introducirnos en el álgebra escolar, hemos de partir de un punto de referencia el cual según autores como Carolyn Kieran y Eugenio Filloy (1989), se encuentra en el pensamiento aritmético. "Los adolescentes, al comenzar el estudio del Álgebra, traen consigo las nociones y los enfoques que usaban en Aritmética. Sin embargo, el Álgebra no es simplemente una generalización de la Aritmética" (Carolyn Kieran y Eugenio Filloy, ob. cit., p. 229). Es decir, si bien ciertamente la base aritmética que poseen los estudiantes será de gran apoyo, no se debe considerar de manera lineal la consolidación del pensamiento algebraico como una estricta y necesaria continuidad del aritmético pues en este caso el pensamiento algebraico evoluciona a otras categorías de complejidad.

En ese orden, Lilia Aké, Juan Godino y Margherita Gonzato afirman que: "El razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las Matemáticas" (2013, p. 40). Por ello es necesario entender que el desarrollo del pensamiento algebraico va mucho más allá de las operaciones concretas que se desarrollan en la aritmética abstrayendo de lo concreto y/o concretando de lo abstracto, como lo plantea Cecilia Agudelo, "Pensar algebraicamente, en el contexto del análisis de situaciones de la vida real, requiere ir más allá de la simple identificación de hechos y realización de cálculos con números específicos" (2013, p. 3). De manera que resulta importante entender, que, aunque el pensamiento algebraico puede tener como base el aritmético, debe ser desarrollado con la aplicación de una metodología específica concebida a través de la didáctica del álgebra escolar.

No obstante, es bien sabido que en particular el álgebra representa una dificultad que muchos no superan ni aún después de muchos años de vida escolar, lo que se va consolidando en el propio individuo y sociedad como una barrera para el desarrollo humano contribuyendo a generar mitos contra ella. Al respecto, Oswaldo Martínez afirma que: "El mito de ser pensada como la asignatura más impopular del currículo, mantiene vigente la posibilidad de acrecentar, entre otros aspectos, miedo, odio, rabia, angustia, desmotivación y desinterés por la Matemática" (2014, p. 13), y ante una situación de posible animadversión, se puede agrandar la falta de disposición para aprenderla sin más explicación que su presunta dificultad desconociendo que de alguna manera el razonamiento matemático como el algebraico se puede considerar algo natural en el ser humano.

Desde esa perspectiva, la posible dificultad en el aprendizaje del álgebra y desarrollo del pensamiento algebraico, pudiera ser una situación de didáctica, por lo que le corresponde a ella dar respuesta a ese hecho como el campo de estudio de la Educación Matemática. A ese respecto, Andrés González, plantea que las deficiencias detectadas en la didáctica venezolana del álgebra son:

> (...) importantes insuficiencias teóricas y prácticas, ante lo cual emergió la necesidad de hacer una revisión de este ámbito específico de la Educación Matemática tomando en cuenta los aspectos didáctico e investigativo con el propósito de coadyuvar a la visibilización del Álgebra Escolar (2017, p. 8).

Esta realidad implica la necesidad de desarrollar investigaciones tendentes a reforzar la didáctica del álgebra desde edades tempranas para así vencer los posibles obstáculos que dificultan su aprendizaje y el desarrollo del razonamiento y pensamiento algebraico como una necesidad del ser humano.

Ahora bien, para desarrollar el pensamiento algebraico desde una didáctica del álgebra, los docentes y estudiantes deberán transitar un camino durante sus años de vida escolar en los cuales los primeros serán mediadores del proceso aplicando un amplio conjunto de elementos como: teorías, estrategias, técnicas, recursos y medios instruccionales que conforman parte de la didáctica en general para facilitar la transición cognitiva hacia el desarrollo del pensamiento algebraico. Para Yolanda Serres, "El objetivo del Álgebra Escolar es desarrollar el razonamiento o Pensamiento Algebraico" (2010, p. 126), y ello será posible haciendo uso de una metodología definida en la didáctica del álgebra.

Con el propósito de develar algunas características del pensamiento algebraico y como se desarrolla a través de una didáctica, exponemos los siguientes apartados de este ensayo.

El pensamiento algebraico, ¿qué es?, ¿cuál es su naturaleza? y ¿cómo se desarrolla?

Hablar de pensamiento algebraico, implica en primera instancia entender en qué consiste para luego considerar de qué manera se puede desarrollar. Entonces, se trata de asignarle al pensar la cualidad algebraica, para lo cual es necesario entender lo que es, o no es algebraico, y ello inicia por definir formalmente que es el álgebra en el campo de la matemática. En el diccionario de la Real Academia Española (2019), la palabra Álgebra tiene dos acepciones: 1. f. Parte de las matemáticas que estudia estructuras abstractas en las que, mediante números, letras y signos, se generalizan las operaciones aritméticas habituales, como la suma y el producto. 2. f. Arte de restituir a su lugar los huesos dislocados. Sin embargo, estas definiciones terminan siendo aún bastante vagas lo cual no contribuye de manera significativa para la comprensión actual del concepto, de hecho, la definición número 2 está en desuso.

Al respecto, Aurelio Baldor afirma que: "Álgebra es la rama de la Matemática que estudia la cantidad considerada del modo más general posible" (1980, p. 5); de este concepto, y de la definición de la Real Academia Española, hemos de rescatar el proceso de la generalización como una cualidad de lo algebraico. Es decir, la visión generalizada se concibe como una forma algebraica de considerar elementos matemáticos, por consiguiente, la generalización viene siendo una condición del pensamiento algebraico. Juan Godino y otros, por su parte refuerza esa idea cuando nos dice que al parecer existe consenso en cuanto a considerar que; "(...) uno de los rasgos característicos del razonamiento algebraico es su manera de abordar los procesos de generalización matemática, esto es, estudios en los que se pasa de considerar casos particulares de situaciones, conceptos, procedimientos (...) a las clases de tales objetos" (2012, p. 489). De tal manera, se refuerza que una de las características del pensamiento algebraico sería la generalización por cuanto es una de las cosas que hace el álgebra como rama de la matemática, pero como ya dijimos, quedarnos en la definición de Aurelio Baldor sería limitada considerando otros procesos que se concretan en el álgebra y que por consiguiente también deben ser parte del pensamiento algebraico.

En tal sentido, Carolyn Kieran y Eugenio Filloy, trascienden ese concepto diciendo que: "(...) para una caracterización significativa del Pensamiento Algebraico no es suficiente ver lo general en lo particular, se debe ser capaz de expresarlo algebraicamente" (1989, p. 165). Dicho de otro modo, el pensamiento generalizado como una manifestación algebraica, debe ser expresado de manera observable, para que así, se asuma que en efecto está presente esa característica del pensamiento, esto es, si la expresión presuntamente algebraica se queda sólo en el pensar, no podremos verificar que en efecto existe, y eso sólo se constata una vez que el sujeto lo expresa. Para reforzar esta afirmación, consideremos lo que dicen José Fernández y Encarnación López, cuando aseguran que: "El razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades y, para ello, el uso de símbolos y de expresiones literales se convierte en una herramienta necesaria para la resolución de problemas y la modelización de situaciones diversas" (2014, p. 2).

En este caso, José Fernández y Encarnación López (ob. cit.) amplían el espectro de procesos que se llevan a cabo en álgebra y que por consiguiente deberían estar presentes en el pensamiento algebraico, ellos son: generalización, representación, formalización de patrones, simbolización y modelización. Esta aseveración, conduce a pensar que el desarrollo del pensamiento algebraico se debe dar de manera gradual en virtud de que todos esos procesos no ocurren de manera simultánea, algunos son más avanzados y servirán de base para los otros. En ese sentido, Juan Godino y otros, dicen que: "La presencia de los objetos y procesos reconocidos como algebraicos es gradual, sistemática y progresiva" (2012, p. 487), lo cual nos induce a que la evolución del pensamiento algebraico pudiera tener distintas etapas que, en el transcurso de su desarrollo, se van complementando y son todas necesarias en mayor o menor grado.

En la misma idea de Carolyn Kieran y Eugenio Filloy (1989), si bien la generalización y formalización de patrones pudieran ser procesos del pensamiento algebraico, el individuo debe ser capaz de evidenciarlos, y es allí cuando hace uso de la representación, simbolización y modelización como expresiones tangibles y observables del mismo. Esos tres procesos, se ubican en un estadio más avanzado que el de generalización y tal vez por esa razón, existe una clara tendencia en las estructuras curriculares a abordar la enseñanza del álgebra desde educación secundaria, lo que dificulta aún más su aprendizaje, así como el desarrollo del pensamiento algebraico. Sin embargo, un grupo importante de autores coinciden en la necesidad de incorporar su estudio y práctica desde los grados más bajos de la escuela básica de manera que desde la escuela temprana el estudiante tenga la oportunidad de abordar los elementos algebraicos que le permitirán desarrollar su pensamiento, aprender de manera más efectiva y mejorar su rendimiento en las matemáticas.

Respecto a la simbolización como uno de los procesos del álgebra y elemento del pensamiento algebraico, Carmen Gómez, aporta que: "El uso de la notación mediante letras posibilita la independencia con respecto al objeto que se representa, el símbolo cobra entonces un significado que va más allá del objeto simbolizado" (1997, p. 208). De igual manera, según Andrés González, "(...) para comunicar ideas matemáticas el símbolo es insustituible, no es posible hacerlo sin recurrir a él (...)" (2017, p. 17). Según estos autores, el símbolo como elemento y por consiguiente la simbolización como proceso, conforman no solo un elemento fundamental del álgebra, sino que así mismo debe ser del pensamiento algebraico por cuanto esto le permitirá al sujeto de alguna manera desprenderse o independizarse del objeto a través de su representación simbólica.

Del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico

Algunos autores consideran que el pensamiento aritmético es previo al algebraico, entre ellos, Carolyn Kieran y Eugenio Filloy, manifiestan que:

> Los adolescentes, al comenzar el estudio del Álgebra, traen consigo las nociones y los enfoques que usaban en Aritmética. Sin embargo, el Álgebra no es simplemente una generalización de la Aritmética. Aprender Álgebra no es meramente hacer explícito lo que estaba implícito en la Aritmética. El Álgebra requiere un cambio en el pensamiento del estudiante de las situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre números y operaciones (1989, p. 229).

En efecto, como comentan los autores citados, cabe recordar que los estudiantes de secundaria ya han transitado unos cuantos años de escolaridad en los cuales necesariamente han compartido un conjunto de contenidos de matemática elemental, en su mayoría relacionados con aritmética, lo cual les proporciona una base de conocimientos que en alguna medida dependerán de la didáctica que haya sido utilizada para estos efectos. De igual manera, los autores una vez más manifiestan la idea ya desarrollada en apartado anterior en la que se refuerza el hecho de que el pensamiento algebraico va mucho más allá de la mera generalización.

Por otro lado, Nadine Bednarz, Carolyn Kieran y Lesley Lee proponen que: "(...) el Álgebra no es solo una extensión del dominio numérico (...) La historia proporciona una advertencia sobre ver Álgebra simplemente como una extensión de Aritmética" (1996, p. 34). Esa reflexión, nos conduce a ser cautelosos cuando se pretende ver quizá de manera simplista que el pensamiento algebraico es necesariamente una continuación o posible evolución del pensamiento aritmético lo cual no necesariamente es una condición *sine qua non*. Es así como se asume que, en distintas categorías de complejidad, las operaciones aritméticas tienden a ser menos complejas que las algebraicas, por cuanto en sí mismas se desarrollan con valores más precisos y concretos.

En ese orden de ideas, se deriva la premisa de que, si el conocimiento aritmético es menos complejo que el algebraico, por consecuencia lo mismo ha de ocurrir con el pensamiento aritmético ante el pensamiento algebraico. Entonces, hablamos de una transitoriedad de la aritmética al álgebra para lo cual se plantea la propuesta dada a conocer como preálgebra, una nueva corriente para la matemática escolar refiriéndose al pensamiento aritmético como transitorio hacia el algebraico. Así lo plantea, Alberto Zapatera cuando expresa que: "La preálgebra intenta suavizar la transición entre la Aritmética y el Álgebra y reducir las dificultades que sufren los alumnos en el aprendizaje del Álgebra (...)" (2018, p. 53). Desde esta visión, se asume que el pensamiento aritmético es previo o por lo menos más sencillo, pero no estrictamente prerrequisito para avanzar al algebraico y ello sirve como punto de referencia para una didáctica del álgebra.

Sin embargo, en virtud de ese paso que da la aritmética como lenguaje, como operación y como pensamiento hacia lo algebraico, y en esa visión de preálgebra, Cristianne Butto y Teresa Rojano expresan que:

> La transición de la Aritmética al Álgebra es un paso importante para llegar a ideas más complejas dentro de las matemáticas escolarizadas. Sin embargo, presenta obstáculos que la mayoría de los adolescentes encuentran muy difíciles de superar. Esto se debe, en parte, a que este contenido matemático se enseña por lo general a partir de fuentes limitadas de significados; usualmente se toma como base el dominio numérico (simbolización numérica), dejando de lado ideas importantes que se interconectan con otros dominios matemáticos, como, el geométrico (2004, p. 114).

Esta postura de Cristianne Butto y Teresa Rojano, apunta a que de alguna manera se simplifica la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética omitiendo fuentes y contenidos importantes que posteriormente tienden a dificultar el desarrollo del pensamiento algebraico. Dicho de otra manera, según Franzyuri Hernández y Zoraida Villegas (2019) la matemática prealgebraica que se maneja desde la aritmética tiene bajos niveles de contenidos los cuales no benefician en lo absoluto la evolución hacia el pensamiento algebraico.

Es oportuno recordar, que desde el inicio de este escrito comenzamos con la caracterización de una idea que orientara el camino hacia una manera de enseñar y aprender el álgebra, y por supuesto desarrollar el pensamiento algebraico, ese camino es la didáctica para alcanzar ese propósito, el mismo está concretado en una didáctica del álgebra y el desarrollo del pensamiento algebraico. Esa didáctica en virtud de lo que hemos venido planteando debe contemplar el enriquecimiento desde la aritmética englobando otros grados desde edades tempranas en la educación básica. Así como lo plantea Andrés González, "Desde el punto de vista didáctico destacamos el enfoque de la iniciación temprana al Álgebra puesto que hace posible la convergencia de contenidos aritméticos, geométricos y algebraicos entrelazados hacia el desarrollo del Pensamiento Algebraico" (2017, p. 32).

Desde la perspectiva de Andrés González (2017), partiendo de los más tempranos niveles educativos y edades, deben converger en el aula, contenidos y saberes que aborden las distintas ramas relacionadas con las matemáticas, para así favorecer el pensamiento y aprendizaje algebraico. Efectivamente, no es una determinante que el pensamiento algebraico este solamente impregnado y proyectado por pensamiento aritmético, sino que más bien pudieran estar presentes y por ende favorecerse abarcando elementos de la geometría entre otras que contienen una gran cantidad de elementos algebraicos. De tal manera que, al considerar formalmente una didáctica del álgebra, sería necesario tomar en cuenta no sólo el álgebra misma, sino además otros contenidos y áreas que la contienen. Para Ligia Torres, Edith Valoyes y Rocío Malagón, "(...) es a partir del trabajo numérico y geométrico (entiéndase de la Aritmética y la Geometría), en diferentes contextos que los estudiantes logran, encontrarle un sentido al lenguaje simbólico e iniciarse en el Álgebra" (2002, p. 233).

¿Por qué una didáctica del álgebra escolar?

En virtud de las consideraciones abordadas en este desarrollo, en adelante tendríamos las condiciones mínimas para plantearnos una posible manera de enseñar y aprender el álgebra y, por ende, aproximarnos a una didáctica de la misma para el desarrollo del pensamiento algebraico partiendo de los elementos intrínsecos que le son propios como: los símbolos, las abstracciones, el lenguaje, las expresiones, las relaciones, la nomenclatura, las generalizaciones, el análisis, los significados, notaciones, fórmulas, ecuaciones y por supuesto la misma aritmética entre otras. Tomando en cuenta todos esos elementos, se pudiera decir que el álgebra como área y como disciplina, tiene una forma propia de ser abordada y por consiguiente de ser enseñada y aprendida, lo que pudiera conducirnos a una epistemología del álgebra como una forma muy particular de producir saberes y constructos cognitivos dentro del área de la matemática.

A ese respecto, existen algunas propuestas que se orientan a desarrollar una didáctica desde los inicios de la vida escolar en educación primaria. Martín Socas, comenta en relación a ello dos de esas alternativas: "(...) podemos considerar que las propuestas de Pre-Álgebra y de "Early-Algebra" de incorporar el Álgebra al currículo de la educación primaria tienen como finalidad ayudar al desarrollo del pensamiento numérico y algebraico, facilitando la transición de la Aritmética al Álgebra (...)" (2011, p. 27). Por su parte, Teresa Rojano aporta puntuales observaciones respecto a un conjunto de investigaciones en el campo del lenguaje matemático como parte de las reformas curriculares con miras a mejorar el aprendizaje del álgebra:

> Uno de los efectos más notorios sobre las mencionadas reformas educativas se observa en el tratamiento específico y muy detallado de temas o nociones matemáticas que la investigación demostraba que requerían de tiempos didácticos muy prolongados y de ciertas condiciones de maduración cognitiva de los alumnos. Así, aparte de las ventajas que representa el tener en cuenta los obstáculos y dificultades inherentes al aprendizaje de un cierto concepto matemático, (...) el enfoque conceptualista se enfrenta también con el problema de acoplar los mencionados tiempos didácticos a los tiempos reales de los ciclos escolares (...) (1994, p. 46).

En ese orden de ideas, hemos de reflexionar en cuanto a que las distintas áreas del conocimiento tienen formas y maneras de ser aprehendidas según su naturaleza y que dentro de una misma área los diferentes contenidos de igual manera requerirán diversos procesos y tal vez varios lapsos de aprendizaje en función de desiguales ciclos de maduración cognitiva.

Por otro lado, en virtud de las diferencias de cada área según su naturaleza y objeto, Alicia Camilloni plantea que: "La Didáctica General y las Didácticas de las disciplinas son necesarias unas a las otras" (2014, p. 2). Esto implica que cada área del conocimiento, empleará un conjunto de: estrategias, técnicas, medios, procedimientos, teorías y enfoques que, al final, configuran los procesos de enseñanza y aprendizaje de esa disciplina. Al plantear la didáctica de las disciplinas Alicia Camilloni propone:

> Didácticas específicas de las disciplinas: didáctica de la Matemática, de la Lengua, de las Ciencias Sociales, de las Ciencias Naturales, de la Educación Física, del Arte, etcétera. Estas divisiones, a su vez, dan lugar a subdivisiones que alcanzan niveles crecientes de especificidad, tales como didáctica de la enseñanza de la lectoescritura, didáctica de la educación en valores, didáctica de la educación técnica, didáctica de la Música, didáctica de la Natación o didáctica del inglés como segunda lengua (ob. cit., p. 3).

En ese mismo sentido, si identificamos claramente el objeto de estudio del álgebra y los elementos que le son inherentes, además de entender cómo funcionan mentalmente los procesos matemáticos, también debe existir una didáctica del álgebra. De tal manera que, se trata de consolidar didácticamente una forma eficaz y efectiva de enseñar y aprender la matemática y en particular el álgebra con la intención de desarrollar el pensamiento algebraico.

Reflexiones finales de los autores

Es importante resaltar que la didáctica del álgebra no sólo debe basarse en el conocimiento algebraico, sino que los aportes de otras ramas de la matemática como: la aritmética, la geometría, el cálculo, la estadística y las probabilidades nutren y ayudan al desarrollo del pensamiento algebraico desde edades tempranas hasta la adultez de los aprendices.

En este sentido, entendemos con Franzyuri Hernández y Zoraida Villegas (2019) que se trata de: educar, enseñar y aprender para elevar ese pensamiento en la escuela formal bajo un proceso diseñado, con ese propósito, en una didáctica del Álgebra Escolar con la intención de desarrollar el Pensamiento Algebraico, lo cual mientras su práctica se inicie en los cursos escolares más bajos mejor será para el estudiante, para las matemáticas y para la sociedad en general.

Todo este conocimiento creado, cuidado y atesorado por distintos grupos culturales en el mundo durante todos los años de historia de la humanidad debe ser comunicado y explicado a las generaciones futuras, éste es el verdadero reto de cualquier didáctica, sintetizar miles de años en pocas horas de clase. Quizás uno de los caminos para lograr esto sea la aplicación de los principios de la enculturación matemática ya que: el contar (aritmética y cálculo), localizar (geometría), medir (cálculo y geometría), diseñar (aritmética, cálculo, geometría, estadística y probabilidades), jugar (aritmética, cálculo, geometría, estadística y probabilidades), y explicar (álgebra), todas son actividades puestas en práctica en el pensamiento algebraico.

Sin intención de fijar una postura definitiva, y reconociendo las debilidades que obligan a una revisión exhaustiva de la temática abordada en este ensayo, consideramos que la didáctica del álgebra escolar es un área de obligatoria investigación y aplicación por parte de los participantes que se forman en Educación Matemática. Esa postura, en función de que la matemática, así como el lenguaje, es un proceso y forma de expresión y relación inherente al ser humano en toda actividad que desarrollará durante su vida. De la misma manera, el pensamiento algebraico es una función casi natural en las personas en la medida en que cada ser hace abstracciones y simbolizaciones del mundo que lo rodea para relacionarse con el resto de los sujetos sociales y para aprender de su entorno.

Referencias

Agudelo-Valderrama, Cecilia. (2013). La creciente brecha entre las disposiciones educativas colombianas, las proclamaciones oficiales y las realidades del aula de clase: Las concepciones de profesores y profesoras de matemáticas sobre el álgebra escolar y el propósito de su enseñanza. REICE, 5(1).

Aké, Lilia; Godino, Juan y Gonzato, Margherita. (2013). Contenidos y actividades algebraicas en educación primaria. Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 33, 39-52.

Baldor, Aurelio. (1980). Álgebra. Cultural Centroamericana, Ediciones y Distribuciones Codice, S. A. Madrid. España.

Bednarz, Nadine; Kieran, Carolyn y Lee, Lesley. (1996). Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching. Mathematics Education Library, 18. Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Belisario, Asdrúbal. (2015). Presencia de la Educación Matemática en la Prensa Escrita Venezolana. Caso: Tetraedro. [Tesis Doctoral no publicada. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara].

Beyer, Walter. (2001). Pasado, Presente y Futuro de la Educación Matemática en Venezuela. Parte I. Enseñanza de la Matemática, 10(1), 23-36.

Bishop, Alan. (1988). Enculturación Matemática. La Educación Matemática desde una perspectiva cultural. [Documento en línea]. Disponible en: http://www.1991-enculturacic3b3n-matemc3a1tica-alan-j-bishop1.pdf [29/12/2020].

Boyer, Carl. (1986). Historia de la Matemática. Madrid: Alianza Editorial.

Butto, Cristianne y Rojano, Teresa. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: Abordaje basado en la geometría. Redalyc. Org. Educación Matemática, 16(1), 113-148.

Camilloni, Alicia. (2014). Didáctica general y didácticas específicas. [Versión electrónica]. Disponible en: http://www.palermo.edu/ACI/trabajos/Alicia-Camilloni.pdf[10/11/2020].

Fernández-Rodríguez, José y López-Fernández, Encarnación. (2014). Introducción al álgebra. [Documento en línea]. Disponible en: http://www.xeix.org/IMG/pdf/introduccion_al_algebra_1o.pdf [10/09/2020].

García-Hernández, Rolando. (2017). Un modelo axiomáticamente valioso y afectivo. Dialógica, 14(1), 171-207.

Godino, Juan. (1991). Hacia una Teoría de la Didáctica de la Matemática. [Documento en línea]. Disponible en: http://cimm.ucr.ac.cr/ciaem/articulos/universitario/conocimiento/Hacia%20una%20teor%c3%ada%20de%20la%20did%c3%a1ctica%20de%20la%20matem%c3%a1tica.*Godino,%20Juan%20D.%20*Godino,%20J.%20Hacia%20una%20teor%c3%ada%20de%20la%20did%c3%a1ctica%20de%20la%20matem%c3%a1tica.pdf [11/10/2020].

Godino, Juan; Castro, Walter; Aké, Lilia y Wilhelmi, Miguel. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. Bolema, 26(42B), 483-511.

Gómez-Granell, Carmen. (1997). Hacia una epistemología del conocimiento escolar: El caso de la educación matemática. 195-215.

González-Rondell, Andrés. (2017). Aspectos conceptuales y didácticos del pensamiento algebraico. Areté. Revista Digital del Doctorado en Educación de la Universidad Central de Venezuela, 3(5), 7-38.

Hernández, José. (1998). Enciclopedia Temática. Barcelona: Espasa Calpe.

Hernández-Fajardo, Franzyuri y Villegas-Montero, Zoraida. (2019). Pensamiento algebraico y didáctica del álgebra escolar en educación básica. Revista: ARJÉ. Edición Especial. [APROBADO para su publicación]. Dirección de Postgrado. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Carabobo.

Kieran, Carolyn y Filloy Eugenio. (1989). Investigación y experiencias didácticas el aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. Enseñanza de las Ciencias, 7(3), 229-240.

Lewy, Hildegard. (1951). Studies in assyro-babylonian mathematics and metrology, in Orientalia. [Documento en línea]. Disponible en: https://es.wikipedia.org/wiki/Matem%C3%A1tica_babil%C3%B3nica [5/08/2020].

Ley Orgánica de Cultura. (2014) [Documento en línea]. Disponible en: https://albaciudad.org/wp-content/uploads/2014/12/Gaceta-Oficial-Extraordinaria-N%C2%BA-6.154-LOC.pdf [30/08/2020].

Malinowski, Bronislaw. (1931). La Cultura. [Documento en línea]. Disponible en: https://www.ciesas.edu.mx/publicaciones/clasicos/00_CCA/Articulos_CCA/CCA_PDF/037_MALINOWSKI_Cultura_B.pdf [15/09/2020].

Martínez-Padrón, Oswaldo. (2014). Sistema de creencias acerca de la matemática. Actualidades Investigativas en Educación, 14(3), 1-28.

Mora, David. (2001). Didáctica de las Matemáticas. Caracas: Universidad Central de Venezuela.

Real Academia Española. (2019). Diccionario de la lengua española. Disponible en: http://dle.rae.es/

Rojano, Teresa. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. Investigación y Experiencias Didácticas. Enseñanza de las Ciencias, 12(l), 45-56.

Serres, Yolanda. (2010). Iniciación del aprendizaje del álgebra y sus consecuencias para la enseñanza. Sapiens. Revista Universitaria de Investigación, 12(1),122-142.

Socas, Martín. (2011). La enseñanza del álgebra obligatoria. Aportaciones de la investigación. Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 77, 5-34.

Struik, Dirk. (1985). A concise history of mathematics. Dover Publications. New York, USA.

Torres-Rengifo, Ligia; Valoyes, Edith y Malagón, Rocío. (2002). Situaciones de generalización y uso de modelos en la iniciación al álgebra escolar. Revista EMA, 7(2), 227-246.

UNESCO. (2001). Declaración Universal de la UNESCO sobre la Diversidad Cultural. [Documento en línea]. Disponible en: http://www.cdi.gob.mx/lenguamaterna/declaracionuniv.pdf [10/12/2020].

Zapatera-Llinares, Alberto. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para educación infantil y primaria. Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 97, 51-67.