Año 4, Vol. II, N° 7
ISSN: 1856-8327

Cadenas de Markov Aplicadas a la Evolución de los Usuarios Potenciales de Energía Fotovoltaica

Markov Chains Applied to Development of Photovoltaic EnergyPotential Users

Armando Uranga, Ramón Luévanos, Facundo Cortés, Claudia Ávila, Juan González

Palabras Clave: Procesos de Markov, energía renovable, energía fotovoltaica, modelo estocástico, energía solar

Key Words: Markov processes, renewable energy, photovoltaic energy, stochastic model, solar energy

RESUMEN

En el presente documento se tiene como principal objetivo estimar la cantidad de usuarios que emplearán la energía solar, en una región al norte de México denominada Región Lagunera, aprovechando las condiciones geográficas de insolación. Se analiza específicamente la cantidad de usuarios que usarán la energía fotovoltaica para uso doméstico, se estimará cuantos usuarios serán consumidores de este sistema de energía alterna, y cuantos más pudieran desechar la opción o simplemente continuar con la forma de electrificación tradicional. Se realiza este proceso, mediante una aplicación práctica de un modelo estocástico basado en las cadenas de Markov. Se encontró un patrón muy similar en las tres ciudades analizadas. La proporción de consumidores es mayor a la proporción de transferidos, es decir, la cantidad de usuarios que estarían dispuestos a usar los sistemas fotovoltaicos se verá incrementada durante el transcurso de los próximos diez años.

ABSTRACT

The main objective of the present paper is to estimate the number of users willing to use solar energy, in a region located to the north of Mexico called Lagunera Region, taking advantage of geographical conditions of solar radiation. Particularly, it is analyzed the number of users that will use photovoltaic energy for domestic use, it will be estimated the number of users will be consumers of this alternative energy system, and how many could reject the option or simply continue with the traditional form of electrification. This process is performed through a practical application of a stochastic model based on Markov chains. It was found a similar pattern in the three cities analyzed. The proportion of consumers is bigger than the proportion of the transferred ones, meaning that, the number of users willing to adopt photovoltaic systems will be increased during the next ten years..

INTRODUCCIÓN

La generación de energía actualmente, mediante las fuentes de energía fósil y nuclear se considera finita, con las desventajas de que el uso de material fósil constituye un riesgo a la ecología, y la aceleración de material nuclear es aun aventurada y peligrosa. Además, el constante crecimiento de demanda de energía requiere de diversas fuentes alternativas de generación de energía o nuevos métodos de obtener energía. Sin embargo, debido a las grandes facilidades que brinda la energía eléctrica, como producto del petróleo, contribuye al poco interés en el cuidado del medio ambiente y en la adaptación a las nuevas energías alternas como lo es la energía solar.

En este documento se aborda el tema del uso de la energía solar fotovoltaica, aplicada al uso doméstico, interconectada a la red de distribución eléctrica conocido como Sistema Fotovoltaico Conectado a la Red. La finalidad es realizar una predicción y determinar cuántos usuarios del sistema eléctrico tradicional pasarán a ser consumidores leales al uso de celdas fotovoltaicas con la intención de hacer sustentable una casa habitación en cuanto al consumo de energía eléctrica. De esa forma, la casa sería autosuficiente para cubrir la demanda de consumo de energía requerida para aparatos básicos como aire acondicionado, iluminación, etc. Este documento se considera como parte de un estudio de viabilidad que podría formar parte de un proyecto técnico, en un futuro. Al mismo tiempo, se lleva a cabo la aplicación del modelo matemático planteado, y de esta manera tener bases suficientes para tomar decisiones, en cuanto a la adopción de la tecnología fotovoltaica en el futuro, de la región en estudio y de cualquier otra parte del mundo en el ámbito de la energía eléctrica.

La presente investigación se realizó en la Comarca Lagunera, zona metropolitana conformada principalmente por Torreón, Gómez Palacio y Ciudad Lerdo. Esta Región está localizada al norte de México en los estados de Coahuila y Durango. Actualmente, los sistemas fotovoltaicos conectados a la red, han alcanzado una modesta penetración en el mercado energético mexicano, (alrededor de 16 MW), principalmente mediante el financiamiento gubernamental en proyectos de electrificación rural y el financiamiento privado, en aplicaciones profesionales en sitios remotos; básicamente para telecomunicaciones y más recientemente para aplicaciones productivas agropecuarias principalmente. Las actividades de sistemas fotovoltaicos conectados a red comenzaron a mediados de 1990 en México. Un sistema fotovoltaico experimental de 1.7 KW fue instalado dentro de las instalaciones del Instituto de Investigaciones Eléctricas (IIE). El sistema se conectó a una red de distribución de bajo voltaje (115V) y proveía parcialmente la iluminación del edificio administrativo. Después de dos años de operación y prueba, el sistema fue enviado a la ciudad de Mexicali, Baja California, al noroeste de México, y se instaló en una casa habitación para demostrar claramente, el concepto de autoabastecimiento en un modo conectado a red.

Gracias al resultado del trabajo de promoción y sensibilización en sistemas fotovoltaicos conectados a la red, que se ha venido realizando, existen en México iniciativas de gobiernos estatales para el uso de esta tecnología en casa habitación a gran escala. En este mismo sentido, recientemente (2008) la empresa Alemana QCell, anunció la construcción de un complejo industrial, para la producción de módulos fotovoltaicos de película delgada en el norte de México, lo que se espera contribuya a impulsar el mercado nacional. Por su lado, el gobierno de Baja California anunció la construcción de una planta fotovoltaica de 70 MW en el área de Mexicali, con fines de subsidio eléctrico para la región.

Específicamente, en la Región Lagunera se ha registrado un gran impulso para promover el uso de la energía solar fotovoltaica durante estos últimos años. Gracias a la fundación de la Asociación de Nacional de Energía Solar (ANES) Región Laguna, se tendrán mayores enlaces con autoridades, instituciones educativas y grupos de investigación para aprovechar y difundir el uso de la energía solar que se puede lograr obtener en grandes cantidades en la región.

Hoy en día, se usan paneles solares en el sector de la agricultura y ganadería, mediante la extracción de agua, para las actividades ganaderas en el agostadero, a través del bombeo accionado con energía solar; y en el sector industrial en algunas empresas privadas, pero el objetivo es que este sistema sea usado en el sector doméstico y en gran escala, con mayor frecuencia y con la posibilidad de que sea de manera continua, para contribuir con el cuidado del medio ambiente contrarrestando el cambio climático, al disminuir la producción de electricidad mediante plantas termoeléctricas consumidoras de combustibles fósiles y generadoras de altos niveles de contaminación y gases invernadero.

Se han desarrollado proyectos para instalar grandes colectores solares en áreas abiertas, aledañas a autopistas y vías de ferrocarril que pueden captar gran cantidad de luz solar, y es factible que con ello se puede lograr una considerables cantidad de energía para iluminación y señalización de estas vías de comunicación, asimismo, se pueden satisfacer las necesidades de los núcleos de población adyacentes, sin embargo para ello se requiere tiempo e invertir grandes recursos, para revertir el uso de la energía eléctrica fósil y utilizar en forma masiva los colectores solares .

Para una comunidad en desarrollo, cuyo entorno tenga gran incidencia de luz solar, es posible suministrar energía con el aprovechamiento de una cantidad ínfima de esa incidencia, o proyectar su aprovechamiento en forma gradual en conjunto con las fuentes de energía actuales.

La prueba está en la región metropolitana de la Región Lagunera (Torreón, Gómez

Año 4, Vol. II, N° 7
ISSN: 1856-8327

Palacio y Lerdo), donde la intensidad solar es cada vez mayor, en comparación con el desarrollo urbano de las tres ciudades. Por este motivo, el presente proyecto de investigación busca incentivar el uso de las energías renovables principalmente la energía solar a través de celdas fotovoltaicas, tomando en cuenta que existen condiciones favorables para el desarrollo y aplicación de la tecnología fotovoltaica en la Región Lagunera.

En segundo lugar, se intenta aportar más conocimiento a la comunidad científica, no solo de la Región Lagunera sino también de la República Mexicana, sobre el tema del uso de la energía solar.

Con todo lo anteriormente escrito y ante el inminente agotamiento de los hidrocarburos, recurso no renovable de elemento finito, así como del aumento de la contaminación de emisiones de gases provocadores del cambio climático, implícitos en la generación de electricidad, para diferentes usos, el propósito es llevar a cabo un análisis con ayuda de un modelo estocástico con la finalidad de que permita predecir la factibilidad de introducir al mercado regional el consumo de energía solar a través de paneles solares, en una primera instancia para el uso doméstico. Incluso los resultados obtenidos, se podrán interpretar de diferentes formas para toma de decisiones en cuanto al desarrollo de la tecnología fotovoltaica en el futuro.

Para la formulación del modelo matemático, usado en la investigación, y para fundamentar el trabajo realizado, se presenta información significativa acerca de la teoría y métodos sobre las cadenas de Markov. Se atendió con mayor énfasis la teoría de las cadenas con estados absorbentes. Debido a que, el modelo aplicado en este documento de investigación se basó fundamentalmente en las cadenas que presentan esta característica.

El nombre de procesos de Markov es en honor al matemático ruso Andréi Andréyevich Márkov, quien formalizó por primera vez la teoría que se menciona, a eventos cuya condición actual depende tan sólo de su condición, es decir, un periodo antes y no de su condición en el pasado o de más de un periodo atrás. Estos eventos se denominan markovianos y son similares a la condición de carencia de memoria de los modelos de líneas de espera. Este tipo de proceso, introducido por Markov en 1907, presenta una forma de dependencia simple entre las variables aleatorias que forman un proceso estocástico.

Los modelos que aplican las cadenas de Markov, son una elegante e ingeniosa herramienta conceptual, para describir y analizar la naturaleza de los cambios generados, por el movimiento humano; en algunos casos el modelo de Markov, puede ser usado, también para predecir cambios futuros. En este sentido son muy similares a los modelos de líneas de espera. En un modelo de líneas de espera, no se conocen con certidumbre los diferentes parámetros, por lo que estos modelos son estocásticos al igual que los markovianos. Dichos parámetros, como tasas de llegada y tasas de servicio, se

Año 4, Vol. II, N° 7
ISSN: 1856-8327

describen a través de distribuciones de probabilidad.

Los modelos markovianos son valiosos, tanto para estudios de migración, en los cuales el objetivo, puede ser calcular la dirección predominante o el ritmo de migración; y en estudios de crecimiento o desarrollo de un sistema urbano, en el cual el objetivo podría ser determinar qué tipo de ciudades tienden a incrementar en tamaño y cuales ciudades tienden a declinar. En los negocios, las cadenas de Markov se han utilizado para analizar los patrones de compra de los deudores morosos, para planear las necesidades de personal y para analizar el reemplazo de equipo. Similarmente, en el área de la medicina se han aplicado cadenas de Markov para predecir la evolución de una determinada enfermedad en un grupo de pacientes.

En algunos de los modelos markovianos como mecanismos de predicción, con frecuencia, es necesario modificar el modelo. En la mayoría de los estudios geográficos, por ejemplo, es necesario no solo modelar la migración, la cual se observa en un sistema cerrado y los números totales permanecen constantes a través de sucesivos intervalos de tiempo, sino además el nacimiento y la muerte de una determinada variable ya sean personas, ciudades, establecimientos o industrias, Rogers (1966). A las variables o condiciones de estado anteriores se le conoce como estados absorbentes. Puesto que, una vez alcanzado un estado absorbente permanece de forma definitiva en esa condición.

La teoría sobre las cadenas de Markov, se estudia de una mejor manera considerando ciertos tipos especiales de cadenas. Uno de estos tipos de cadenas son las llamadas cadenas de Markov con estados absorbentes.

Es decir, un estado *Si* en una cadena de Markov es llamado absorbente si es imposible dejarlo o salir de él (i.e., pii = 1). Por lo tanto, una cadena de Markov es absorbente si al menos tiene un estado absorbente, y además si desde cada estado no absorbente es posible llegar a él. (No necesariamente en un primer paso o intervalo de tiempo). En una cadena de Markov absorbente, al estado no absorbente se le llama también estado transiente.

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Figura 1: Ejemplo de una matriz de transición para una cadena con estados absorbentes. El 0 y el 4 son estados absorbentes

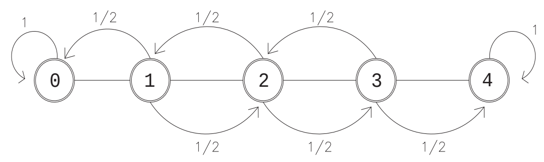


Figura 2: Grafo asociado a la matriz de transiciones de la figura 1

La pregunta más obvia que se puede responder cuando se usa un modelo con cadenas de Markov absorbentes es: ¿Cuál

Año 4, Vol. II, N° 7
ISSN: 1856-8327

es la probabilidad de que el proceso alcance eventualmente un estado absorbente? Otras preguntas interesantes serían: a) ¿Cuál es la probabilidad de que termine en un estado absorbente determinado? Respuesta: la probabilidad de que finalmente sea absorbido por un estado absorbente es el ij-ésimo elemento de la matriz (I-Q)-1R, b) en promedio, ¿cuánto tiempo tomará para que el proceso sea absorbido? Respuesta: el número de periodos que se pasará en un estado transitorio tj antes de la absorción, es el ij-ésimo elemento matriz (I-Q)-1, c) en promedio, ¿cuántas veces estará el proceso en un estado transiente? La respuesta a todas estas preguntas depende, en general, del estado en el cual el proceso comenzó así como de las probabilidades de transición. Por lo tanto, siempre será necesario resolver las ecuaciones correspondientes para conocer dichos resultados.

Por otro lado y recordando que en una cadena, principalmente, se enumeran dos tipos de estados (absorbentes y transientes), resultará conveniente definir la siguiente notación: se podrá identificar al conjunto de estados absorbentes con la literal A y al conjunto de estados transientes mediante la literal T.

En una cadena absorbente y empezando en cualquier estado, sea transiente o absorbente, se tiene una probabilidad positiva de llegar en algún momento a un estado absorbente, ya que en otro caso se formaría un conjunto ergódico, con más de un punto porque hay un número finito de estados. Desde el punto de vista de un determinado dígrafo asociado, se refleja que desde todo estado transiente existe un camino (dirigido) hacia algún estado absorbente. En otras palabras, para cada estado u existe un estado v contenido en A y un número de pasos r tales que la probabilidad de ir desde u hasta v en r pasos es positiva, es decir, $p(r)uv > 0$.

Una vez que se ha alcanzado un estado absorbente, es obvio que se tendrá que permanecer en ese estado. Por lo tanto, es posible tomar un mismo r (el máximo de los anteriores) que sirva para todos los estados. Del mismo modo, tomando ahora el mínimo de las probabilidades, se puede encontrar $\alpha > 0$ tal que para todo estado u existe un estado absorbente $v \in$ T tal que $p(r)uv \geq \alpha$.

Como se está en un proceso de Markov, la probabilidad de que empezando desde cualquier estado no se alcance un estado absorbente, en a lo más r pasos, es menor o igual que $1-\alpha$. Repitiendo el razonamiento, es claro que la probabilidad de no llegar en kr pasos (k $\in$ N) a un estado absorbente es menor o igual que $(1-\alpha)$k, pero como $1-\alpha < 1$, esta probabilidad tiende a 0.

Se puede resumir este argumento en el siguiente teorema:

1.1 Teorema. *En toda cadena de Markov absorbente, la probabilidad de absorción (probabilidad de que empezando en cualquier estado transiente se llegue a un estado absorbente) es 1.*

Eventualmente renumerando los estados, es posible escribir la matriz de transición asociada en forma canónica:

Año 4, Vol. II, N° 7
ISSN: 1856-8327

$$\begin{array}{r} \\ Absorbentes \\ Transientes \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} Absorbentes & Transientes \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} I & 0 \\ R & Q \end{array}\right] \end{array} \qquad (1.1)$$

En este caso, si hay n estados, de los cuales m son absorbentes y $n-m$ transientes, la submatriz I es la matriz identidad en R$m\times m$, la submatriz 0 Є Rm×($n-m$) tiene todos los coeficientes 0, y las submatrices R y Q están en R($n-m$)×m y R($n-m$)×($n-m$), respectivamente.

Puesto que, comenzando desde un estado absorbente, la probabilidad de no llegar a un estado absorbente se acerca a (0), a medida que aumenta el número de pasos (por el teorema 1.1), y como las entradas de Qk son las probabilidades de que empezando en un estado transiente después de k pasos sea posible llegar a otro estado transientes, se tiene:

1.2 Teorema. *En una cadena de Markov absorbente cuya matriz canónica tiene la forma de la ecuación (1.1):*

a) $Q^r \to 0$ (la matriz con todos 0's) cuando $r \to \infty$,
b) si I es la matriz identidad en R(n - m) × (n - m), entonces I - Q es invertible y,

$$I - Q^{-1} = \sum_{r=0}^{\infty} Q^r \qquad (1.2)$$

La última parte del teorema anterior sigue las ideas de la demostración de que:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{r=0}^{\infty} x^k \qquad (1.3)$$

cuando x es un número real con |x| < 1.

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & .6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} .4 & 0 \\ .5 & 0 \\ .6 & 0 \\ .7 & .3 \end{bmatrix}$$

$a)$ $\qquad$ $b)$

$$(I-Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & .6 & .3 & .12 \\ 0 & 1 & .5 & .2 \\ 0 & 0 & 1 & .4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (I-Q)^{-1}R = \begin{bmatrix} 0.964 & 0.036 \\ 0.940 & 0.060 \\ 0.880 & 0.120 \\ 0.700 & 0.300 \end{bmatrix}$$

$c)$ $\qquad$ $d)$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & .6 & 0 & 0 & .4 & 0 \\ 0 & 0 & .5 & 0 & .5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .4 & .6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .7 & .3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$e)$ $\qquad$ $f)$

Figura 3. En las figuras a) a la f) se muestra una matriz de transición cualquiera con dos estados absorbentes y su solución a través de la forma canónica

Claro, que si es posible contar con un estado transiente u Є T, entonces en la forma canónica de la matriz P tiene asociado un índice (digamos i), similarmente en la matriz Q se tiene asociado otro índice ($i - m$). En lo que sigue, para no complicar las notaciones, fue conveniente suponer implícitamente que no se presenta esta ambigüedad y se llevó a cabo un corrimiento de índices.

Poniendo: $\qquad N = I - Q^{-1}$ (1.4)

Usualmente llamada matriz fundamental de la cadena absorbente. Lo anterior se explica mediante el siguiente teorema:

1.3 Teorema. *En una cadena absorbente, si se empieza en el estado transiente ui Є T, el*

Año 4, Vol. II, N° 7
ISSN: 1856-8327

número esperado de veces en que la cadena está en el estado transiente uj ∈ T es la entrada i- j de la matriz fundamental N.

Demostración:

$$\delta(j,s) = \begin{cases} Si \quad la \quad cadena \quad está \\ en \quad el \quad estado \quad u_j \, en \quad el \, paso \, S. \\ 0 \quad en \quad caso \quad contrario. \end{cases}$$

Y para cualquier x sea Ei(x) el valor esperado de x si el proceso empieza en el estado ui. Entonces si eij es la esperanza buscada,

$$e_{ij} = E_i\left(\sum_{s=0}^{\infty}\delta \ \ j,s \right) = \sum_{s=0}^{\infty} E_i \ \ \delta \ \ j,s \ \ =$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \ 1-p_{ij}^{\ \ s} \ \ 0+p_{ij}^{\ \ s} \, 1 \ = \sum_{s=0}^{\infty} p_{ij}^{\ \ s} \ , \quad (1.5)$$

donde la suma empieza desde s = 0 pues no se elimina la posibilidad i = j.

Recordando que p(s)ij es la entrada i j-ésima de Qs (después de un corrimiento de índices), se ve claramente que eij es la entrada i j-ésima de:

$$\sum\nolimits_{s=0}^{\infty} Q^{s}, \qquad (1.6)$$

, que es N por el teorema 1.2.

METODOLOGÍA

La elección del tema de investigación se debió al gran interés que se ha venido dando, en estos últimos años, a la generación de energía mediante fuentes alternas. Por lo tanto, se presenta este documento como parte del aporte al conocimiento de la energía solar en México e iniciar una serie de investigaciones para el desarrollo de modelos aplicados a la mejora y al avance tecnológico en el sector energético.

La metodología que fue desarrollada, en forma general, para la presente investigación está organizada como sigue: investigación documental, la investigación de campo, el análisis de los datos compilados y la presentación de resultados obtenidos, por medio de gráficos y tablas de datos.

Para la investigación documental se reunió la información necesaria de cada una de las tres ciudades bajo observación: Torreón, Gómez Palacio y Ciudad Lerdo.

Se usó tanto el sistema de información formal como el informal. El principal sistema de información documental utilizado fue la biblioteca, además de la inevitable fuente de consulta de artículos científicos publicados en el internet.

Para la investigación de campo se utilizó el sistema de documentación estadística, y la técnica utilizada fue la encuesta. Ésta se diseñó especialmente para la obtención de resultados requeridos para el estudio y se aplicó para cada una de las tres ciudades.

El cuestionario consta de 10 preguntas cerradas, éste se orientó a padres de familia, que contaban con un sistema formal de consumo de energía eléctrica tradicional, como es el caso de casas habitación. Para calcular el tamaño de la muestra, se trabajó con un 95% de nivel de confianza y un porcentaje de error

Año 4, Vol. II, N° 7
ISSN: 1856-8327

aceptado del 5% valores clásicamente utilizados, para determinar este proceso, siendo el tamaño de la muestra para la ciudad de Torreón de 383 usuarios del total de usuarios de energía eléctrica, de igual forma para Gómez Palacio, la cual fue de 382 y para Lerdo 379 usuarios.

Actualmente, con el desarrollo de nuevas tecnologías para el aprovechamiento y uso de la energía solar fotovoltaica, se ha mostrado interés por implementar estrategias de innovación en este ámbito y además, se han realizado importantes investigaciones no solo en países desarrollados como Alemania, España y Estados Unidos, sino que también han participado países de América Latina entre ellos incluido México.

A nivel regional existe el interés de promover, modelar y analizar el uso de la energía fotovoltaica como una forma de hacer una arquitectura sustentable y a la vez contribuir al cuidado del medio ambiente a nivel global.

Esta investigación se considera como parte de un estudio de viabilidad que podría formar parte de un proyecto técnico para la construcción de una central fotovoltaica o para desarrollar un sistema interconectado a la red de distribución en la región. Por tal motivo, el gran interés es saber cuántos usuarios de la energía eléctrica tipo domestica aceptarían el uso de la energía fotovoltaica dentro de los próximos 10 años, cuantos continuarán usando la forma de electrificación actual o simplemente desecharán la nueva tecnología. Esta información será útil para planear necesidades futuras de celdas fotovoltaicas, para planear necesidades futuras de generación de energía y para obtener fondos del gobierno federal, por ejemplo.

El estudio se basará principalmente en datos históricos sobre la cantidad de viviendas particulares que cuentan con energía eléctrica. Se asumirá que esa cantidad de vivienda es igual a la cantidad de usuarios para cada año correspondiente. Se desglosaran los datos para cada una de las tres ciudades.

La predicción se realizará para un intervalo de tiempo de 10 años, es decir, comenzando en el año 2010 y se terminara el análisis en el año 2020. Entonces, dada una proyección para 10 años los usuarios podrán llegar a ser consumidores del sistema fotovoltaico o podrían pasar a utilizar la forma tradicional de electrificación (transferido). Es importante mencionar que tanto el estado de consumidor como el estado de transferido son estados absorbentes, ya que una vez alcanzada dicha condición de estado es imposible salir de ella. Por lo tanto, adoptando un enfoque de cadena de Markov se tendría la siguiente matriz de transiciones de forma general:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{array} & \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & . & . & . \\ . & . & . & . \\ p_{41} & . & . & p_{44} \end{bmatrix} \end{array}$$

Figura 5: Forma general de la matriz de transiciones, que se aplicó al modelo desarrollado

Dónde:
S1= Porcentaje de usuarios en el 2010
S2= Porcentaje de usuarios en el 2020
S3= Estado en condición de consumidor
S4= Estado en condición de transferido

De acuerdo con lo anterior, un usuario no puede pasar a cualquier otro estado después de haber permanecido en uno específico. Por ejemplo, un usuario en el año 2010 no puede pasar al estado de consumidor. En otro caso, un usuario que alcanzado el estado de consumidor S3 o el estado de transferido S4, no le es posible pasar a ningún otro estado. (Por lo que, se hace hincapié en que estos dos últimos estados son estados absorbentes)

La pregunta es: ¿Qué proporción de usuarios del año 2010 y del año 2020 serán consumidores y que proporción rechazará la nueva tecnología? En otras palabras, que proporción de cada uno de los estados no absorbentes terminarán en el estado absorbente consumidor y el estado absorbente transferido.

Para desarrollar el modelo se tratará un tipo especial de cadenas de Markov, es decir, cadenas de Markov con estados absorbentes. Por lo tanto, para calcular las proporciones requeridas será necesario definir una matriz especial que se llama Matriz Fundamental Q. Matriz que, más adelante, se obtendrá mediante el procedimiento a desarrollar en este documento.

La matriz límite es una de las más importantes propiedades de una cadena de Markov regular. Otras propiedades descriptivas pueden ser calculadas a partir de Z o Q, también llamada Matriz Fundamental. Los detalles del algebra de matriz asociada con estos cálculos son abordados por Kemeny y Snell (1967), se presenta la información con la finalidad de realizar una comparación en cuanto a la notación usada, que definitivamente llega a ser la misma.

En notación matricial se tiene:

$$Z=(I-(P-A)^{-1} \qquad (1.7)$$

Donde:
I = Matriz Identidad
P = Matriz regular
A = La matriz límite de P

La matriz fundamental se encuentra mediante el siguiente procedimiento:

1. Eliminar los renglones correspondientes a los estados absorbentes originales.
2. Dividir la matriz restante en estados absorbentes y no absorbentes. Denominar G a la parte de la matriz bajo estados absorbentes, y a la parte bajo estados no absorbentes, H.
3. Calcular $Q = (I - H)^{-1}$, en donde I = matriz identidad (unos en la diagonal principal, y ceros en las demás posiciones) y el exponente -1 se refiere a la inversa de la matriz correspondiente.

La inversa de una Matriz A n x n es invertible (o no singular) si hay una Matriz B n x n tal que AB=BA=In

Donde In es la matriz identidad de orden n. La matriz B se denomina inversa multiplicativa de A. Una matriz que no tiene inversa se denomina no invertible o singular.

La inversa de una matriz cuadrada de orden n se puede determinar mediante el

Año 4, Vol. II, N° 7
ISSN: 1856-8327

método de Eliminación de Gauss-Jordan. Como sigue:

1.- Escriba la matriz n x 2n que consiste en la matriz dada A a la izquierda y la matriz identidad I de n x n a la derecha para obtener [A:I]. Observe que ambas matrices están separadas por una línea discontinua. Este proceso se denomina unión de las matrices A e I.

2.- De ser posible, reduzca por renglones A a I al aplicar las operaciones elementales en los renglones a toda la matriz [A:I]. El resultado es la matriz [I:A-1]. Si no se puede llevar a cabo lo anterior, entonces A no es invertible.

3.- Compruebe el proceso con la multiplicación para ver que A A-1=I= A-1 A.

La aplicación de la eliminación de Gauss-Jordan para determinar la inversa de una matriz funciona satisfactoriamente para matrices de orden mayor o igual a 3 x 3. Para matrices 2 x 2, sin embargo, muchas personas prefieren aplicar una fórmula para la inversa, en vez de encontrarla mediante la eliminación de Gauss-Jordan. A continuación se explica esta fórmula simple, para el caso que fue estudiado en el cual se consideró una matriz 2 x 2.

De manera general:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad (1.8)$$

Entonces A es invertible si y solo si ad - bc ≠ 0. Además, si ad – bc ≠ 0, entonces la inversa está dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \qquad (1.9)$$

Por lo tanto, será necesario aplicar el anterior procedimiento para cada una de las tres ciudades dependiendo de su matriz de transiciones correspondiente.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Resultados

Ahora que se tiene el modelo descrito y con base en cada matriz de transición, para cada una de las tres ciudades se resuelve el modelo mediante algebra matricial.

Aplicación del modelo para la ciudad de Torreón

Con los datos obtenidos a través de la encuesta y con base en los datos estadísticos se presenta la siguiente matriz de transiciones para el caso específico de la ciudad de Torreón Coahuila:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.0 & 0.2 \\ 0.0 & 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.0 & 0.0 & 1 & 0 \\ 0.0 & 0.0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (1.10)$$

Dónde:

S1= Porcentaje de usuarios en el 2010
S2= Porcentaje de usuarios en el 2020
S3= Estado en condición de consumidor
S4= Estado en condición de Transferido

Por lo tanto, si se aplica el procedimiento anteriormente descrito se tiene lo siguiente:

Paso 1. Eliminación de renglones absorbentes.

$$P = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.0 & 0.2 \\ 0.0 & 0.3 & 0.6 & 0.1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (1.11)$$

Paso 2. División de los renglones restantes en estados absorbentes y no absorbentes.

$$G = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} S_1 & S_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.0 & 0.2 \\ 0.6 & 0.1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (1.12)$$

$$H = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} S_1 & S_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.6 \\ 0.0 & 0.3 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (1.13)$$

Paso 3. De la ecuación 1.7, se calcula Z. En notación usada en este proyecto específico se le llamó Q, por razones de familiarización con la notación usada por McKeown (1986)

$$Q = \begin{bmatrix} (1.0-0.2) & (0.0-0.6) \\ (0.0-0.0) & (1.0-0.3) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 \\ 0.0 & 0.7 \end{bmatrix}^{-1}$$

Se obtiene mediante la fórmula de la ecuación 1.9, la inversa de la matriz requerida.

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Donde:

a=0.8 b=-0.6 c=0.0 d= 0.7

$$A^{-1} = (I-H)^{-1}$$

$$(I-H)^{-1} = \frac{1}{(0.8x0.7)-(0.0x0.6)} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 \\ -0.0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$(I-H)^{-1} = \frac{1}{(0.56-0.0)} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 \\ -0.0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$(I-H)^{-1} = \frac{1}{0.56} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 \\ -0.0 & 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 & 1.07 \\ 0.00 & 1.43 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$Q = \begin{bmatrix} 1.25 & 1.07 \\ 0.00 & 1.43 \end{bmatrix}$$

Utilizando Q puede calcularse la proporción de usuarios que alcanzarán cada uno de los estados absorbentes. Si esta matriz de proporciones se denota R, en donde Rij = proporción de usuarios en un estado inicial i que en algún momento pasan a un estado absorbente j, entonces se tiene:

$$R=QG \qquad (1.14)$$

Aplicando la fórmula anterior:

$$Q = \begin{bmatrix} 1.25 & 1.07 \\ 0.00 & 1.43 \end{bmatrix} \text{ y}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.2 \\ 0.6 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1.25 & 1.07 \\ 0.00 & 1.43 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0.0 & 0.2 \\ 0.6 & 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.642 & 0.357 \\ 0.858 & 0.143 \end{bmatrix}$$

Dada la matriz R los valores o resultados obtenidos son:

r11=0.642 = Proporción de usuarios en el año 2010 y que en algún momento serán consumidores del sistema de electrificación por medio de paneles solares.

r12=0.357 = Proporción de usuarios en el año 2010 y que rechazarán el consumo de energía fotovoltaica.

r21=0.858 = Proporción de usuarios en el año 2020 y que en algún momento serán consumidores del sistema de electrificación por medio de paneles solares.

r22=0.143 = Proporción de usuarios en el año 2020 y que rechazarán el consumo de energía fotovoltaica.

Si para el año 2010 existen 141,876 usuarios de la energía eléctrica y se proyectan 180,458 usuarios para el año 2020, se espera que:

(0.642)(141876) = 91, 084 usuarios en el año 2010 que en algún momento serán consumidores.

(0.357)(141876) = 50, 650 usuarios en el año 2010 que rechazarán el sistema fotovoltaico.

(0.858)(180458) = 154, 833 usuarios en el año 2020 que en algún momento serán consumidores.

(0.357)(180458) = 64, 424 usuarios en el año 2020 que rechazarán el sistema fotovoltaico.

Aplicación del modelo para la ciudad de Gómez Palacio, Matriz de transición para la ciudad de Gómez Palacio

$$P = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.0 & 0.2 \\ 0.0 & 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.0 & 0.0 & 1 & 0 \\ 0.0 & 0.0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad (1.15)$$

Con base en la matriz de transiciones, se aplica el procedimiento. Se obtienen los siguientes resultados:

Dada la matriz los valores o resultados obtenidos son:

Si para el año 2010 existen 71,924 usuarios de la energía eléctrica y se proyectan 125,320 usuarios para el año 2020, se espera que:

(0.623)(71,924) = 44,808 usuarios en el año 2010 que en algún momento serán consumidores.

(0.375)(71,924) = 26,972 usuarios en el año 2010 que rechazarán el sistema fotovoltaico.

(0.875)(125,320) = 109,655 usuarios en el año 2020 que en algún momento serán consumidores.

(0.125)(125,320) = 15,665 usuarios en el año 2020 que rechazarán el sistema fotovoltaico.

Aplicación del modelo para la ciudad de Lerdo, Matriz de transición para la ciudad de Lerdo.

$$P = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.7 & 0.0 & 0.1 \\ 0.0 & 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.0 & 0.0 & 1 & 0 \\ 0.0 & 0.0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad (1.16)$$

Con base en la matriz de transiciones se aplica el procedimiento, se obtuvieron los siguientes resultados:

Si para el año 2010 existen 29552 usuarios de la energía eléctrica y se proyectan 42130 usuarios para el año 2020, se espera que:

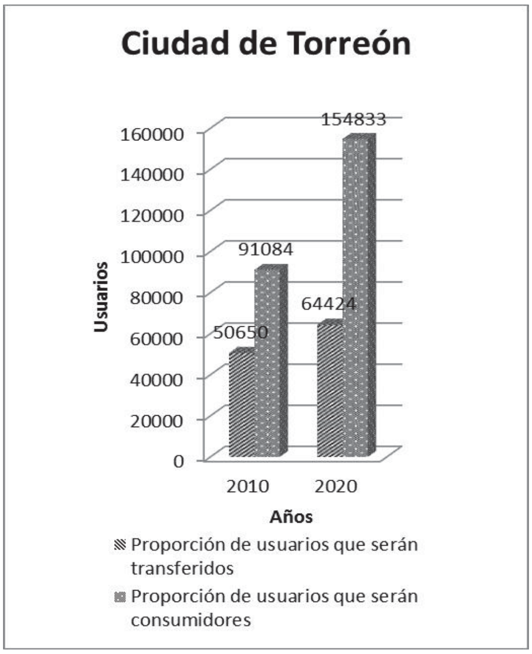
(0.572)(29552) = 16 904 usuarios en el año 2010 que en algún momento serán consumidores.

(0.411)(29552) = 12 146 usuarios en el año 2010 que rechazarán el sistema fotovoltaico.

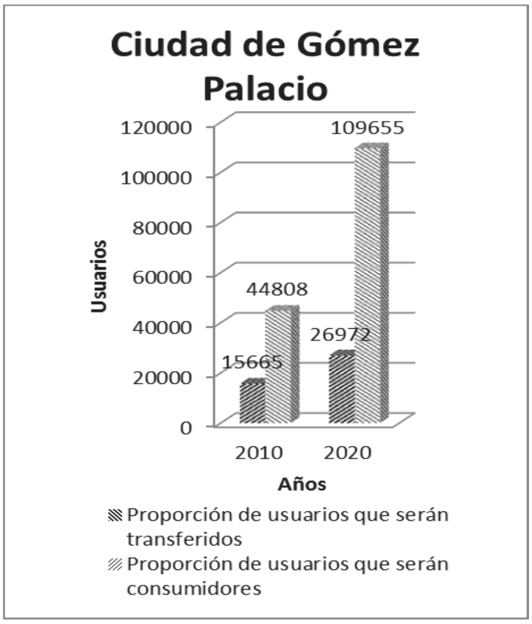
(0.152)(42130) = 6 404 usuarios en el año 2020 que en algún momento serán consumidores.

(0.076)(42130) = 3 202 usuarios en el año 2020 que rechazarán el sistema fotovoltaico.

A continuación, se muestran las gráficas para una mejor apreciación de los resultados.

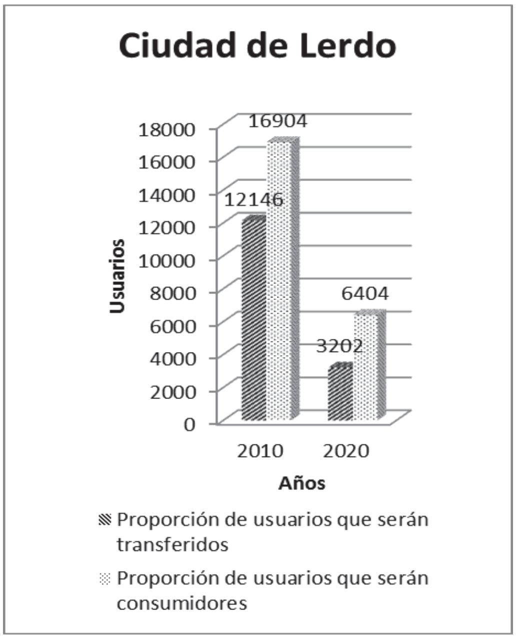


Gráfica 3.1: Proporciones de la población para los años 2010 y 2020, para la Ciudad de Torreón Coahuila

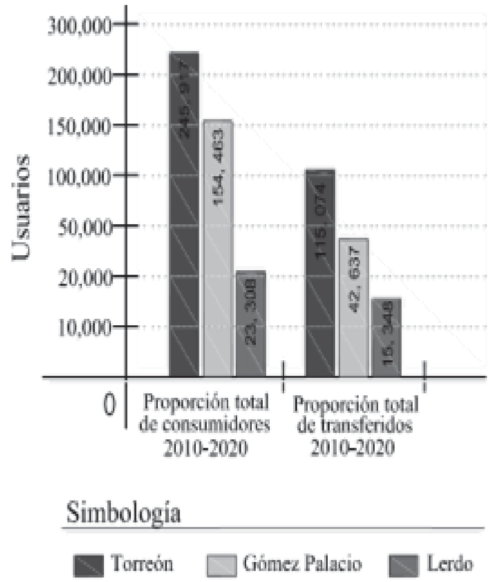


Gráfica 3.2: Proporciones de la población para los años 2010 y 2020, para la Ciudad de Gómez Palacio, Durango

Año 4, Vol. II, N° 7
ISSN: 1856-8327



Gráfica 3.3: Proporciones de la población para los años 2010 y 2020, para la Ciudad de Lerdo, Durango



Gráfica 3.4: Proporciones totales de la población para los años 2010 y 2020, en los estados absorbentes de consumidor y transferido

Discusión

El presente modelo estocástico aplicado, pretende predecir la realidad en relación al número de usuarios futuros de energía fotovoltaica. De acuerdo con los datos encontrados, a través de la aplicación de las cadenas de Markov, modelado que permite visualizar con mayor evidencia los cambios en la sociedad de Torreón, Coahuila, Gómez Palacio y Ciudad Lerdo, Durango. Porque sería fácil, proporcionar porcentajes y probabilidades, en base a la observación y opinión de unas cuantas personas, pero la seguridad de encontrarse apegada a la realidad seria mínima. Por lo que, se observa que la utilización del modelo matemático, predice con mayor fidelidad la realidad que existe alrededor del aprovechamiento y avance tecnológico en el uso de la energía solar, en la Región Lagunera o en cualquier otra parte del Mundo.

Por lo anterior, y con base en el análisis realizado, se encontró, que la proporción de usuarios que serán consumidores en el año 2010, para la ciudad de Torreón son 91,084 usuarios, es decir un (64.2%); para Gómez Palacio 44,808 usuarios con (62.3%) y para la ciudad de Lerdo 16,904 usuarios con (57.2%) del total de usuarios de energía eléctrica, en las ciudades modeladas.

Sin embargo, en relación a la proporción de usuarios que serán transferidos o simplemente rechazaran el uso de la energía fotovoltaica, para ese mismo año 2010, se encontró para Torreón 50,650 usuarios, es decir un (35.7%), para Gómez Palacio 15,665 usuarios un (21.8%) y para

Lerdo 12,146 usuarios un (41.1%) del total de usuarios consumidores de energía eléctrica. Apreciando, por lo tanto, que tanto para la ciudad de Torreón, como para la Ciudad de Gómez Palacio, una cierta proporcionalidad, en cuanto a número de usuarios que serán consumidores para el año 2010, observándose para ambas ciudades más del 60% del total de usuarios consumidores de energía eléctrica de ese año, que si están dispuestos a aceptar este tipo de tecnología alterna.

Por otra parte, se puede mencionar, que para la localidad de Torreón, la cual, es la de mayor número de usuarios de energía eléctrica en la Región Lagunera, la proporción de usuarios que llegarán a ser consumidores del sistema fotovoltaico en el año 2020, creció hasta un 85.8% y de manera similar creció, para la ciudad de Gómez Palacio en 87.5%, mientras que para la ciudad de Lerdo, se observa algo muy particular, disminuyo a 7.6% la proporción de usuarios que serán transferidos en el año 2020. Es entendible que en cierto punto, no se quisieran destinar mayores recursos a la ciudad de Lerdo, debido al poco interés por el uso de paneles solares por parte de la población. Esta circunstancia bien podría estar asociada a la limitación económica de la ciudad Lerdo.

CONCLUSIONES

Se puede resaltar, que la tendencia, una vez aplicado el modelo, en cuanto a la cantidad de usuarios que pasarán a ser consumidores, se incrementó de manera notoria para la ciudad de Torreón con 91,084 en 2010, a 154,833 usuarios en 2020; así mismo para la ciudad de Gómez Palacio, de 44,808 en 2010 a 109,655 usuarios en 2020, no siendo así para la ciudad de Lerdo, en la cual disminuyo de manera considerable, de 12,146 usuarios en 2010 a 3,202 en el año 2020, motivado por factores culturales de la sociedad en ciudad Lerdo. Se puede concluir, que la forma ideal es la mostrada en la gráfica 3.2 para la ciudad de Gómez Palacio, ya que para el año 2020, la cantidad de usuarios que llegaran a ser consumidores aumentará. En cambio, la cantidad de usuarios que serán transferidos para ese mismo año disminuirá. Es decir, cada vez son más los usuarios interesados en usar paneles solares y con el paso del tiempo, serían menos las personas que rechazarán la nueva tecnología.

También se puede concluir, para el modelo aplicado en la Ciudad de Torreón, el usuario promedio en el año 2010, pasará 1.25 años antes de rechazar el uso de paneles solares o pasar hasta el año 2020, siendo usuario del sistema fotovoltaico y de esta manera llegar a ser consumidor.

Otro resultado que puede obtenerse, a través de Q es que la suma de los renglones, da el número promedio de periodos hasta que ocurra la absorción, en uno de los estados absorbentes. Esto significa, si alguno de los usuarios se encuentra en la proporción del año 2010, para el caso de la ciudad de Torreón, necesitará en promedio 2.32 años para aceptar por completo el uso de paneles solares (consumidor) o rechazar la tecnología (transferido).

Teniendo también, que para las tres ciudades modeladas, la proporción de consumidores, resultante es mayor, con respecto al de transferidos; por ejemplo, para Torreón se tiene 245,917 usuarios consumidores, mientras que la proporción de transferidos, es de 115,074 usuarios, es decir, el 68% de la cantidad de usuarios en total, que estarían usando los sistemas fotovoltaicos., como se indica en la gráfica 3.4 del documento.

Es importante mencionar que para futuras investigaciones se buscará encontrar la aplicación de las Cadenas Markov, para pronosticar la generación, uso y costo de energía eléctrica mediante procesos fotovoltaicos, tanto para el mediano o largo plazo, principalmente en otros usos, como es el industrial, comercial, agrícola y pecuario.

REFERENCIAS

INEGI (Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática). (2001) Gómez Palacio Durango: Cuaderno estadístico municipal. México.

INEGI (Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática). (2001) Lerdo Durango: Cuaderno estadístico municipal. México.

Kemeny, John G. & Snell, J. Laurie. (1986). Finite Markov Chains. New York: Springer-Verlag

Larson, Roland & Edwards, Bruce H. (2008). Introducción al algebra lineal. México: Limusa.

Lyndhurts, Collins. (1975) An introduction to markov Chain analysis. University of Michigan: Geo Abstracts Ltd.

Lyndhurst Collins, R. Drewett and R. Ferguson. (1974) Markov Models in Geography. Journal of the Royal Statistical Society. Series D (The Statistician) Vol. 23, No. 3/4, Statistics and Geography. pp. 179-209

Markov, A. (1907) "Extension of the limit theorems of probability theory to a sum of variables connected in a chain". In The notes of the Imperial Academy of Sciences of St. Petersburg VIII Series, Vol. XXII, No. 9.

Medina, L. (2000) Métodos de Investigación I-II, México: SEP-Colección DGETI.

MCKeown, Davids. (1986) Modelos Cuantitativos para Administración. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

N. P., Loomba. (1964) Linear Programming: An introductory analysis. New York: McGraw-Hill.

Rogers, A. (1968) Matrix analysis of interregional population growth and distribution. Berkeley: University of California Press.

Rogers, A. (1966), Matrix methods of population analysis. Journal, American Institute of Planners, 32, 40-44.

SEGOB & Centro Nacional de Estudios Municipales. (1988) Enciclopedia de los Municipios de México, Los Municipios de Durango. México: Talleres Gráficos de La Nación.

Stewart, W. J. (1994) Introduction to the Numerical Solution of Markov Chains. Princeton University Press.

Szidarovszky, F. & S. Molnár. (2002) Introduction to Matrix Theory with

Applications to Business & Economics, World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd. Vol. 3, 512pp
Walker, J. R. (2008) "Internal migration." The New Palgrave Dictionary of Economics. Second Edition. Eds. Steven N. Durlauf and Lawrence E. Blume. Palgrave Macmillan.
Wayne L., Winston. (2005) Investigación de operaciones. México: International Thompson Editores. 4ª Edición.

Autor

Armando Cesar Uranga Sifuentes. Ingeniero civil, Universidad Juárez del Estado de Durango (UJED), México; Maestro en Administración, UAC, México; Maestro en Ciencias con Especialidad Planeación y Construcción de Obras Civiles, UJED, 2003; Estudios Doctorales de Ingeniería con Especialidad en Sistemas de Planificación y Construcción, UJED. Profesor-investigador de Tiempo Completo de la FICA UJED.

E-mail: armando_uranga@yahoo.com.mx

Ramón Luevanos Rojas Ingeniero Electromecánico, Instituto Tecnológico de la Laguna, México; Maestro en Ciencias con Especialidad Planeación y Construcción de Obras Civiles, UJED, México; Estudios Doctorales con Especialidad en Sistemas de Planificación y Construcción, FICA-UJED. Profesor-investigador de Tiempo Completo de la FICA UJED.

E-mail: luera_2000@yahoo.com

Juan Antonio González Mata. Licenciado en Arquitectura, Universidad Juárez del Estado de Durango, México. Maestro en Ciencias en Ingeniería Civil con Especialidad en Planeación y Construcción de Obras Civiles, UJED.

E-mail: j_antonio_gm@hotmail.com

Facundo Cortes Martínez. Ingeniero civil, UJED, México; Maestro en Ciencias con Especialidad Planeación y Construcción de Obras Civiles, FICA-UJED, México; Doctor en Ingeniería con Especialidad en Sistemas de Planificación y Construcción, FICA-UJED, México. Profesor-investigador de Tiempo Completo de la FICA UJED.

Email: facundo_cm@yahoo.com.mx

Claudia M. Ávila Garza Licenciada en Arquitectura, ISCYTAC, Instituto de Ciencia y Tecnología A.C., México; Maestro en Ciencias con Especialidad Planeación y Construcción de Obras Civiles, FICA-UJED, México. Profesor-investigador de Tiempo Completo de FICA UJED.

E-mail: arq_claudiavila@yahoo.com.mx

Recibido: 05/01/2011 **Aceptado:** 05/03/2011