

Diseño de algoritmos para la estabilización simultánea con múltiples dominios acotados con el método de factorización

Francisco J. Arteaga B.⁽¹⁾, Marco A. Contramaestre A.⁽¹⁾, Mayra A. Vizcaya N.⁽¹⁾, Guy O. Beale⁽²⁾, Atilio Morillo⁽³⁾

⁽¹⁾Unidad de Investigación en Automatización Industrial, Escuela de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Carabobo, Valencia, Venezuela

⁽²⁾Electrical and Computer Engineering, George Mason University, Fairfax, Virginia, U.S.A.

⁽³⁾Centro de Investigación de Matemática Aplicada, División de Postgrado de Ingeniería, Universidad del Zulia,
Maracaibo, Venezuela

Email: farteaga@uc.edu.ve, gbeale@gmu.edu, amorillo7@cantv.net

Resumen

Este trabajo presenta el diseño de algoritmos para la estabilización simultánea con múltiples dominios acotados de estabilidad. El método utilizado es una extensión del enfoque basado en la factorización coprima para el caso de dominios acotados. Las condiciones específicas de D_T -estabilidad para dos y tres plantas, la extensión de la propiedad de paridad interlazada y la parametrización de los compensadores D_T -estabilizantes se aplican en el desarrollo de los algoritmos. Los sistemas asociados para dos plantas y los sistemas asociados y auxiliares para el caso de tres plantas fueron derivados. Se presenta como ejemplo el caso de un sistema con dos modelos de planta lineales y de primer orden. A partir de los resultados obtenidos, se establece que el compensador calculado estabiliza satisfactoriamente en forma simultánea los dos modelos, cumpliendo con los criterios de diseño del sistema. Estos algoritmos pueden ser extendidos al caso de un número mayor de tres modelos de planta.

Palabras clave: Estabilización simultánea, dominios acotados, factorización coprima, diseño de algoritmos.

Algorithms design for simultaneous stabilization with multiple bounded domains using factorization approach

Abstract

This work presents the design of algorithms for simultaneous stabilization with multiple bounded domains of stability. The method used is an extension of the coprime factorization approach for the case of bounded regions. Specific conditions for D_T -stability for two and three plants, the extension of the parity interlacing property and the parametrization of the D_T -stabilizing compensators are applied in the algorithm development. The associated systems for two plants and the associated and auxiliary systems for the case of three plants were derived. A case study of two first order linear plants is presented. Based on the obtained results, it is determined that the designed compensator stabilizes simultaneously and satisfactorily both models, meeting the performance system requirements. These algorithms can be extended to the case of more than three plant models.

Keywords: Simultaneous stabilization, bounded domains, coprime factorization, software design.

1. INTRODUCCIÓN

El problema de Estabilización Simultánea puede visualizarse como un caso muy particular e importante dentro del contexto del campo de control robusto. El enfoque en control robusto es analizar y diseñar un sistema de control que trabaje con un buen grado de precisión en el cumplimiento de los requerimientos (sobrepulso, tiempo de establecimiento, etc.) ante la

presencia de incertidumbres de la planta. En estabilización simultánea las incertidumbres se derivan de la dinámica de la planta y son expresadas en un número discreto ó finito de modelos de planta [1, 2]. El proceso se representa mediante $r + 1$ modelos de planta $p_0, p_1, p_2, \dots, p_r$ donde p_0 es el modelo en condiciones nominales, y p_1, p_2, \dots, p_r son los modelos planta ante la presencia de perturbaciones, fallas, etc. Entonces, si la familia de plantas puede ser estabilizada por un

compensador c , en caso de fallas se mantiene la estabilidad del sistema. Algunas de las aplicaciones del concepto de estabilización simultánea consideran el diseño de control confiable, sistemas no-lineales, y control robusto [3, 4]. En el diseño de control confiable, el problema consiste en estabilizar simultáneamente una planta nominal y perturbaciones discretas de la planta provenientes de fallas de componentes del sistema, o cambios estructurales en la planta. En el diseño de un compensador para un sistema no-lineal, modelos linealizados de la planta son derivados para diferentes condiciones de operación de la planta, y el compensador es diseñado para estabilizar simultáneamente los diferentes modelos de planta. En control robusto, el propósito del compensador es estabilizar el sistema de lazo-cerrado bajo perturbaciones continuas resultantes de incertidumbres en la modelación del sistema nominal [3-6].

En el estudio de control de procesos es importante visualizar previamente el comportamiento del sistema durante su funcionamiento normal ó cuando ocurren irregularidades, de modo que se hace necesario llevar esta teoría de estabilización simultánea al computador, mediante el desarrollo de un software que permita simular de manera representativa y dinámica el comportamiento de la planta durante sus diferentes condiciones, y de esta manera se puede comprobar que un compensador satisface de modo eficaz los requerimientos para cada uno de los procesos a estabilizar.

2. MOTIVACIÓN DE ESTA INVESTIGACIÓN

Una de las razones para implementar estos algoritmos basado en la estabilización simultánea es proporcionar una herramienta para el diseño de sistemas de control confiables en presencia de fallas en sensores y actuadores así como para la enseñanza de estabilización simultánea de manera interactiva con el usuario. La estabilización confiable está relacionada con la situación donde el objetivo es mantener la estabilidad de lazo-cerrado en presencia de fallas de la planta y/o controlador. Estos problemas corresponden a lo que se ha referido como la síntesis de sistemas de control con integridad [3, 7, 8]. La descripción de la planta puede representarse por la fun-

ción de transferencia p_0 (planta operando en condiciones nominales), y $p_1, p_2, p_3, \dots, p_r$ representan la descripción de la planta en la presencia de varias fallas, tales como la pérdida de sensores, actuadores, transductores, etc. Si la familia de plantas $p_0, p_1, p_2, p_3, \dots, p_r$ puede ser estabilizada por un compensador común c , entonces en el caso de tener una falla, c mantiene la estabilidad del sistema, un dominio de estabilidad es la región del plano s donde deben estar todos los polos de cadena cerrada de un sistema compensado. El caso en el que las plantas se asumen que tienen el mismo dominio de estabilidad D , es llamado el problema convencional de estabilidad simultánea y la forma del dominio se muestra en la Figura 1, un dominio de estabilidad es la región del plano s donde deben estar todos los polos de cadena cerrada de un sistema compensado.

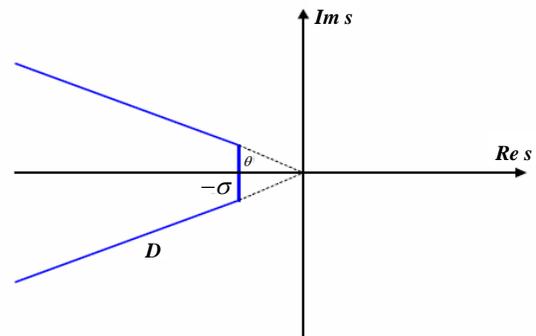


Figura 1. Dominio generalizado de estabilidad.

El análisis del problema generalizado nos lleva a la posibilidad de tener el caso de diferentes conjuntos de requerimientos de funcionamiento para cada modelo p_i . En el caso que el sistema nominal falle, se tiene que tratar como un sistema diferente del comportamiento de operación nominal. Cada modelo de falla puede resultar en diferente funcionamiento, conllevando a diferentes polos de lazo cerrado dentro de un subconjunto D_i , de D (el semiplano- s izquierdo abierto) con el fin de cumplir objetivos adicionales tales como sobreimpulso, tiempo de establecimiento, etc.

El beneficio de usar múltiples dominios en vez de usar solamente el dominio más pequeño D_0 radica en que se puede estar interesado en estabilizar cada

planta p_i ($i= 1, 2, \dots, r$) en alguna región de D_i que no es parte de D_0 . En este caso, la estabilización simultánea se realiza con respecto a cada uno de los dominios específicos para cada planta. Este es un problema menos limitativo que considerar el mismo dominio D_0 para todas las plantas, y también más real. Las plantas p_i ($i= 0, 1, 2, \dots, r$) pueden ser simultáneamente estabilizables con respecto a cada D_i aún cuando no lo sean con respecto al más pequeño dominio común D_0 .

La motivación para el uso de dominios acotados radica en el hecho de que existen limitaciones físicas en el compensador, los actuadores y otros instrumentos (sensores, transductores) presentes en el sistema [3, 7, 8]. Esto resulta en una cota superior en la magnitud de la parte real negativa de los polos de lazo-cerrado. La forma para estos dominios acotados se muestra en la Figura 2.

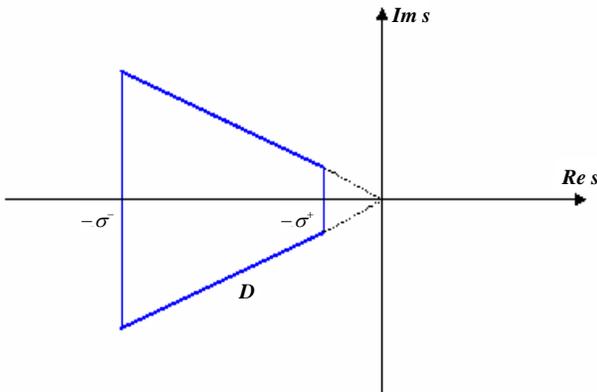


Figura 2. Dominio acotado de estabilidad.

3. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

3.1 Terminología de conceptos utilizados

El término C_+ representa el semiplano derecho cerrado, es decir, $s: Re s \geq 0$, C_- representa todo el semiplano izquierdo, es decir, $s: Re s < 0$, y el término C_{+e} representa el semiplano derecho extendido del plano complejo s , es decir, C_{+e} abarca C_+ más el infinito (∞).

El conjunto de los polinomios en el plano s con coeficientes reales se representa como $R[s]$ y el conjunto de las funciones racionales con coeficientes reales se representa como $R(s)$. Por lo tanto, $R(s)$

puede utilizarse para representar el conjunto de todas las posibles funciones de transferencia, incluyendo los sistemas lineales invariantes en el tiempo. Existe un subconjunto de $R(s)$ llamado S conformado por todas las funciones racionales estables y propias. En S , estas funciones racionales estables y propias no son acotadas y todos sus polos tienen parte real negativa. En particular, S es un dominio Euclideo propio y $R(s)$ es un subconjunto de $R[s]$ y S .

3.2 Factorización coprime para dominios acotados

Se asume un dominio dado de estabilidad D en el plano s , y una función $f \in R(s)$, donde f puede escribirse como la relación:

$$f = \frac{P_1(s)}{P_2(s)}$$

con $P_1(s), P_2(s) \in R[s]$, y P_1, P_2 coprimos en S_D (ningún cero común en D^c). n expresa el máximo grado entre P_1 y P_2 , es decir, $n = \max[\deg(P_1, P_2)]$, y se define:

$$f_1(s) = \frac{P_1(s)}{(s+\gamma)^n}, \quad f_2(s) = \frac{P_2(s)}{(s+\gamma)^n} \quad (1)$$

donde $\sigma_i^- < \gamma < \sigma_i^+$ y $\gamma \in R$. Las nuevas funciones $f_1(s), f_2(s) \in S_D$ y son coprimas en S_D , y ahora f puede escribirse como:

$$f(s) = \frac{f_1(s)}{f_2(s)}$$

la cual se refiere a la factorización coprime de $f(s)$ en el conjunto S_D . Las funciones $f_1(s)$ y $f_2(s)$ son propias y estable en S_D y no tiene ningún cero común en D_{+e}^c . El concepto de factorización coprime permite determinar la existencia de un compensador $c \in R(s)$ que D -estabiliza a una planta dada $p \in R(s)$. Primero, la planta p se factoriza como una relación:

$$p(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

donde $n, d \in S_D$ y son coprimas en S_D . Entonces, puede decirse que c es un compensador que D -estabiliza a la planta p si y sólo si c puede factorizarse como la relación:

$$xn+yd=1 \quad (2)$$

Esta expresión es llamada la identidad de Bezout (o el teorema de Bezout) [3, 9, 10].

3.3 Propiedad de paridad interlazada

Teorema 1: (Estabilización Fuerte) Una planta p es fuertemente estabilizable si y sólo si el número de polos de $p(s)$ entre cada par de ceros reales, incluyendo el infinito (∞), en $Re(s) \geq 0$ (es decir C_{+e}) es par.

La condición descrita por el Teorema 1 [3, 10, 11] ha sido llamada propiedad de paridad interlazada. La estabilización fuerte de una planta p puede determinarse ahora en términos de la Propiedad de Paridad Interlazada “PIP”. Este y otros teoremas relacionados con el concepto de estabilización fuerte y el PIP son ampliados para el caso de la región de estabilidad siendo un dominio acotado D en el semiplano izquierdo del plano s .

3.4 Parametrización de los compensadores D-estabilizantes

Se asume una planta dada $p \in R(s)$ y factorizada como:

$$p = \frac{n}{d}$$

con $n, d \in S_D$ y coprimos en S_D . También se propone que el compensador c puede factorizarse como:

$$c = \frac{\bar{x}}{\bar{d}}$$

donde $x, y \in S_D$ y son coprimos en S_D . Entonces, una solución particular de la Identidad de Bezout se obtiene así:

$$\bar{x}n + \bar{y}d = 1 \quad (3)$$

Bajo estas asunciones, el conjunto de todos los compensadores D -estabilizantes para la planta p puede expresarse de la siguiente manera:

$$S_D(p) = \left\{ c = \frac{\bar{x} + rd}{\bar{y} + rn} : r \in S_D, \bar{y} + rn \neq 0 \right\} \quad (4)$$

donde r es un parámetro “libre”, es decir, r puede

variar en todo el conjunto S_D . La expresión (4) es una extensión del resultado presentado como un teorema para un dominio acotado D en [3]. El conjunto S_D es un dominio Euclideo propio válido y cada $p \in R(s)$ puede factorizarse como una relación de dos funciones en S_D , n y d las cuales también son coprimos en S_D . Para el caso que el dominio de estabilidad D es acotado, estos dos hechos garantizan la validez de expresión (4) para el conjunto $S_D(p)$ de todos los compensadores D -estabilizantes para la planta p . Una prueba de esta presentación para un dominio no acotado D puede encontrarse en [3]. Esta prueba también es válida para el dominio D que ha sido acotado.

Teorema 2: (Estabilización Simultánea) Dadas las plantas SISO p_0, \dots, p_k , se define:

$$a_{oi} = y_0 d_i + x_0 n_i, \quad b_{oi} = d_0 n_i - d_i n_0$$

para $i = 1, \dots, k$. Entonces p_0, \dots, p_k , pueden ser simultáneamente estabilizadas sí y sólo sí existe un $m_0 \in S_{D_i}$ tal que:

$$a_{oi} + m_0 b_{oi}$$

sea una unidad para $i = 1, \dots, k$ [3, 9]

El Teorema 2 plantea que p_0, \dots, p_k pueden ser simultáneamente estabilizadas sí y sólo sí las plantas asociadas:

$$p_{oi} = b_{oi} / a_{oi}$$

para $i = 1, \dots, k$, son fuertemente estabilizables y pueden ser simultáneamente estabilizadas por un compensador estable. Podría entenderse que si existe más de una planta asociada (es decir más de dos plantas originales), la estabilización fuerte de cada una de las plantas asociadas es una condición necesaria, pero no suficiente, para la estabilización simultánea de las plantas originales [12, 13].

3.5 Extensión de la propiedad de paridad interlazada para dominios acotados

Una extensión de la propiedad de paridad interlazada ha sido desarrollada en [5] donde se considera el caso de un Dominio acotado D de estabilidad como se ilustra en la Figura 2. En este tipo de dominio, D^c representa el complemento de D y D_{+e}^c representa el complemento extendido de D .

Teorema 3: Sea D un dominio acotado de estabilidad

y D_{+e}^c el complemento extendido de D . Ahora suponemos a $p \in R(s)$ y que z_1, \dots, z_k son los ceros reales de p en D_{+e}^c . Si en cada uno de los intervalos $(z_i, z_{i+1}) \in D_{+e}^c$ con $i = 1, \dots, k$, hay un número par de polos reales p_i de $p(s)$, entonces allí existe un compensador $c(s)$ estable con respecto a D tal que el sistema de lazo-cerrado (p, c) es estable con respecto a D .

La propiedad descrita en el Teorema 3 es llamada la Extensión de la Propiedad de Paridad Interlazada "EPIP". Entonces se dice que una planta es D -fuertemente estabilizable si y sólo si cumple con el "EPIP", lo que es una condición necesaria y suficiente para la D -estabilización fuerte de una planta p . Una prueba de este Teorema se encuentra en Arteaga [5].

4. RESULTADOS TEORICOS

En esta sección se desarrollan los procedimientos para la solución de la estabilización simultánea de dos y tres modelos de plantas, donde las plantas dadas solamente pueden ser estabilizadas simultáneamente si el sistema final (planta auxiliar) puede ser estabilizado por un compensador estable, es decir, la planta auxiliar es fuertemente estabilizable.

4.1 D_i -estabilización simultánea de dos plantas con dominios acotados de estabilidad

Se asume dos modelos de plantas p_0 y p_1 con sus correspondientes dominios acotados de estabilidad D_0 y D_1 , además, se tiene que $D_0 \cap D_1 \neq \emptyset$, tal como se muestra en la Figura 3.

Los modelos dados se descomponen de la forma:

$$p_i = n_i / d_i$$

donde $n_i, d_i \in S_{D_i}$ y coprimas en S_{D_i} , $i = 1, 2$.

Además se tiene a $S_{D_i}(p_i)$ que denota el conjunto de todos los compensadores que D_i -estabilizan a p_i , se asume que allí existe una solución particular $\bar{c}_i \in S_{D_i}(p_i)$ para todo p_i , donde:

$$\bar{c}_i = x_i / y_i$$

será factorización coprima de \bar{c}_i en S_{D_i} .

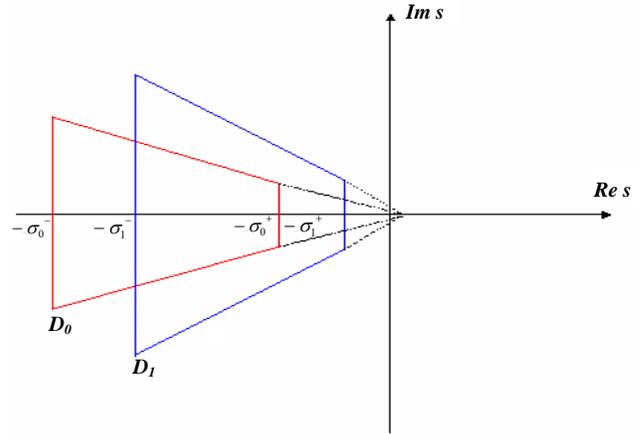


Figura 3. Dominios acotados de estabilidad D_0 y D_1 asociados con las plantas p_0 y p_1 .

La parametrización de todos los compensadores D_i -estabilizantes para p_i está dada por:

$$S_{D_i}(p_i) = \left\{ c_i = \frac{x_i + r_i d_i}{y_i + r_i n_i} : r_i \in S_{D_i}, \text{ con } y_i - r_i n_i \neq 0 \right\} \quad (5)$$

Igualando la parametrización de los controladores para p_0 y p_1 ($c_0 = c_1$) y resolviendo para r_1 en término de r_0 resulta que:

$$r_1 = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0 + r_0 (d_0 y_1 + n_0 x_1)}{y_0 d_1 + x_0 n_1 + r_0 (d_0 n_1 - d_1 n_0)} \quad (6)$$

con: $a_{01} = y_0 d_1 + x_0 n_1$ y $b_{01} = d_0 n_1 - d_1 n_0$

se reorganiza la ecuación (6) de la siguiente forma:

$$r_1 = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0 + r_0 (d_0 y_1 + n_0 x_1)}{a_{01} + r_0 b_{01}} \quad (7)$$

Si $r_1 \in S_{D_1}$, este r_1 hace que $c_1 \in S_{D_1}(p_1)$, y también hace que $c_1 = c_0 \in S_{D_0}(p_0)$ para el r_0 específico usado; por lo que $c_0 \in \{S_{D_0}(p_0) \cap S_{D_1}(p_1)\}$.

Ahora, $r_1 \in S_{D_1}$ sí y solo sí

$$a_{01} + r_0 b_{01} = u_{01} \in u(S_{D_1}) \quad (8)$$

donde: $a_{01} = y_0 d_1 + x_0 n_1$, $b_{01} = d_0 n_1 - d_1 n_0$

y a_{01} , $b_{01} \in S_{D1}$, y coprimos en S_{D1} . La expresión (8) representa el sistema asociado para las plantas p_0 y p_1 .

Corolario 1: Dado el sistema asociado $a_{01} + r_0 b_{01} = u_{01}$ donde $u_{01} \in u(S_{D1})$ y $a_{01}, b_{01} \in S_{D1}$, el compensador estabilizante para la planta asociada $p_{01} = b_{01} / a_{01}$ es r_0 .

Sí $p_{01} = b_{01} / a_{01}$ y es fuertemente D_1 -estabilizable, $r_0 \in S_{D1}$ puede encontrarse siempre que $u_{01} \in u(S_{D1})$. Ya que r_0 es un parámetro del conjunto $S_{D0}(p_0)$, r_0 además pertenece a S_{D0} . Sí se denota por \bar{r}_0 a el parámetro requerido que pertenece a S_{D0} , la existencia de \bar{r}_0 está sujeta a las condiciones presentadas en los siguientes Teoremas:

Teorema 4: Dado p_0 y p_1 como los modelos de plantas con sus respectivos dominios acotados de estabilidad D_0 y D_1 , y se tiene que $D_0 \cap D_1 \neq 0$, tal como se muestra en la Figura 3. Dado el modelo p_0 como $p_0 = n_0 / d_0$, donde $n_0, d_0 \in S_{D0}$ y coprimo en S_{D0} , y al modelo p_1 como $p_1 = n_1 / d_1$, donde $n_1, d_1 \in S_{D1}$ y coprimo en S_{D1} . Existe un $\bar{c}_0 = x_0 / y_0$, donde $x_0, y_0 \in S_{D0}$ y coprimo en S_{D0} , como una solución particular (que siempre puede ser encontrada) de:

$$x_0 n_0 + y_0 d_0 = u_0 \in u(S_{D0}) \quad (9)$$

dado $p_0 = b_{01} / a_{01}$ como el sistema asociado formado de p_0 y p_1 , donde:

$$a_{01} = y_0 d_1 + x_0 n_1 \quad y \quad b_{01} = d_0 n_1 - d_1 n_0$$

Decimos que p_{01} es fuertemente D_1 -estabilizable y que $r_0 \in S_{D1}$ estabiliza a p_{01} . Sí $\exists r_{01} \in S_{D1}$ tal que:

$$(1 - r_{01} b_{01}) \in u(S_{D1}) \quad (10)$$

$$\bar{r}_0 = \frac{r_0 + r_{01} a_{01}}{1 - r_{01} b_{01}} \in S_{D0} \quad (11)$$

entonces:

$$a_{01} + \bar{r}_0 b_{01} = \bar{u}_{01} \in u(S_{D1}) \quad (12)$$

Teorema 5: Asumiendo toda la notación del Teorema

4. Sí p_{01} es fuertemente D_1 -estabilizable y sí existe allí una solución particular $\bar{r}_0 \in S_{D0}$ tal que:

$$a_{01} + \bar{r}_0 b_{01} = \bar{u}_{01} \in u(S_{D1}) \quad (13)$$

entonces p_0 y p_1 son simultáneamente D_1 -estabilizables.

Entonces las condiciones para la D_1 -estabilización simultánea de p_0 y p_1 están dadas por las suposiciones hechas en la declaración del Teorema 5. Tales condiciones son:

p_{01} es fuertemente D_1 -estabilizable:

$$r_0 = \frac{u_{01} - a_{01}}{b_{01}} \in S_{D0}$$

Ahora que el caso de la estabilización simultánea para dos modelos de plantas ha sido analizado y discutido, el siguiente paso es considerar adicionar un modelo de planta más y estudiar el caso de la D_1 -estabilización simultánea de tres modelos de plantas con sus respectivos dominios acotados de estabilidad.

4.2 D_1 -estabilización simultánea de tres plantas con dominios acotados de estabilidad

Se asume que el modelo de planta dado para p_3 como $p_3 = n_3 / d_3$ y su dominio correspondiente D_3 , donde $n_3, d_3 \in S_{D3}$, y coprimo en S_{D3} . Los modelos de plantas p_0 y p_1 dados como en la sección 4.1, y los dominios relacionados por la condición $D_0 \subseteq (D_1 \cap D_2)$, tal como se muestra en la Figura 4. Igualando la parametrización de los controladores para p_0 y p_2 y resolviendo se tiene una solución para r_2 dada por:

$$r_2 = \frac{(x_0 y_2 - x_2 y_0) + r'_0 (y_2 d_0 + x_2 n_0)}{(y_0 d_2 + x_0 n_2) + r'_0 (d_0 n_2 - d_2 n_0)} \quad (14)$$

y el sistema asociado para las plantas p_0 y p_2 está definido por:

$$a_{012} + r'_0 b_{02} = u_{02} \quad (15)$$

donde $a_{02} = y_0 d_2 + x_0 n_2$, $b_{02} = d_0 n_2 - d_2 n_0$, y $a_{02}, b_{02} \in S_{D2}$ y coprimos en S_{D2} .

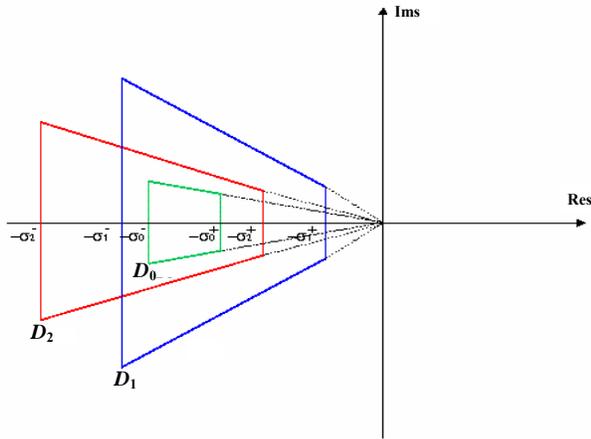


Figura 4. Dominios acotados de estabilidad D_0 , D_1 , y D_2 asociados con las plantas p_0 , p_1 y p_2 .

Corolario 2: Dado los sistemas asociados $a_{01} + r_0 b_{01} = u_{01}$ y $a_{02} + r_0' b_{02} = u_{02}$ donde $u_{01}, u_{02} \in u(S_{D1})$ y $u(S_{D2})$ respectivamente y $a_{01}, b_{01}, a_{02}, b_{02} \in S_{D1}$ y S_{D2} respectivamente, así como $r_0 \in S_{D1}$ y $r_0' \in S_{D2}$, los compensadores estabilizantes para las plantas asociadas $p_{01} = b_{01} / a_{01}$ y $p_{02} = b_{02} / a_{02}$ son r_0 y r_0' , respectivamente.

Si la planta auxiliar ó sistema asociado $p_e = b_e / a_e$ es fuertemente D_2 -estabilizable, $r_0' \in S_{D2}$ puede encontrarse siempre que $u_{02} \in u(S_{D2})$. Ya que r_0' es un parámetro para el conjunto $S_{D0}(p_0)$, r_0' también pertenece a S_{D0} . La existencia de una solución $r_0' \in S_{D0}$ está sujeta a las condiciones presentadas en el Teorema 4 (considerando a las plantas p_0 y p_2 en este Teorema). Así, las condiciones para la D_r -estabilización simultánea de p_0 y p_2 son:

Si p_{02} es fuertemente D_2 -estabilizable, y

$$r_0' = \frac{u_{02} - a_{02}}{b_{02}} \in S_{D0}$$

Si los parámetros r_0 y r_0' son iguales, las tres plantas pueden ser D_r -estabilizadas simultáneamente. Este parámetro común puede ser determinado (si existe) realizando un parametrización de todos los compensadores que estabilizan a las plantas asociadas p_{01} y p_{02} en los dominios D_1 y D_2 , respectivamente.

Teorema 6: Se denota a $S_{D1}(p_{01})$ como el conjunto de todos los compensadores que D_1 -estabilizan a p_{01} ,

$$S_{D1}(P_{01}) = \left\{ c_{01} = \frac{r_0 + r_{01} a_{01}}{1 - r_{01} b_{01}} : r_{01} \in S_{D1}, 1 - r_{01} b_{01} \neq 0 \right\} \quad (16)$$

y de manera similar para la planta asociada p_{02} , se denomina a $S_{D2}(p_{02})$ como el conjunto de todos los compensadores que D_2 -estabilizan a p_{02} ,

$$S_{D2}(P_{02}) = \left\{ c_{02} = \frac{r_0' + r_{02} a_{02}}{1 - r_{02} b_{02}} : r_{02} \in S_{D2}, 1 - r_{02} b_{02} \neq 0 \right\} \quad (17)$$

donde $r_{01} \in S_{D1}$ y $r_{02} \in S_{D2}$ son los parámetros libres en la parametrización. Estas parametrizaciones representan todos los compensadores estabilizantes para las plantas asociadas. La prueba del Teorema 6 se encuentra desarrollada en (Ammeen 1.994) [13].

El siguiente paso es igualar a las parametrizaciones de los controladores para p_{01} y p_{02} , y formar el próximo nivel del sistema, es decir, el sistema auxiliar (Aux1). Hay dos alternativas igualmente válidas para formar el sistema auxiliar (Aux1) para p_{01} y p_{02} . La primera de ellas es resolviendo para r_{02} en términos de r_{01} , y el sistema que se obtiene se llama sistema auxiliar (Aux1a). La segunda alternativa se hace resolviendo para r_{01} en términos de r_{02} sistema auxiliar (Aux1b),

Formación del sistema auxiliar (Aux1a)

Resolviendo para r_{02} en términos de r_{01} se tiene que:

$$r_{02} = \frac{(r_0 - r_0') + r_{01} (a_{01} + r_0' b_{01})}{(a_{02} + r_0' b_{02}) + r_{01} (a_{01} b_{02} - a_{02} b_{01})} \quad (18)$$

El parámetro $r_{02} \in S_{D2}$ sí y sólo sí:

$$a_{012} + r_{01} b_{012} = u_{012} \in u(S_{D2}) \quad (19)$$

donde $a_{012} = a_{02} + r_0' b_{02}$, $b_{012} = a_{01} b_{02} - a_{02} b_{01}$, y $a_{012}, b_{012} \in S_{D2}$ y coprimos en S_{D2} . La expresión (19) define al Sistema Auxiliar (Aux1a) para las plantas p_0, p_1 , y p_2 .

Si la planta auxiliar $p_{012} = b_{012} / a_{012}$ es fuertemente D_2 -estabilizable, entonces $r_{01} \in S_{D2}$ puede ser

encontrado si existe $u_{012} \in u(S_{D2})$. El parámetro r_{01} debe pertenecer a S_{D1} , ya que r_{01} es también un parámetro en el conjunto $S_{D1}(p_{01})$, y esto es posible debido a que $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$.

Esta solución r_{01} es usada en la parametrización de c_{01} , y este c_{01} debe ser D_0 -estable ($c_{01} \in S_{D0}$) ya que se usa en lugar de r_0 en la parametrización de c_0 :

$$c_0 = \frac{x_o + c_{01}d_0}{y_o - c_{01}n_0}, \quad c_{01} \in S_{D0} \quad (20)$$

donde

$$c_{01} = \frac{r_o + r_{01}a_{01}}{1 - r_{01}b_{01}}, \quad \in S_{D0} \quad (21)$$

Formación del Sistema Auxiliar (Aux1b)

Resolviendo para r_{01} en términos de r_{02} se tiene que:

$$r_{01} = \frac{(r_o' - r_o) + r_{02}(a_{02} + r_o b_{02})}{(a_{01} + r_o' b_{01}) + r_{02}(a_{02} b_{01} - a_{01} b_{02})} \quad (22)$$

Los parámetros de $r_{01} \in S_{D1}$ sí y sólo sí:

$$a_{021} + r_{02} b_{021} = u_{021} \in u(S_{D1}) \quad (23)$$

donde $a_{021} = a_{01} + r_o' b_{01}$, $b_{021} = a_{02} b_{01} - a_{01} b_{02}$, y $a_{021}, b_{021} \in S_{D1}$, y coprimos en S_{D1} . La expresión (22) define al Sistema Auxiliar (Aux1b) para las plantas p_0, p_1 , y p_2 . Si la planta auxiliar ó asociada $P_{021} = b_{021}/a_{021}$ es fuertemente D_1 -estabilizable, entonces $r_{02} \in S_{D1}$ puede encontrarse si se encuentra $u_{021} \in u(S_{D1})$. El parámetro r_{02} debe pertenecer a S_{D2} , ya que r_{02} también es un parámetro en el conjunto $S_{D2}(p_{02})$, y esto es posible porque $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$.

Este r_{02} es usado en la parametrización de c_{02} , y este c_{02} debe ser D_0 -estable ($c_{02} \in S_{D0}$) ya que es usado en lugar de r_0 en la parametrización de c_0 :

$$c_0 = \frac{x_o + c_{02}d_0}{y_o - c_{02}n_0}, \quad c_{02} \in S_{D0} \quad (24)$$

donde

$$c_{02} = \frac{r_o' + r_{02}a_{02}}{1 - r_{02}b_{02}}, \quad \in S_{D0} \quad (25)$$

En la Figura 5 se muestra un esquema de las tres plantas con la formación del sistema asociado y los sistemas auxiliares

Teorema 7: Asumiendo todas las notaciones del Teorema 4, y el Teorema 5 y las presentadas en esta sección.

SI

[p_{01} es fuertemente D_1 -estabilizable y $\exists \bar{r}_0 = c_{01} \in S_{D0}$ tal que $a_{01} + \bar{r}_0 b_{01} = \bar{u}_{01} \in u(S_{D1})$], Y

[p_{02} es fuertemente D_2 -estabilizable y $\exists \bar{r}_0' = c_{02} \in S_{D0}$ tal que $a_{01} + \bar{r}_0' b_{02} = \bar{u}_{02} \in u(S_{D2})$], Y

{ [p_{012} es fuertemente D_2 -estabilizable y $\exists r_{01} \in S_{D1}$ tal que

$a_{012} + r_{01} b_{012} = u_{012} \in u(S_{D2})$ Y $c_{01} = \frac{r_o' + r_{01} a_{01}}{1 - r_{01} b_{01}}, \in S_{D0}$], ó

[p_{021} es fuertemente D_1 -estabilizable y $\exists r_{02} \in S_{D2}$ tal que $a_{021} + r_{02} b_{021} = u_{021} \in u(S_{D1})$] Y

$$c_{02} = \frac{r_o' + r_{02} a_{02}}{1 - r_{02} b_{02}}, \quad \in S_{D0} \quad] \}$$

Entonces

p_0, p_1 , y p_2 son simultáneamente D_i -Estabilizables. La prueba de este Teorema sigue de la explicación dada acerca del caso de tres plantas con sus respectivos dominios acotados de estabilidad [5-7].

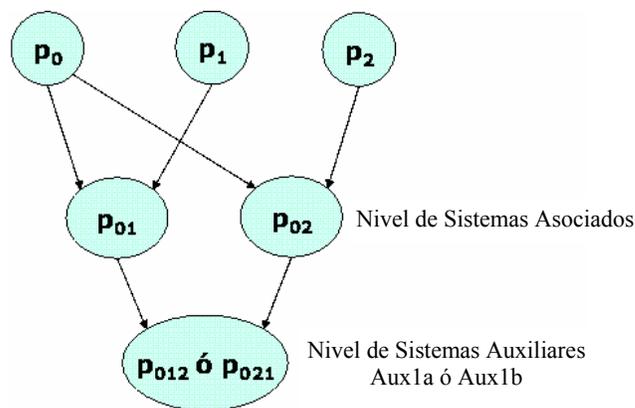


Figura 5. Sistemas asociados y auxiliares para las plantas p_0, p_1 y p_2 .

4.3 Desarrollo de algoritmos

4.3.1 Procedimiento para dos modelos de plantas

Se Asumime que los modelos de plantas p_0 y p_1

son dados y son factorizados como relaciones de funciones de transferencias coprimas. Las plantas pueden estar relacionadas de alguna manera, por ejemplo, ellas pueden ser linealizaciones de una ecuación no lineal en varios puntos de operación; ó puede que no exista relación alguna entre ellas. Las plantas dadas pueden ser ó no fuertemente estabilizables, ya que un compensador estabilizable para cada una de ellas puede ser encontrado siempre, además se asume que cada planta es estabilizada por su correspondiente compensador particular c_0 y c_1 . El objetivo de este procedimiento es determinar y diseñar, siempre que sea posible, la existencia de un compensador sencillo que estabilice a todas las plantas simultáneamente. Los pasos para el procedimiento son los siguientes :

Paso 1. Formar el Sistema Asociado $a_{01} + r_0 b_{01} = u_{01}$ por la parametrización de la solución particular c_0 tal como indica el Teorema 2.

Paso 2. Verificar la D_1 -estabilización fuerte para la planta asociada $p_{01} = b_{01} / a_{01}$ usando los resultados del Teorema 1 y el Teorema 3. Si la planta es fuertemente D_1 -estabilizable, entonces determinar a $r_0 \in S_{D1}$, tal que, $u_{01} \in u(S_{D1})$. Note que si la planta asociada es fuertemente D_1 -estabilizable, se garantiza la existencia de un $r_0 \in S_{D1}$ tal que $u_{01} \in u(S_{D1})$. Si la planta p_{01} no es fuertemente D_1 -estabilizable, entonces se deben obtener otros compensadores particulares c_0 y c_1 correspondiente a cada modelo original.

Paso 3. Con el r_0 calculado, siendo éste el compensador estabilizante para el sistema asociado p_{01} (del Corolario 1), determinar el compensador común c_{ss} que D_T -estabiliza simultáneamente a las plantas p_0 y p_1 , de acuerdo a la expresión del conjunto de todos los compensadores D_T -estabilizantes.

Paso 4. Realizar el lazo-cerrado entre el compensador común obtenido en el paso anterior con cada uno de los modelos de las plantas y comprobar la D_T -estabilización simultánea de ellas. Si c_{ss} no D_i -estabiliza simultáneamente a las plantas p_0 y p_1 , volver al Paso 2.

4.3.2 Procedimiento para tres modelos de plantas

El objetivo de este procedimiento es determinar y diseñar, siempre que sea posible, la existencia de un compensador sencillo que estabilice a todas las plantas simultáneamente. Los pasos para el procedimiento son los siguientes:

Paso 1. Formar los sistemas Asociados $a_{01} + r_0 b_{01} = u_{01}$

y $a_{02} + r_0' b_{02} = u_{02}$ por la parametrización de la soluciones particulares \bar{c}_i , con $i = 0, 1, 2$ tal como indica el Teorema 2.

Paso 2. Verificar la D_T -Estabilización fuerte ($i = 1, 2$) para cada una de las plantas asociadas $p_{01} = b_{01} / a_{01}$ y $p_{02} = b_{02} / a_{02}$ usando los resultados del Teorema 1 y el Teorema 3. Si las plantas asociadas son fuertemente D_T -estabilizable, entonces determinar a $r_0 \in S_{D1}$ y a $r_0' \in S_{D2}$, tal que, $u_{01} \in u(S_{D1})$ y $u_{02} \in u(S_{D2})$. Note que si las plantas asociadas son fuertemente D_i -estabilizables, se garantiza la existencia de un $r_0 \in S_{D1}$ tal que $u_{01} \in u(S_{D1})$ y un $r_0' \in S_{D2}$ tal que $u_{02} \in u(S_{D2})$.

Paso 3. Con r_0 y r_0' calculados anteriormente, siendo estos los compensadores estabilizantes para los sistemas asociados p_{01} y p_{02} (del Corolario 2), determinar los compensadores D_T -estabilizantes para las plantas tal como se enuncia en el Teorema 6, y formar el nivel de Sistemas Asociados Aux1 con cualquiera de las alternativas (Aux1a ó Aux1b) de acuerdo a las expresiones (18) ó (22).

Paso 4a. Verificar la estabilización fuerte de la planta $p_{012} = b_{012} / a_{012}$ (ó $p_{021} = b_{021} / a_{021}$) del nivel auxiliar Aux1. Si la planta p_{012} es fuertemente D_2 -estabilizable, entonces determine r_{01} que pertenece a S_{D2} tal que $u_{012} \in u(S_{D2})$.

Paso 4b. Determinar si el $r_{01} \in S_{D2}$ obtenido en el Paso 4a produce un compensador $c_{01} \in S_{D0}$. Si se logra, continuar con el Paso 5. Si no, regrese al Paso 4a.

Paso 5. Determinar el compensador estable c_{01} que estabiliza simultáneamente a las plantas asociadas p_{01} y p_{02} sustituyendo r_{01} en la expresión dada en el Teorema 6.

Paso 6. Reemplazar r_0' con c_{01} como el parámetro libre en la parametrización del compensador estabilizante para la planta p_0 . Este es el compensador que D_T -estabiliza simultáneamente a las plantas p_0, p_1 y p_2 .

Paso 7. Realizar el lazo-cerrado entre el compensador común obtenido en el paso anterior con cada uno de los modelos de las plantas y comprobar la D_T -estabilización simultánea de ellas.

4.4 Descripción del Software

Esta sección expone la realización del software para el diseño de controladores basados en estabilización simultánea con múltiples dominios acotados de estabilidad, aprovechando los recursos ofrecidos por el lenguaje de computación MATLAB para la elaboración de una interfaz gráfica amigable para el usuario [14].

El SSMBDC fue creado pensando en el diseñador. La presentación y la disposición de las pantallas hacen del SSMBDC. un programa fácil de usar, debido a que presenta un sistema de navegación amigable e intuitiva, ofreciendo un formato estructurado para el diseño de controladores basados en estabilización simultánea con múltiples dominios acotados de estabilidad. La ventana ó pantalla principal del SSMBDC. presenta un botón único para el inicio del programa, además se tiene una barra de opciones de menú en donde se pueden acceder a los diversos archivos constitutivos del software, así como una ayuda del mismo en un formato pdf en donde el usuario obtiene información detallada referente al software diseñado, como también los fundamentos teóricos utilizados para el diseño del mismo.

5.1 Estabilización simultánea de dos modelos de plantas P_0 y P_1 de 1^{er} orden sin retardo.

En esta sección se presenta la solución de la Estabilización Simultánea de dos modelos de plantas p_0 y p_1 sin tiempo de retardo y sus correspondientes dominios de estabilidad se muestran en la Figura 6.

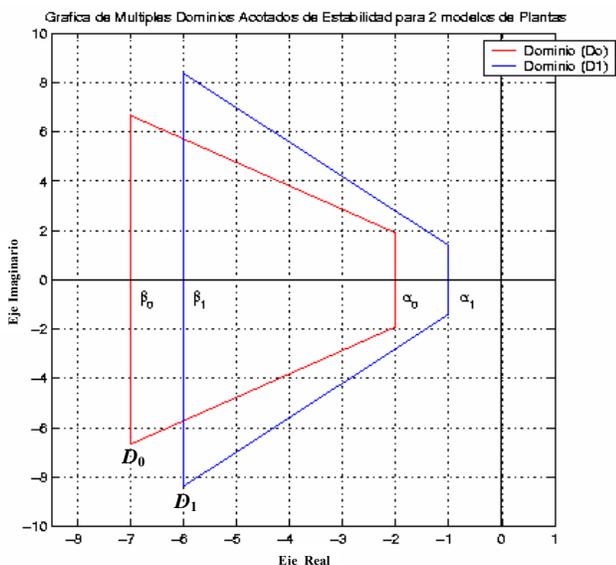


Figura 6. Dominios acotados de estabilidad D_0 y D_1 para dos plantas P_0 y P_1 de 1^{er} orden sin retardo.

Dadas las plantas p_0 y p_1 de la siguiente forma:

$$p_0 = \frac{k_0}{s + a_0} \quad \text{y} \quad p_1 = \frac{k_1}{s + a_1} \quad (26)$$

donde $k_0 = 5$, $a_0 = 2$, $k_1 = 10$ y $a_1 = -6$. Los correspondientes dominios D_0 y D_1 están definidos como:

$$D_0 = \{s : -7 < \text{Re}(s) < -2, | \text{Im}(s) | \leq 0.952 | \text{Re}(s) | \} \quad (27)$$

$$D_1 = \{s : -6 < \text{Re}(s) < -1, | \text{Im}(s) | \leq 1.395 | \text{Re}(s) | \} \quad (28)$$

donde los valores reales dados por σ_i^- y σ_i^+ (con $i = 0$ y 1) quedan establecidos por el rango de valores de Tiempos de Establecimientos (T_s) especificados según el criterio del 2%, y la pendiente de la recta es representada por la tangente del ángulo que determina el arco seno del Factor de Amortiguamiento (ζ) con el eje real del semi-plano izquierdo.

La factorización coprime para las plantas p_0 en D_0 y p_1 en D_1 están dadas por:

$$p_0 = \frac{k_0}{(s + \gamma_0)} = \frac{5}{(s + 2)} = \frac{N_{n0}}{D_{d0}} = \frac{n_0}{d_0} \quad (29)$$

$$p_1 = \frac{k_1}{(s + \gamma_1)} = \frac{10}{(s - 6)} = \frac{N_{n1}}{D_{d1}} = \frac{n_1}{d_1} \quad (30)$$

donde $n_0, d_0 \in S_{D0}$ y son coprimos en S_{D0} , $n_1, d_1 \in S_{D1}$ y son coprimos en S_{D1} , $\gamma_0 = 4 \in D_{01}$ (o región intersección entre D_0 y D_1), $\gamma_1 = 3 \in D_1$.

Estabilización de la planta p_0 en D_0

Una solución particular \bar{c}_0 que estabilice a la planta p_0 en S_{D0} se puede expresar como un compensador proporcional puro dado por:

$$\bar{c}_0 = \frac{N_{x0}}{N_{y0}} = \frac{D_{x0}}{D_{y0}} = \frac{x_0}{y_0} = k_c \quad (31)$$

donde x_0 y $y_0 \in S_{D0}$ y son coprimos en D_0 , $D_{x0} = D_{y0} = 1$, $N_{x0} = x_0 = k_c \in R$, y $N_{y0} = y_0 = 1$. Para esta solución particular \bar{c}_0 , la identidad de Bezout está dada por:

$$x_0 n_0 + y_0 d_0 = u_0 \in u(S_{D0}) \quad (32)$$

sustituyendo los términos respectivos se tiene que:

$$k_c \frac{k_0}{(s + \gamma_0)} + 1 \frac{(s + a_0)}{(s + \gamma_0)} = u_0 = \frac{N_{u0}}{D_{u0}}$$

Para ubicar los polos de lazo cerrado en $s = -\gamma_0 = -4$, tenemos que $u_0 = 1$, por lo que el compensador se obtiene de la siguiente manera:

$$\bar{c}_0 = k_c = \frac{\gamma_0 - a_0}{k_0} = 4 \quad (33)$$

La ecuación característica del par (p_0, \bar{c}_0) . Esta dada por:

$$\Delta CL_0 = (s + 4) \quad (34)$$

Formación y solución del sistema asociado para las plantas p_0 y p_1

La planta asociada p_{01} está dada por la siguiente expresión:

$$p_{01} = \frac{b_{01}}{a_{01}} = \frac{d_0 n_1 - d_1 n_0}{y_0 d_1 + x_0 n_1} \quad (35)$$

donde las expresiones para a_{01} y b_{01} se calculan a partir de las factorizaciones coprime de las plantas p_0 y p_1 y con \bar{c}_0 .

Cálculo de a_{01}

$$a_{01} = y_0 d_1 + x_0 n_1 = \frac{s + (a_1 + k_c k_1)}{(s + \gamma_1)} \frac{(s + \gamma_0)}{(s + \gamma_0)} \quad (36)$$

Cálculo de b_{01}

$$b_{01} = d_0 n_1 - d_1 n_0 = \frac{s(k_1 - k_0) + (a_0 k_1 - a_1 k_0)}{(s + \gamma_0)(s + \gamma_1)} \quad (37)$$

Sustituyendo los valores dados de $a_0, k_0, a_1, k_1, k_c, \gamma_0$, y γ_1 en las ecuaciones obtenidas (36) y (37), queda:

$$a_{01} = \frac{s^2 + 2s - 8}{s^2 + 7s + 12} = \frac{N_{a01}}{D_{a01}} \quad (38)$$

$$b_{01} = \frac{5s + 50}{s^2 + 7s + 12} = \frac{N_{b01}}{D_{b01}} \quad (39)$$

Entonces la expresión para la planta asociada resulta:

$$p_{01} = \frac{b_{01}}{a_{01}} = \frac{s(k_1 - k_0) + (a_0 k_1 - a_1 k_0)}{(s + \gamma_0)(s + (a_1 + k_c k_1))} \quad (40)$$

y sustituyendo los valores correspondientes a cada variable:

$$p_{01} = \frac{5s + 50}{s^2 + 2s - 8} = \frac{m_1 s + m_0}{s^2 + q_1 s + q_0} = \frac{N_{b01}}{N_{a01}} \quad (41)$$

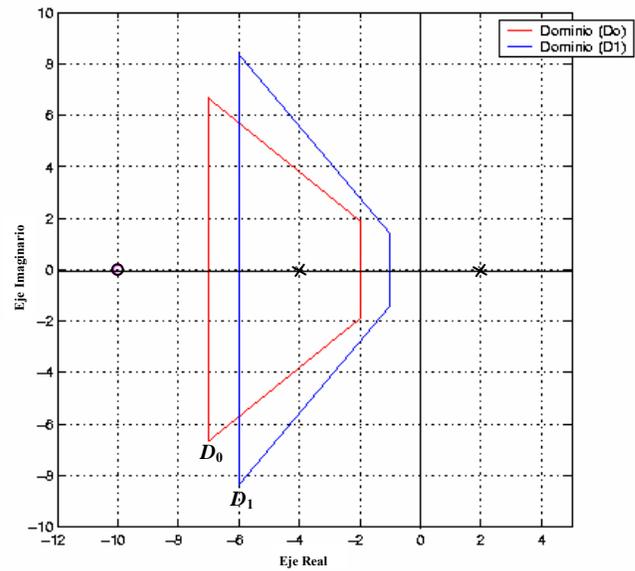


Figura 7. Ubicación de los polos y ceros de lazo-abierto de la planta p_{01} .

En la Figura 7 se observa que la planta asociada p_{01} dada por (41) es fuertemente estabilizable en D_1 , ya que no existen polos en el intervalo descrito por los ceros $s = -10$ y $s = \infty$. Si $a_{01} = N_{a01} / D_{a01}$, $b_{01} = N_{b01} / D_{b01}$, $r_0 = N_{r0} / D_{r0}$, y $u_{01} = N_{u01} / D_{u01}$, son las factorizaciones coprime de a_{01}, b_{01}, r_0 y u_{01} en sus dominios correspondientes, y $N_{a01}, D_{a01}, N_{b01}, D_{b01}, N_{r0}, D_{r0}, N_{u01}, D_{u01} \in R[s]$, entonces el Sistema Asociado se escribe como sigue:

$$a_{01} + r_0 b_{01} = u_{01} \in u(S_{D1}) \quad (42)$$

Sustituyendo las expresiones correspondientes:

$$\frac{N_{a01}}{D_{a01}} + \frac{N_{r0}}{D_{r0}} \frac{N_{b01}}{D_{b01}} = \frac{D_{r0} N_{a01} + N_{r0} N_{b01}}{D_{a01} D_{r0}} = \frac{N_{u01}}{D_{u01}} \quad (43)$$

donde $D_{a01} = D_{b01} = D_{x0} D_{n1} = (s + \gamma_0)(s + \gamma_1)$ y $D_{a01} D_{r0} = D_{u01}$.

Consideración del orden de r_0

Se considera r_0 de segundo orden y bipropio. Con este r_0 los polos de lazo cerrado del par (p_{01}, r_0) pueden ser arbitrariamente ubicados en D_1 , y además tenemos un grado de libertad. Por lo tanto, $r_0 = c_{01}$ se expresa de la siguiente forma:

$$r_0 = c_{01} = \frac{N_{r0}}{D_{r0}} = \frac{c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{s^2 + d_1 s + d_0} = \frac{N_{nc01}}{D_{dc01}} \quad (44)$$

Para la solución de (43) se requiere que u_{01} sea una unidad en S_{D1} , es decir, $u_{01} \in u(S_{D1})$. Entonces, la unidad u_{01} se expresa como:

$$u_{01} = \frac{N_{u01}}{D_{u01}} = \frac{\prod_{i=1}^4 (s + 4)}{D_{a01} D_{r0}} \quad (45)$$

$$= \frac{(s + \alpha_{u1})(s + \alpha_{u2})(s + \alpha_{u3})(s + \alpha_{u4})}{(s + 4)(s + 3)(s^2 + d_1 s + d_0)}$$

donde $s = -\alpha_{ui} \in D_1, i = 1, \dots, 4$ para lograr que la planta p_{01} sea fuertemente estabilizable en D_1 . De la ecuación (42) igualamos los coeficientes y se sustituyen los términos correspondientes para obtener:

$$\prod_{i=1}^4 (s + \alpha_{ui}) = (s^2 + d_1 s + d_0)(s^2 + q_1 s + q_0) + (c_2 s^2 + c_1 s + c_0)(m_1 s + m_0) \quad (46)$$

donde los coeficientes $q'_i s$ de N_{a01} , y $m'_i s$ de N_{b01} son valores conocidos de la ecuación (42), es decir: $q_1 = 2, q_0 = -8, m_1 = 5$ y $m_0 = 50$.

Todos los $s = -\alpha_{ui} \in D_1$ y $-\alpha_{ui} \in R, i = 1, \dots, 4$. La expansión de $N_{u01} = \prod_{i=1}^4 (s + \alpha_{ui})$ se escribe usando la siguiente notación:

$$f_1 = \alpha_{u1} + \alpha_{u2} \quad (47)$$

$$f_0 = \alpha_{u1} \alpha_{u2} \quad (48)$$

y además

$$g_1 = \alpha_{u3} + \alpha_{u4} \quad (49)$$

$$g_0 = \alpha_{u3} \alpha_{u4} \quad (50)$$

Los coeficientes del producto $N_{u01} = \prod_{i=1}^4 (s + \alpha_{ui})$ se denotan como $z'_i s$, y estos coeficientes están definidos en base a los coeficientes intermedios $f'_i s$ y $g'_i s$ calculados en las expresiones (47) a la (50). Entonces, la expresión para N_{u01} se convierte en:

$$N_{u01} = \prod_{i=1}^4 (s + \alpha_{ui}) = \sum_{j=0}^4 z_j s^j = z_4 s^4 + z_3 s^3 + z_2 s^2 + z_1 s + z_0 \quad (51)$$

donde $z_4 = 1$ y los coeficientes $z'_i s, i = 0, \dots, 3$ quedan definidos como:

$$z_4 = 1 \quad (52)$$

$$z_3 = f_1 + g_1 \quad (53)$$

$$z_2 = f_0 + g_0 + f_1 g_1 \quad (54)$$

$$z_1 = f_1 g_0 + f_0 g_1 \quad (55)$$

$$z_0 = f_0 g_0 \quad (56)$$

igualando los coeficientes queda el siguientes sistema de ecuaciones lineales:

$$q_1 + d_1 + c_2 m_1 = z_3 \quad (57)$$

$$q_0 + d_0 + d_1 q_1 + c_2 m_0 + c_1 m_1 = z_2 \quad (58)$$

$$d_1 q_0 + d_0 q_1 + c_0 m_1 + c_1 m_0 = z_1 \quad (59)$$

$$d_0 q_0 + c_0 m_0 = z_0 \quad (60)$$

De este sistema se obtiene 4 ecuaciones (57) a la (60) con 5 incógnitas, $c_2, c_1,$ y c_0 del numerador de r_0 , y d_1 y d_0 del denominador de r_0 . Como existe un grado de libertad, el valor de una de estas variables será asignado arbitrariamente debido a la escogencia de dos ceros en r_0 . Para este sistema de ecuaciones la variable seleccionada es $d_0 = 15$. El sistema de ecuaciones queda expresado en forma matricial como sigue:

$$A \begin{bmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_0 \\ d_1 \end{bmatrix} = W \quad (61)$$

Donde la matriz A y el vector columna W están definidos como:

$$A = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 1 \\ m_0 & m_1 & 0 & q_1 \\ 0 & m_0 & m_1 & q_0 \\ 0 & 0 & m_0 & 0 \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$W = \begin{bmatrix} z_3 - q_1 \\ z_2 - q_0 - d_0 \\ z_1 - d_0 q_1 \\ z_0 - d_0 q_0 \end{bmatrix} \quad (63)$$

El sistema es resuelto a continuación:

$$\begin{bmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_0 \\ d_1 \end{bmatrix} = A^{-1}W \quad (64)$$

Los valores α_{ui} utilizados en la resolución de (64), fueron los siguientes: $\alpha_{u1} = 1.3$, $\alpha_{u2} = 1.8$, $\alpha_{u3} = 2.2$ y $\alpha_{u4} = 3.0$ por lo tanto, el compensador

$$c_{01} = r_0 = \frac{N_{r0}}{D_{r0}} \quad (65)$$

resulta:

$$c_{01} = r_0 = \frac{N_{r0}}{D_{r0}} = \frac{0.004s^2 + 0.756s + 2.709}{s^2 + 6.09s + 15} \quad (66)$$

Se observa en la Figura 8 que los polos de $c_{01} = r_0 \in S_{D0}$ se encuentran ubicados en $D_0 \cap D_1$. Por lo tanto podemos afirmar que este compensador $c_{01} = r_0$ D_1 -estabiliza a la planta asociada p_{01} , es decir, p_{01} es fuertemente estabilizable en D_1 .

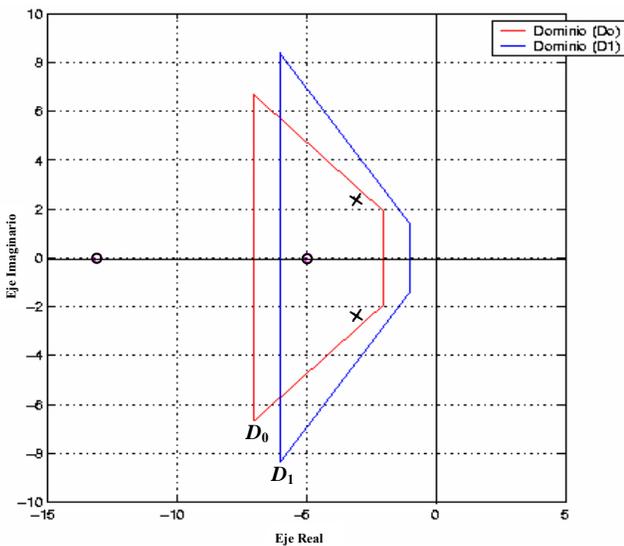


Figura 8. Ubicación de los polos y ceros del compensador c_{01} .

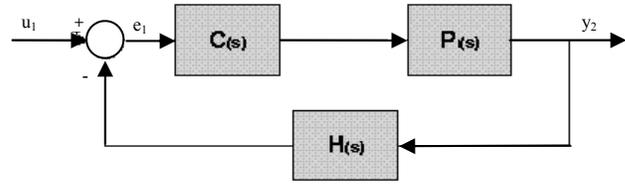


Figura 9. Sistema de realimentación con sensibilidad unitaria.

6. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Polos de lazo cerrado del par (p_0, c_0)

Partiendo de un sistema de realimentación en donde intervienen las funciones de transferencias del compensador común $c(s)$, del modelo de la planta $P_i(s)$ y función de transferencia unitaria de sensibilidad $H(s)$ tal como se muestra en la Figura 9 se obtienen los polos de lazo cerrado del sistema. El compensador común, $c = c_0 = c_1$ que D_r -estabiliza simultáneamente a p_0 y p_1 se obtiene utilizando el parámetro r_0 de la ecuación (72) en la expresión del conjunto de compensadores D_r -estabilizantes. El resultado de este compensador está dado por:

$$c = c_0 = c_1 = \frac{x_0 + r_0 d_0}{y_0 - r_0 n_0} = \frac{x_1 + r_1 d_1}{y_1 - r_1 n_1} \quad (67)$$

$$c = \frac{(0.444)s^3 + (4.876)s^2 + (19.97)s + (29.49)}{s^3 + (9.88)s^2 + (35.58)s + (46.46)} \quad (68)$$

Los polos de lazo cerrado del par (p_0, c) son calculados y sus valores son:

$$s_1 = -4.00 \quad (69)$$

$$s_2 = -4.00 \quad (70)$$

$$s_3 = -3.045 + j2.393 \quad (71)$$

$$s_4 = -3.045 - j2.393 \quad (72)$$

Se denota $\overline{\Delta CL}_0$ como la ecuación característica de los polos de lazo cerrado del par (p_0, c_0) . Entonces $\overline{\Delta CL}_0$ puede ser expresada como:

$$\overline{\Delta CL}_0 = (s + 4)(s + 4)(s^2 + 6.09s + 15) \quad (73)$$

$$\overline{\Delta CL}_0 = \Delta CL_0 D_{n0} D_{r0} \quad (74)$$

donde $\Delta CL_0 = (s + 4)$ es la ecuación característica de la solución particular \bar{c}_0 de la planta p_0 , $D_{n0} = (s + 4)$ es el factor usado en la factorización coprima de p_0 , y

el polinomio de segundo grado D_{r0} es el denominador de $c_{01} = r_0$. La expresión (70) nos muestra la relación entre ΔCL_0 y ΔCL_1 (solución con \bar{c}_0), demostrada teóricamente por Beale [15].

En resumen, el compensador $c = c_0 D_0$ estabiliza a la planta p_0 y a continuación se muestra en la Figura 10 que representa las respuesta en el tiempo ante una entrada de escalón unitario de las raíces del par (p_0, c) .

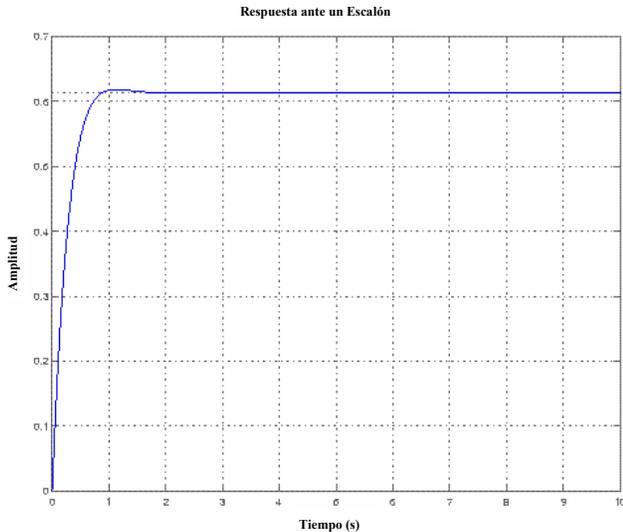


Figura 10. Respuesta temporal ante una entrada de escalón unitario del par (p_0, c) .

Polos de lazo cerrado del par (p_1, c_1)

De igual manera para la obtención de los polos de lazo cerrado se parte del sistema realimentado de la Figura 8. Los polos de lazo cerrado del par (p_1, c_1) se obtienen utilizando el mismo compensador común calculado en (67), es decir que dichos polos se pueden obtener con el par (p_1, c_0) , y sus valores son:

$$s_1 = -1.3 \in D_1, \notin D_0 \quad (75)$$

$$s_2 = -1.8 \in D_1, \notin D_0 \quad (76)$$

$$s_3 = -2.2 \in D_1, \in D_0 \quad (77)$$

$$s_4 = -3.0 \in D_1, \in D_0 \quad (78)$$

La ecuación característica resultante del par $(p_1, c_1) = (p_1, c_0)$ puede ser expresada como:

$$\Delta CL_1 = (s^4 + 8.3s^3 + 25.06s^2 + 32.63s + 15.44) \quad (79)$$

Es decir, los polos del par (p_1, c_1) son los mismos del par (p_{01}, c_{01}) . Recordando que estos polos fueron escogidos arbitrariamente para la solución de la ecuación (64), por lo que:

$$\Delta CL_1 = \Delta CL_{10} \quad (80)$$

En resumen, el compensador $c=c_1 D_1$ -Estabiliza a la planta p_1 y a continuación se muestran la Figuras 13 que representan las respuesta en el tiempo ante una entrada de escalón unitario del par (p_1, c) .

En definitiva se concluye que el compensador bipropio $c = c_0 = c_1$ dado por (67) estabiliza simultáneamente a p_0 en D_0 y a p_1 en D_1 ya que ubica a los polos de lazo-cerrado para cada modelo de planta en sus correspondientes dominios, tal como se muestran las Figuras 12 y 13.

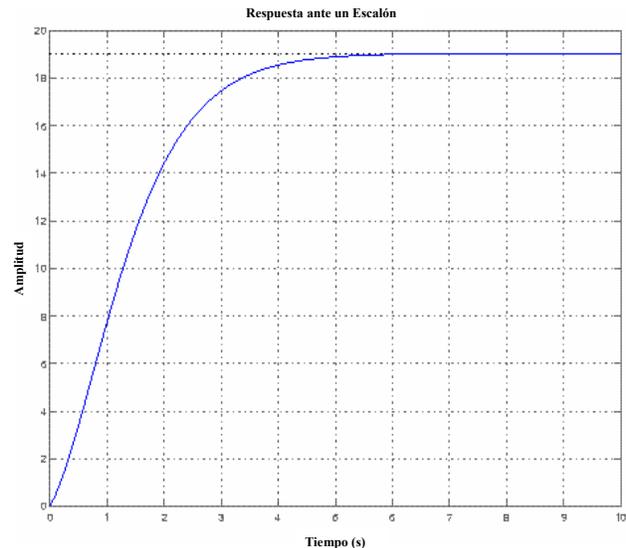


Figura 11. Respuesta temporal ante una entrada de escalón unitario del par (p_1, c) .

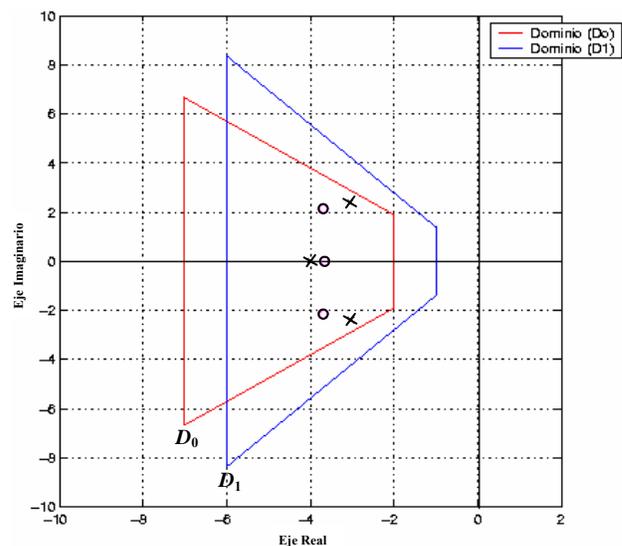


Figura 12. Ubicación de los polos y ceros de lazo-cerrado del par (p_0, c) .

Para la selección de los Factores Coprimos γ_0 y γ_1 es necesario hacer un análisis de la expresión (42).

Como los valores a_{01} y b_{01}

$$a_{01} = \frac{s + (a_1 + k_c k_1)}{(s + \gamma_1)} \frac{(s + \gamma_0)}{(s + \gamma_0)}$$

$$b_{01} = \frac{s(k_1 - k_0) + (a_0 k_1 - a_1 k_0)}{(s + \gamma_0)(s + \gamma_1)}$$

pertenecen a S_{D1} y son Coprimos en S_{D1} , se deduce que γ_0 también debe pertenecer a D_1 , es decir, pertenece a la región común D_{01} . Para la selección de γ_1 no se presenta mayor restricción, sino aquella en que solo basta que pertenezca a D_1 .

El compensador c_{01} , bipropio y de segundo orden dado por (65) proporciona cuatro ecuaciones lineales con cinco incógnitas, obteniéndose un grado de libertad necesario y suficiente para lograr la ubicación arbitraria de los polos de lazo cerrado del par (p_{01}, c_{01})

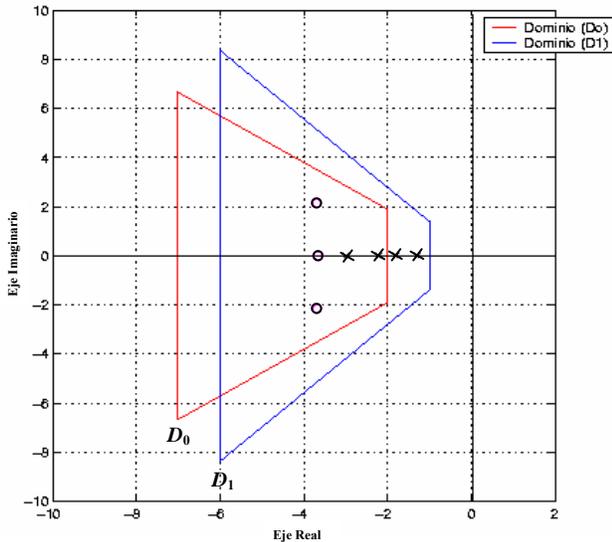


Figura 13. Ubicación de los polos y ceros de lazo-cerrado del par (p_1, c) .

7. CONCLUSIONES

En este trabajo se han presentado algoritmos para el diseño y simulación de compensadores basados en estabilización simultánea con múltiples dominios acotados de estabilidad. Aspectos teóricos y prácticos de la parametrización de compensadores D_i -

estabilizantes y de las condiciones que deben satisfacerse para la estabilización simultánea de dos y tres modelos de plantas han sido mostrados. Estas condiciones están expresadas en términos de la estabilización fuerte de sistemas asociados y auxiliares, y en requerimientos de interpolación para dos y tres plantas. Se establece también la relación existente entre la ecuación característica de lazo cerrado y la ecuación característica de la solución particular para cada modelo de planta. En base a los resultados obtenidos, puede concluirse que los procedimientos desarrollados permiten la obtención del compensador estabilizante de dos y tres modelos de plantas lineales de primer orden, cumpliendo con los criterios de diseño del sistema en forma satisfactoria. Los algoritmos fueron desarrollados y programados en Matlab y permiten al usuario diseñar sistemas de control, en forma interactiva con el computador, aplicando la teoría de la estabilización simultánea para el caso de regiones acotadas de estabilidad. Estos algoritmos pueden ser también extendidos para el caso de cuatro o más modelos de planta, y para el caso de sistemas de segundo orden.

AGRADECIMIENTOS

Los autores expresan su reconocimiento al Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico de la Universidad de Carabobo CDCD-UC por el financiamiento otorgado al proyecto de investigación N° 97-016.

REFERENCIAS

- [1] Peter Dorato. Robust Control. IEEE Press, New York, 1987.
- [2] Vincent Blondel. Simultaneous Stabilization of Linear System, Lecture Notes in Control and Information Sciences, volume 191. Spriger-Verlag, Berlin, 1994.
- [3] M. Vidyasagar. Control System Synthesis: A Factorization Approach. MIT Press, 1985.
- [4] K. D. Minto. Towards simultaneous performance: Application of simultaneous stabilization techniques to helicopter engine control. Proceed. American Control Conference, 2:852–859, 1988.

- [5] Arteaga Bravo. Francisco J. Simultaneous Stabilization with Multiple Bounded Stability Domains. Phd dissertation, George Mason University, Fairfax, Virginia, USA, February 1995.
- [6] F. J. Arteaga and G. O. Beale. Simultaneous stabilization with multiple bounded stability domains in chemical process control. In Proceedings of IECON'95-21 Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society in Technical Co-Sponsorship with Society of Instrument and Control Engineers of Japan (SICE), Orlando, Florida, November 6-10 1995.
- [7] G. O. Beale and F. J. Arteaga. Simultaneous stabilization with multiple bounded stability domains. (KoREMA) *Automatika*, 37 (1996)(3-4):91–98, May 1997.
- [8] M. Vidyasagar. Some results on simultaneous stabilizations with multiple domains of stability. *Automatika*, 23(4):535–540, 1987.
- [9] M. Vidyasagar and N. Viswanadham. Algebraic design techniques for reliable stabilization. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-27:1085–1095, 1982.
- [10] A. R. Tannenbaum J. C. Doyle, B. A. Francis. *Feedback Control Theory*. Macmillan, New York, 1992.
- [11] Jr. D. C. Youla, J. J. Bongiorno and C. N. Lu. Single-loop feedback stabilization of linear multivariable dynamical plants. *Automatika*, 10:159–173, 1974.
- [12] A. Debowsky and A. Kurylowicz. Simultaneous stabilization of linear single-input/single-output plants. *International Journal of Control*, 44 (5):1257–1264, 1986.
- [13] E. Ammeen. A New Simultaneous Stabilization Approach Using an Iterative Combining of System Models for the Design of Robust Control Algorithms. Phd dissertation, George Mason University, Fairfax, VA, November 1994.
- [14] Vizcaya Mayra y Contra maestre Marco. Desarrollo de Software para el diseño de controladores basados en Estabilización Simultánea con múltiples dominios acotados de estabilidad en MATLAB-Simulink. Valencia, Venezuela, Octubre 2003.
- [15] Guy O. Beale. *Special Topics in Robust Control: Simultaneous Stabilization*, Lecture Notes. George Mason University, Fairfax, Virginia, September 1993.