HOMOTECIA

CÁTEDRA DE CÁLCULO - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA y FÍSICA – FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN – UNIVERSIDAD DE CARABOBO

 Hecho el Depósito de Ley. Depósito Legal: PPi2012024055 – I. S. S. N.: 2244-7385
E-mail: homotecia2002@gmail.com - Nº 1 – AÑO 22 Valencia, Martes 2 de Enero de 2024

Índice

Revista HOMOTECIA
© Rafael Ascanio H. – 2009
Hecho el Depósito de Ley.
Depósito Legal:
PPi2012024055
I. S. S. N.: 2244-7385

e-mail:
homotecia2002@gmail.com

Publicación Mensual
Revista de acceso libre

Publicada por:
CÁTEDRA DE CÁLCULO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DE CARABOBO

Nº 1 - AÑO 22 - Valencia, Martes 2 Enero de 2024

Diseño de Portada y Montaje Gráfico: R. A. H.
La mayoría de las imágenes que aparecen en esta publicación, son obtenidas de Google, Facebook y MSN, vía Internet.
Para el acceso a todos los números publicados de la Revista HOMOTECIA, conectarse al enlace: http://servicio.bc.uc.edu.ve/homotecia/index.htm

EDITORIAL

Enero 2024. Feliz Año Nuevo 2024 a todos nuestros lectores y amigos. De una vez felicitaciones a los docentes venezolanos, a pesar de las dificultades y todas las preocupaciones, por el Día del Maestro (próximo 15 de enero). Igualmente invitarlos a que sigan un año más la publicación de nuestra Revista HOMOTECIA (año 22 de su publicación). Esperamos podamos seguir manteniéndola interesante y entretenida.

Otra vez hablando sobre el Aprendizaje y la Inteligencia, tocaremos en este editorial las teorías generalistas de *Francisco Galton* y *David Weschler*, figuras con mentes privilegiadas que buscaron el modo de llevar la psicometría de los actos de inteligencia a los niveles de comprensión de las capacidades mentales. Fue el instrumento que más hizo progresar el conocimiento de la mente, el que más permitió a los educadores y profesores adaptarse a la realidad de cada persona.

a) Sobre *Sir Francis Galton* (1822 – 1911). Galton nació en Sparkbrook, Birmingham y murió en Londres. Estudió en el Hospital General de Birmingham del King's College de Londres y en el Trynity College de Cambridge. Fue primo de Charles Darwin y basó todos sus estudios en la teoría de su familiar, para entonces ya famoso.

Fue investigador y científico polifacético: en psicología, biología, estadística, en geografía y meteorología.

Entre sus libros cabe recordar sus estudios sobre la herencia del genio y publicaciones como "Herencia del Genio" y "La herencia natural"

Su gran interés fue el estudio del ser humano y las diferencias individuales. Por este motivo es considerado el padre de la Psicología Diferencial. Sus ideas se opusieron a las preponderantes de la época, que eran las de Wundt. En 1884 fundó su laboratorio antropométrico en Londres. Gracias a este laboratorio Galton consiguió numerosos datos sobre diferentes características de las personas. Al tener gran cantidad de datos empezó a utilizar los primeros análisis estadísticos.

Centró su interés en el estudio de las diferencias individuales de las capacidades humanas, siempre desde una perspectiva adaptativa y biológica. Para ello, se centró en el estudio de los procesos. Galton pensó en aplicar la selección artificial al ser humano para mejorar la raza, formalizándose así por primera vez la teoría de la eugenesia. Las repercusiones del movimiento eugenésico no tardaron en llegar. Éstas y otras teorías similares sirvieron de base a los ideales de superioridad de raza, como los del nazismo alemán, pero también tuvieron gran aceptación en el resto de Europa y en Estados Unidos. La práctica de la eugenesia se reflejó en la limpieza étnica, así como en la esterilización de personas con discapacidad intelectual, delincuentes, pobres o enfermos mentales.

A Galton le preocupaba además la medición de la inteligencia y propuso una técnica conocida como el «Método biométrico», que consiste en evaluar ciertas características físicas como la fuerza con que se aprieta el puño, la circunferencia del cráneo y el tiempo de reacción refleja. Si bien hoy el método biométrico ha perdido crédito, aún tiene cabida en la biología, las investigaciones sobre ejercitación física y la psicología fisiológica.

Puede decirse que el eje en torno del cual giró toda la obra de Galton fue su aseveración de que la herencia importa más que el medio. Aunque esta concepción general fue perdiendo popularidad entre los científicos de la conducta a lo largo del siglo XX

Galton demostró que una combinación de variables normales era a su vez normal, a pesar de no contar con una formación importante en matemáticas. Fue el primero en utilizar la estadística en sus observaciones. Midió la inteligencia aplicando la Campana de Gauss. Para él, el factor más importante de la inteligencia era el genético, mucho más que el ambiental. Subrayaba que la propia naturaleza o conjunto de dotaciones innatas del individuo, era un factor determinante del éxito en la vida. Comprobó que los padres que presentaban características sobresalientes tendían a tener hijos con iguales características, y pensó que esto debía explicarse fundamentalmente en función de la naturaleza y no de la crianza.

Planteó determinadas afirmaciones que luego serían seguidas y desarrolladas por psicólogos posteriores:

- Que la inteligencia es ante todo capacidad cognitiva general (factor g)
- Que la inteligencia se determina por factores genéticos y hereditarios
- Que la inteligencia se puede reducir a medidas relativamente seguras.

Es normal que en con estos presupuestos la idea que Galton desarrolló sobre el aprendizaje se convirtiera en algo un tanto mecánico, más poder en medir y calcular, incluso representar gráficamente, que para analizar en su naturaleza radical. A más inteligencia más capacidad de aprender. A menos inteligencia más difíciles son los registros. Pero todo ello en función de la capacidad de reflexión. Muchas cosas se pueden retener mecánicamente y no se puede razonar sobre ellas. Galton no entró en el estudio de las relaciones entre memoria e inteligencia, pero siempre sospechó que era estrecha a juzgar por los comportamientos de los sujetos que exploraba.

b) Sobre *David Weschler*. Otro especialista de la inteligencia fue David Wechsler (1896-1981), psicólogo rumano que se dedicó a desarrollar escalas de inteligencia. Las más conocidas y usadas son la WAIS (Wechsler Adult Intelligence Scale) y la WIS (Wechsler Intelligence Scale for Children)

Weschler nació en una familia judía en Lespezi, Rumania, y emigró con sus padres a los Estados Unidos cuando era niño. Estudió en el City College of New York y en la Columbia University, donde adquirió su grado de maestro en 1917 y su doctorado en 1925 bajo la dirección de Robert S. Woodworth. Durante la Primera Guerra Mundial trabajó con el ejército de los Estados Unidos para desarrollar tests que sirvieran para examinar a los nuevos reclutas. Mientras él mismo estudiaba bajo la tutela de Charles Spearman y Karl Pearson.

(CONTINÚA EN LA SIGUIENTE PÁGINA)

(VIENE DE LA PÁGINA ANTERIOR)

Después de cortos períodos en diferentes lugares y trabajos particulares, Wechsler se convirtió en el psicólogo jefe del Bellevue Psychiatric Hospital en 1932. Allí permaneció hasta 1967. Murió en 1981, cuando sus tests psicológicos ya eran altamente respetados.

Wechsler es mejor conocido por sus tests de inteligencia. La Escala Wechsler de Inteligencia para Adultos (WAIS) fue desarrollada por primera vez en 1939 y fue llamada entonces el Wechsler-Bellevue Intelligence Test. De esa escala test se derivó la Escala Wechsler de Inteligencia para niños (WISC) en 1949 y la Wechsler Preschool and Primary Scale of Intelligence (WPPSI) en 1967. Wechsler originalmente creó estos tests para saber más acerca de sus pacientes en la clínica Bellevue, al encontrar el entonces vigente test de Binet insatisfactorio. Estos tests están todavía basados en su filosofía de que la inteligencia es "la capacidad global de actuar intencionalmente, de pensar racionalmente y de interactuar efectivamente con el ambiente"

Para él la inteligencia es una cualidad de la mente y se manifiesta a través del modo de resolver las tareas que se encuentran en la vida, tanto las inesperadas como las que se ofrecen para probar su capacidad de respuesta. Es una facultad o poder unitario y singular que se puede detectar por las acciones que genera.

Se descubre por el modo como operan las funciones de la mente. Esas funciones son variadas. Algunas son:

- Su función adaptativa que permite al sujeto acomodarse al medio.
- Su relación con el funcionamiento cerebral.
- Su natural diferencia entre los individuos, siempre distintos.
- La no-observabilidad de la misma (excepto a través de sus indicadores)

En ese contexto es donde se sitúa la idea de Weschler sobre el aprendizaje del hombre en el mundo. Aprende muchos contenidos y de diversas formas, pero siempre poniendo en movimiento las funciones indicadas: adaptarse, realizar ejercicios, conexionarse con los otros individuos, adquirir acciones y dominar reacciones. El inteligente aprende con rapidez y con adaptación y hace todo con soltura. El no inteligente es lento en el tiempo y confuso en las respuestas.

Lo que hace Weschler es intentar hallar rasgos que puedan ser susceptibles de medida para poder luego describir según intensidades y según relaciones entre los rasgos. Así construye más fácilmente sus escalas.

Esas escalas de Wechsler introdujeron muchos conceptos novedosos e innovaciones al movimiento de los tests de inteligencia. Primero, Wechsler se apartó de la tradicional costumbre de hablar de puntos y de coeficientes. En lugar de eso, asignó un valor arbitrario de cien a la inteligencia media y agregó o sustrajo otros 15 puntos por cada desviación estándar por encima o por debajo de la media en la que se encontraba el sujeto.

Rechazando un concepto de inteligencia global (como el propuesto por Spearman y la cual trataremos en el próximo editorial), dividió el concepto de inteligencia en dos áreas principales: área verbal y área de ejecución (no-verbal), cada una subdividida y evaluada con diferentes subtests. Estas conceptualizaciones aún se reflejan en las versiones más recientes de las escalas de Wechsler.

La mayoría del material considerado para elaborar este editorial fue tomado vía Internet del Blog "*juandon. Innovación y conocimiento. La búsqueda del conocimiento en una Sociedad de la Inteligencia*", de la página Web http://contexto-educativo.com.ar/2001/1/gardner y del libro *"HABILIDADES INTELECTUALES. Una guía para su potenciación"* (2011) de Lisbeth Sánchez González y Rafael Andrade Esparza (Alfaomega Grupo Editor S. A. de C. V., México. ISBN: 978-607-7854-55-5).

Reflexiones

"Produce una inmensa tristeza pensar que la naturaleza habla mientras el género humano no escucha".

VICTOR HUGO (1802-1885)

Poeta, dramaturgo y novelista romántico francés, considerado como uno de los más importantes en lengua francesa.

Los Grandes Matemáticos

Robert Edgar Allardice

(1863 - 1924)

Nació el 2 de marzo de 1862 en Edimburgo, Escocia, y murió el 6 de mayo de 1928 en Palo Alto, California, EE. UU.

Estudió en la Universidad de Edimburgo y allí fue nombrado asistente del profesor Chrystal. Se desempeñó como profesor en Universidad de Stanford en California. Trabajó en geometría.

Los padres de **Robert Allardice** fueron Isabella Edgar Laing y John Allardice. Estudió matemática en la Universidad de Edimburgo, donde primero se matriculó en 1879 y obtuvo una maestría en 1882 después de haber quedado como el mejor alumno en su año en matemáticas. Él continuó investigando en matemática en la Universidad.

En 1883 Allardice fue nombrado Ayudante del Profesor de Matemática de la Universidad de Edimburgo, el profesor George Chrystal. Permaneció en este puesto hasta 1892, cuando fue nombrado Profesor de Matemática en la Universidad Junior Leland-Stanford, California, EE. UU. Esta Universidad, hoy conocida como Universidad de Stanford, fue inaugurada por el magnate de ferrocarriles Leland Stanford y su esposa, Jane Lathrop, un año antes de que Allardice tomara allí su cátedra. Permaneció en la Universidad de Stanford hasta su jubilación después de lo cual él continuó viviendo en Palo Alto, California.

Allardice fue miembro fundador de la Sociedad Matemática de Edimburgo, en febrero de 1883. Se desempeñó en el Comité de la Sociedad desde su fundación. Fue Vicepresidente de la Sociedad a partir de 1889 hasta 1890, también Presidente de la Sociedad en el periodo 1890-1891 y Editor de las *Actas* de la Sociedad Matemática de Edimburgo en el periodo 1891-1892, su último año en Edimburgo. Publicó unos veinte trabajos en las *Actas* de la Sociedad Matemática de Edimburgo durante los primeros diez años de la Sociedad. Por ejemplo, en la reunión celebrada el viernes 14 de marzo de 1884, leyó un trabajo sobre geometría de la superficie esférica; en la reunión del viernes 8 de enero de 1886 hizo referencia a un problema de simetría de una función algebraica; el 11 de febrero de 1887 hizo pública una nota sobre un teorema en álgebra; el 11 de enero de 1889 él contribuyó una nota sobre una fórmula en cuaterniones; el 13 de noviembre de 1891 su trabajo *Barycentric Calculus of Möbius* (Cálculo Baricéntrico de Möbius) fue leído por John Alison; en 14 de diciembre de 1901 su papel *Four Circles Touching a Common Circle* (Cuatro círculos tocan un círculo común) fue hecho público en la reunión por el Sr. George Duthie; y el 13 de enero de 1911, su trabajo *On the envelope of the directrices of a system of similar conics through three points* (Sobre la envolvente de las directrices de un sistema de cónicas similares a través de tres puntos) fue hecho público por E. D. Williamson.

Robert Edgar Allardice fue elegido a la Real Sociedad de Edimburgo el 16 de enero de 1888, sus proponentes fueron George Chrystal, Peter Guthrie Tait, Robert M. Ferguson y John Sturgeon Mackay.

An obituary, written by E M Horsburgh, appears in the *Proceedings* of the Royal Society of Edinburgh Volume 48, 1927-28, 209-10.

Un obituario, escrito por E. M. Horsburgh, apareció en las *Actas* de la Real Sociedad de Edimburgo (volumen 48, 1927-28, 209-10).

Referencias.-

1. E M Horsburgh, Robert Edgar Allardice, *Proc. Royal Soc. Edinburgh* **48** (1927-28), 209-10

Robert Edgar Allardice

Versión en español por R. Ascanio H. del artículo en inglés de J. J. O'Connor y E. F. Robertson sobre "Robert Allardice" (Noviembre 2007).
FUENTE: MacTutor History of Mathematics. [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Allardice.html].

EVALUACIÓN DIFERENCIADA EN NIÑOS Y NIÑAS CON NECESIDADES EDUCATIVAS ESPECIALES COMO HERRAMIENTA PARA LA INCLUSIÓN EDUCATIVA (Parte V).

Por: Msc María Laura Ascanio Rojas
(mlascanio23@hotmail.com)

Tomado de:

Evaluación Diferenciada en niños y niñas con necesidades educativas especiales como herramienta para la inclusión educativa. (Parte V). Capítulo IV. Hallazgos representativos. Pp. 46-63. Tesis de Maestría. Universidad de Carabobo. Facultad de Ciencias de la Educación. Bárbula, Enero 2016.

Índice:

CAPÍTULO IV

HALLAZGOS REPRESENTATIVOS

Consideraciones Generales

Durante el proceso etnográfico, se revisó minuciosamente cada una de las entrevistas realizadas a los tres docentes especialistas del Instituto Educacional Juan XXIII de tercer año de bachillerato, para así poder observar y analizar aquellos puntos en común que hacían referencia al uso de la evaluación diferenciada y al proceso de inclusión educativa. Una vez recopilada toda la información necesaria, se procedió a categorizar y triangular la información, de manera tal que se pudieran observar y considerar aquellos puntos de coincidencia en el proceso de inclusión educativa y el uso de la evaluación diferenciada que se viene presentando hace años en la institución. Asimismo, se encontraron siete categorías y sus respectivas subcategorías como se muestra en el siguiente cuadro:

CATEGORÍA	SUBCATEGORÍA
Evaluación	Evaluación Diferenciada
Lo psicosocial	Inclusión Educativa Adaptación Curricular Discurso Institucional Diversidad Cultural
Necesidad Especial	Física Psicológica
Proceso de Enseñanza - Aprendizaje	Didáctica Diferenciada
Logros Académicos	Evaluación Diferenciada
Organización Institucional	Adaptación Curricular Políticas de Evaluación
Didáctica	Didáctica Diferenciada

Posterior a lo señalado se construye mediante la interpretación y comprensión de la información recaudada una fase de identificación de significados o interpretación; donde se busca dimensionar el proceso de inclusión educativa del Instituto Educacional Juan XXIII y explorarlo paso a paso de forma minuciosa para poder abordar según Díaz (2011) la fase de construcción teórica; que no es más que construir una teoría sobre el proceso de inclusión en el ámbito educativo a partir de un fenómeno o situación que se presenta hace años en dicha institución. De manera tal que al finalizar el proceso de comprensión se pueda contar con una herramienta que permita a otros docentes y directivos aplicar el proceso de inclusión educativa utilizando la evaluación diferenciada como herramienta base.

Presentación de la información

Triangulación

Luego de analizar la información recopilada durante las observaciones y entrevistas a profundidad, se originaron categorías que dieron base para la conformación de subcategorías o áreas temáticas claves del proceso de inclusión, esto para dar paso a la triangulación de la información, la cual según Pérez (2000):

> …implica reunir una variedad de datos y métodos referidos al mismo tema o problema. Implica también que los datos se recojan desde puntos de vista distintos y efectuando comparaciones múltiples de un fenómeno único, de un grupo, y en varios momentos, utilizando perspectivas diversas y múltiples procedimientos… (s/p)

El desarrollo de la triangulación, obedeció al análisis de las tres entrevistas a profundidad realizadas a los docentes especialistas en su área del tercer año de bachillerato en el Instituto Educacional Juan XXIII. Se encontró que los tres docentes manejan el discurso de la Inclusión Educativa, que aplican evaluación diferenciada y que están de acuerdo con la pedagogía de la institución y el proceso de inclusión de estudiantes con NEE.

Por medio del proceso de triangulación también se pudo comprender la necesidad de que el discurso de inclusión educativa sea fortalecido constantemente por los directivos, departamento de orientación o psicología, coordinadores, profesores de aula y familia. De igual forma es necesario que toda la comunidad escolar esté abocada al proceso de inclusión ya que este debe darse de forma natural y no debe ser forzado; el proceso debe ir desde lo administrativo hasta la práctica docente y todo en la búsqueda de una educación significativa y de calidad; la idea es que el estudiante con NEE experimente logros académicos propios y esté a la par con sus iguales, fortalecer las líneas de comunicación entre los miembros de la comunidad escolar así como con el departamento de orientación y la familia.

A continuación se puede observar de manera esquematizada las categorías y subcategorías que se obtuvieron luego de analizar las entrevistas realizadas a los docentes del instituto Educacional Juan XXIII:

Síntesis interpretativa

En cuanto a las categorías encontradas se pueden detallar los siguientes aspectos:

1. **Evaluación**

Según los docentes la evaluación es clave en el proceso de enseñanza aprendizaje; es una forma de percibir los logros alcanzados por los estudiantes, debe ser adaptada a la condición cognitiva, neurológica y emocional que el estudiante presente; la idea es que cada uno de los estudiantes pueda alcanzar los niveles de logro más altos y necesarios en cada asignatura según sean las capacidades que ellos posean.

Esta área presenta desafíos para los docentes del instituto ya que cada evaluación debe ser adaptada a las destrezas y necesidades de cada estudiante; es decir, la evaluación diferenciada. También, el docente debe preparar al estudiante con evaluaciones formativas de superación y considerar todos los tipos de aprendizaje e inteligencias; para eso es necesario el apoyo constante del departamento de orientación y de un departamento de recursos pedagógicos físicos y virtuales.

En cuanto a su acción pedagógica, el docente debe plantear nuevas estrategias y métodos, de acuerdo al grupo de estudiantes con los cuales esté trabajando, tomando en cuenta los intereses de éstos, con el fin de propiciar el interés por las diversas asignaturas y la formación de los individuos integrales.

La evaluación es importante en el proceso de inclusión porque es la forma en que se puede medir si los estudiantes aprenden o no, y también la forma de saber si las estrategias diferenciadas que se aplican en el aula son efectivas en el momento de enseñar un contenido nuevo; de aquí que el docente puede excluir las estrategias que no hacen diferencia en el aula. La idea es que cada grupo escolar tenga estrategias adaptadas a sus necesidades.

2. **Lo psicosocial**

Para los docentes esta categoría representa cuatro aspectos importantes que toda institución debe tomar en cuenta en el momento que deciden implementar la inclusión educativa como una forma de vida; estos aspectos son:

- ✓ La Inclusión Educativa
- ✓ La Adaptación Curricular
- ✓ El Discurso Institucional
- ✓ La Diversidad Cultural

a. **La inclusión educativa**

Los docentes entrevistados definen este aspecto como algo necesario y justo para los estudiantes, ya que permite la integración de todos los individuos de una sociedad; debe partir de la naturalidad y no debe ser un proceso forzado ya que el estudiante debe sentirse cómodo y pueda desenvolverse en el aula para así lograr el proceso de inclusión educativa.

Este aspecto es importante porque todos los docentes de una institución que estén en pro de la inclusión educativa deben sentir que es una necesidad y deben ser los primeros en normalizar este proceso, ya que si no se maneja el mismo discurso el proceso de inclusión no será continuo y constante.

b. **La adaptación curricular**

La adaptación curricular es un trabajo grupal entre los docentes y el departamento de psicología de la institución; los docentes entrevistados consideran que la ayuda brindada por el departamento de orientación es esencial ya que proporciona las herramientas y estrategias necesarias para lograr un proceso educativo eficaz y eficiente. Sin embargo los mismos manifiestan la inquietud en el número de estudiantes por nivel; consideran que debe existir una relación sincera entre la capacidad del docente y el número de estudiantes con NEE ya que estos ameritan más exigencia por parte del profesor, por lo cual los grupos de aula deberían ser de veinte estudiantes aproximadamente; todo esto para garantizar educación de calidad.

La adaptación curricular es importante y pertinente en la inclusión educativa ya que toma en cuenta las necesidades académicas de cada estudiante con NEE así como las estrategias que el docente utilizará en el aula. En el Instituto Educacional Juan XXIII, se cuenta con un equipo numeroso de psicólogos que estudian de cerca cada caso y canalizan las acciones pedagógicas y legales que se deben tomar con cada estudiante. El departamento de orientación es tan importante en el instituto como la dirección y el grupo de coordinadores y docentes; cada decisión tomada en la institución que afecte a un estudiante debe ser considerada por el departamento de psicología y orientación.

c. El Discurso Institucional

Se pudo constatar que cada docente entrevistado maneja el mismo discurso de inclusión educativa; lo cual es importante ya que es necesario que todos los individuos que forman parte de una institución educativa estén familiarizados con el proceso de inclusión para que el mismo se realice de forma natural. De esta forma se sensibiliza a la comunidad; y el proceso de inclusión de los estudiantes con NEE y los docentes se vuelve el día a día.

d. La Diversidad Cultural

La diversidad cultural está presente; no se considera un aspecto; está arraigado en el corazón del instituto, ya no es una diferencia entre seres humanos; es algo real y normal, los estudiantes en su mayoría se sienten a gusto en la institución, sin importar género, raza, religión, cultura, etc. Esta diversidad cultural es proporcionada en un principio por la filosofía del Instituto Juan XXIII y la Organización del Bachillerato Internacional. Esto permite que el estudiante no sienta miedo de ser, de estar y de aprender. Los primeros precursores son los directivos del instituto.

3. Necesidad Especial

Para los docentes entrevistados la necesidad especial es un conglomerado de aspectos, características o requisitos que exigen algunos estudiantes fuera del estándar habitual. También consideran que son estudiantes con una condición diferente de percibir su proceso de aprendizaje; así como estudiantes que tienen una debilidad en la forma de adquirir conocimiento nuevo.

Es importante distinguir que es una necesidad especial; ya que aunque todos los seres humanos son únicos hay un grupo donde las formas de aprendizaje se salen de lo habitual y de lo que se considera estándar. Se debe entender que necesidad especial no es solo una debilidad sino que aquellos estudiantes que están por encima del promedio también presentan una condición distinta.

En la institución se presentan dos tipos de necesidades especiales: la física y la psicológica:

Se entiende por necesidad especial física cuando un estudiante presenta una condición que afecta la parte motora y sensorial del mismo; mas sin embargo no afecta su proceso cognitivo, en su caso varían las estrategias pedagógicas que se adecúan a su necesidad y capacidades físicas y sensoriales. Su problema no es de aprendizaje sino más bien de forma; un ejemplo son aquellos estudiantes con discapacidad auditiva, visual o parálisis parcial del cuerpo. Por su parte la necesidad especial psicológica se refiere a aquellas, que pueden ser causadas por diversas conductas del entorno del estudiante así como aquellas que afectan la capacidad cognitiva, tales como la discalculia, la dislexia, el síndrome de asperger, entre otras. Es importante diferenciarlas ya que las estrategias utilizadas por los docentes serán basadas en las condiciones y capacidades que sí posee el estudiante.

4. Proceso de Enseñanza-Aprendizaje

En cuanto al proceso de inclusión educativa se encontró que los profesores basan sus estrategias de enseñanza-aprendizaje en un aspecto que se denominará Didáctica Diferenciada. La didáctica diferenciada no es más que un conglomerado de dinámicas y estrategias pedagógicas que permiten que los estudiantes puedan expresar ideas y percibir el conocimiento desde otras perspectivas.

Entre las estrategias más utilizadas están aquellas que favorecen los aspectos sensoriales del estudiante; estrategias de enseñanza visuales, auditivas, quinestésicas, mapas mentales, vídeos, ensayos y actividades demostrativas. Llama la atención que la mayoría de las estrategias utilizadas por los docentes entrevistados están relacionadas con ambos hemisferios del cerebro, el izquierdo y el derecho, el lógico y el creativo.

Es importante que en un aula heterogénea se utilicen diversas estrategias ya que eso garantiza que se puedan poner en práctica todas las capacidades y habilidades de los estudiantes no solo con NEE sino aquellos que se consideran regulares. De esta forma el conocimiento no solo llega sino que permanece y transciende. Si se ve, se oye y se siente es real y forma parte del ser.

5. Logros Académicos

Los docentes entrevistados asocian las diversas modalidades de evaluación de un estudiante con alcanzar los objetivos de la asignatura; para los informantes la evaluación diferenciada permite flexibilizar y orientar la evaluación hacia como el estudiante aprende, permitiendo mejorar las estrategias de enseñanza; las cuales son útiles para poder evaluar el nivel de comprensión que tiene un estudiante. La Evaluación diferenciada está estrechamente relacionada con los logros académicos; ya que es importante que los estudiantes con NEE experimenten logros en su vida académica lo cual no siempre es posible al evaluarlos de la forma común. Si un estudiante jamás alcanza la más alta puntación y jamás se demuestra a sí mismo que tiene la capacidad, es casi imposible que él quiera experimentar esto el resto de su vida escolar, más bien el estudiante con NEE que no consigue logros académicos de ningún tipo se frustra y muchas veces es conformista, lo que afecta su vida personal y laboral. La idea de que el estudiante con NEE tenga éxito es demostrar que tiene la habilidad y la capacidad para afrontar desafíos el resto de su vida escolar y laboral.

6. Organización Institucional

La organización institucional es base para el desarrollo del proceso de inclusión en la institución, los docentes manifiestan que tanto el departamento de orientación como los directivos, deben estar abocados y atentos al proceso de inclusión educativa, asimismo evaluar que el proceso se esté dando en todos los niveles del instituto.

Se encontró que los docentes consideran que jerarquizar y discernir sobre qué estudiantes son diferenciados y cuáles son estándar es un proceso que escapa de las manos y responsabilidades del docente de aula; por lo que el apoyo de todos los coordinadores y psicopedagogos es esencial para que la inclusión sea real y no solo un formalismo; también, que no es suficiente solo con promover la inclusión educativa sino que antes de aplicar este proceso es necesario contar con las herramientas óptimas para el proceso, por lo que es necesario la capacitación continua del personal en cuanto a las herramientas y estrategias a utilizar.

La organización institucional es el corazón del proceso de inclusión educativa. Si no se trabaja con bases, herramientas, ni se instruye a todo el personal que labora y forma parte del instituto (directores, coordinadores, tutores, profesores de aula, psicólogos, familia, personal administrativo, personal de mantenimiento), es imposible que el proceso de inclusión se dé, ya que el discurso debe llevarse día a día.

Didáctica

En cuanto a la didáctica, los docentes entrevistados no hacían énfasis en alguna técnica específica, sin embargo; hacían énfasis en la diferenciación de técnicas pedagógicas durante una misma unidad, la idea es que los estudiantes logren adquirir conocimientos nuevos con aquella herramienta, técnica, evaluación y estrategia más adecuada para su aprendizaje. Es importante porque permite escoger al estudiante la herramienta que mejor se adecue a sus necesidades y a partir de allí logren reconocer la técnica de estudio necesaria para cada momento según sea el caso.

La didáctica diferenciada no solo permite un mejor aprendizaje en los estudiantes con NEE sino que colabora al aprendizaje significativo que menciona Ausubel en los estudiantes regulares.

Construcción Teórica:

Evaluación diferenciada, una herramienta para la inclusión educativa como posibilidad teórica.-

La investigación etnográfica es en esencia una investigación ideográfica: trata de comprender la complejidad estructural de una entidad concreta, de una situación específica, de un grupo o ambiente particular. Por supuesto, en la medida en que estén bien identificados y descritos los métodos de investigación, las categorías de análisis y las características de los fenómenos y de los grupos, serán más confiables las comparaciones y las transferencias a otras situaciones y grupos. (Martínez, 2005, s. p.).

Durante dos años se realizó una investigación etnográfica en el Instituto Educacional Juan XXIII con sede en Valencia, estado Carabobo, la cual arrojó resultados significativos en el campo de la inclusión educativa. Después de un arduo proceso de observación y entrevistas a profundidad se pudo apreciar que el proceso de inclusión educativa es mucho más que la aplicación de una evaluación diferenciada; sin embargo, este tipo de evaluación es el resultado final de un proceso de sensibilización social que permitirá que los estudiantes con NEE obtenga logros académicos y puedan alcanzar los mismos objetivos que un estudiante regular.

El primer paso para el proceso de inclusión es que sean los directivos de la institución los que decidan y conviertan el proceso de inclusión educativa en algo diario, perceptible, funcional y real; y que este discurso sea llevado a cada individuo de la comunidad escolar, es decir desde los docentes, el personal administrativo, representantes, comunidad educativa en general y personal de mantenimiento; eso con la finalidad de que el discurso de inclusión educativa no se quede solo en discurso sino que pase a ser parte del día a día; es decir, lo común; para que de esta manera el proceso de inclusión se perciba como algo natural.

El proceso de inclusión estará fundamentado en siete aspectos a considerar en la institución, los cuales son esenciales para dicho proceso. Estos aspectos son:

- ✓ Evaluación
- ✓ Lo psicosocial
- ✓ Necesidad Especial
- ✓ Proceso de Enseñanza – Aprendizaje
- ✓ Organización Institucional.
- ✓ Logros Académicos
- ✓ Didáctica.

Evaluación

La evaluación es importante en el proceso de inclusión porque es la forma en que se puede medir si los estudiantes aprenden o no, y también la forma de saber si las estrategias diferenciadas que se aplican en el aula son efectivas en el momento de enseñar un contenido nuevo; de aquí que el docente puede excluir las estrategias que no hacen diferencia en el aula. La idea es que cada grupo escolar tenga estrategias adaptadas a sus necesidades. Para esto es necesario un departamento de orientación que apoyará al docente con las diversas estrategias según la condición del estudiante con NEE.

Lo psicosocial

Posee a su vez cuatro aspectos importantes, estos son:

- ✓ La Inclusión Educativa
- ✓ La Adaptación Curricular
- ✓ El Discurso Institucional
- ✓ La Diversidad Cultural

La inclusión educativa

Este aspecto es importante porque todos los docentes de una institución que estén en pro de la inclusión educativa deben sentir que es una necesidad y deben ser los primeros en normalizar este proceso, ya que si no se maneja el mismo discurso el proceso de inclusión no será continuo y constante.

La adaptación curricular

La adaptación curricular es importante y pertinente en la inclusión educativa ya que toma en cuenta las necesidades académicas de cada estudiante con NEE así como las estrategias que el docente utilizará en el aula. La institución debe contar con un equipo numeroso de psicólogos que estudien de cerca cada caso y canalizan las acciones pedagógicas y legales que se deben tomar con cada estudiante. El departamento de orientación es tan importante en el instituto como la dirección y el grupo de coordinadores y docentes; cada decisión tomada en la institución que afecte a un estudiante debe ser considerada por el departamento de psicología y orientación.

El Discurso Institucional

Todos los docentes de la institución deben manejar el mismo discurso de inclusión educativa; lo cual es importante ya que, aún más, es necesario que todos los individuos que forman parte de la institución educativa estén familiarizados con el proceso de inclusión para que el mismo se realice de forma natural. De esta forma se sensibiliza a la comunidad; y el proceso de inclusión para los estudiantes con NEE y los docentes se vuelve natural.

La Diversidad Cultural

La diversidad cultural debe estar presente y no se considerará un aspecto; esto permite que el estudiante no sienta miedo de ser, de estar y de aprender. Los primeros precursores son los directivos del instituto.

Necesidad Especial

Es importante distinguir que es una necesidad especial; ya que aunque todos los seres humanos son únicos, hay un grupo donde las formas de aprendizaje se salen de lo habitual y de lo que se considera estándar. Se debe entender que necesidad especial no es solo una debilidad sino que aquellos estudiantes que están por encima del promedio también presentan una condición distinta.

Proceso de Enseñanza-Aprendizaje

El docente debe, en cuanto al proceso de inclusión educativa, basar sus estrategias de enseñanza-aprendizaje en lo que quedaría denominada Didáctica Diferenciada. Esta no es más que un conglomerado de dinámicas y estrategias pedagógicas que permiten que los estudiantes puedan expresar ideas y percibir el conocimiento desde otras perspectivas.

Las estrategias a utilizar deben favorecer los aspectos sensoriales del estudiante: estrategias de enseñanza visuales, auditivas, quinestésicas, mapas mentales, vídeos, ensayos y actividades demostrativas. Estas estrategias deben buscar que los alumnos activen ambos hemisferios del cerebro, el izquierdo y el derecho, el lógico y el creativo.

Sumamente importante es que en un aula heterogénea se utilicen diversas estrategias, así se garantiza que se puedan poner en práctica todas las capacidades y habilidades de los estudiantes no solo con NEE sino aquellos que se consideran regulares. De esta forma el conocimiento no solo llega sino que permanece y transciende. Si se ve, se oye y se siente es real y forma parte del ser.

Logros Académicos

La Evaluación diferenciada está estrechamente relacionada con los logros académicos; es importante que los estudiantes con NEE experimenten logros en su vida académica lo cual no siempre es posible si se les evalúa de la forma común. Si un estudiante con NEE jamás alcanza la más alta puntación y jamás se demuestra a sí mismo que tiene la capacidad, es decir no consigue logros académicos de ningún tipo se frustra y muchas veces se conforma con estos resultados, posiblemente lo afectará en su vida, tanto en lo personal como en lo laboral. La idea de que el estudiante con NEE tenga éxito, es que él mismo se demuestre que tiene la habilidad y la capacidad para afrontar desafíos el resto de su vida escolar y laboral.

Organización Institucional

La organización institucional es base para el desarrollo el proceso de inclusión de la institución, el departamento de orientación así como los directivos deben estar abocados y atentos al proceso de inclusión educativa, asimismo evaluar que el proceso se esté dando en todos los niveles del instituto.

Jerarquizar y discernir sobre qué estudiantes son diferenciados y cuáles son estándar es un proceso que escapa de las manos y responsabilidades del docente de aula; es decir no le toca a este iniciar y desarrollar este proceso. La determinación de unos y otros debe ser realizada apoyado en el trabajo en conjunto de todos los coordinadores y psicopedagogos de la institución, buscando esencialmente que la inclusión sea real y no solo un formalismo. De hecho, no es suficiente que la institución solo manifieste que promueve la inclusión educativa sino que debe estar preparada para que la misma ocurra. Por ello, es necesario contar con las herramientas óptimas para el proceso, y en esto se incluye la necesaria capacitación continua del personal en cuanto a las herramientas y estrategias a utilizar.

La organización institucional es el corazón del proceso de inclusión educativa, sino se trabaja con bases, herramientas, ni se instruye a todo el personal que labora y forma parte del instituto (directores, coordinadores, tutores, profesores de aula, psicólogos, familia, personal administrativo, personal de mantenimiento), es imposible que el proceso de inclusión se dé, ya que el discurso debe llevarse al día a día.

Didáctica

Se debe hacer énfasis en la diferenciación de técnicas pedagógicas durante una misma unidad, la idea es que los estudiantes logren adquirir conocimientos nuevos con aquella herramienta, técnica, evaluación y estrategia más adecuada para su aprendizaje. Es importante porque permite escoger al estudiante la herramienta que mejor se adecúe a sus necesidades y a partir de allí logre reconocer la técnica de estudio necesaria para cada momento según sea el caso.

La didáctica diferenciada no solo permite un mejor aprendizaje en los estudiantes con NEE sino que colabora al aprendizaje significativo que menciona Ausubel en los estudiantes regulares.

Estos siete aspectos son fundamentales en el proceso de inclusión educativa, son complejos y tienen más de veinte años siendo parte del discurso de esa institución. La evaluación diferenciada no es más que el resultado final de un trabajo arduo constante y que jamás finaliza.

Es importante entender que aunque existan didácticas diferenciadas, evaluaciones diferenciadas, apoyo psicológico, docente y de los directivos, es fundamental entender que si los padres o representantes del estudiante con NEE no internalizan ni aceptan la condición del niño, niña o adolescente; ni tampoco agotan los recursos para que el proceso de inclusión sea completo, es muy difícil que ocurra, por eso se hace énfasis en entender como un todo el proceso de inclusión y hasta se podría decir que debería ser la razón principal por la cual un docente se dedica a la enseñanza. Ese sí sería el trabajo más gratificante, cambiar las formas de enseñanza-aprendizaje para hacer un mundo mejor.

REFERENCIAS

- Martínez, M. (2005). El Método Etnográfico de Investigación. Universidad Simón Bolívar. Caracas. Disponible: http://prof.usb.ve/miguelm/metodoetnografico.html
- Pérez, J. (2000). La triangulación analítica como recurso para la validación de estudios de encuesta recurrentes e investigaciones de réplica en Educación Superior. [Revista en línea] RELIEVE, vol. 12, Nº 2. Disponible en: http://www.uv.es/RELIEVE/v12n2/RELIEVEv12n26.htm. Consultado en septiembre, 16-02-2015.

Continúa en el próximo número…

EL INFINITO ¿ANTINOMIA O APODÍCTICO? HACIA UNA EPISTEMOLOGÍA DE LA NOCIÓN DE INFINITO ACTUAL. ANÁLISIS DE LOS MODELOS INTUITIVOS Y ESQUEMAS CONCEPTUALES ASOCIADOS AL DESARROLLO HISTÓRICO DE ESTA NOCIÓN. (Parte III).

Por: **Msc Romstine Cescutti**
(romstinecescutti@gmail.com)

Tomado de:
El infinito ¿antinomia o apodíctico? Hacia una epistemología de la noción de infinito actual. Análisis de los modelos intuitivos y esquemas conceptuales asociados al desarrollo histórico de esta noción. (Parte III). Capítulo II. Marco Teórico. Pp. 37-144. Tesis de Maestría. Universidad de Carabobo. Facultad de Ciencias de la Educación. Escuela de Educación. Julio 2015.

Índice:

CAPÍTULO II
MARCO TEÓRICO

Con el propósito de fundamentar la presente investigación, se elaboró el marco teórico que de acuerdo a Hernández, Fernández y Baptista (2008, p.64) "Es un compendio escrito de artículos, libros y otros documentos que describen el estado pasado y actual del conocimiento sobre el problema de estudio. Nos ayuda a documentar cómo nuestra investigación agrega valor a la literatura existente", con lo cual se sustenta teóricamente el estudio exponiendo y analizando las diversas teorías y conceptualizaciones, así como también, las investigaciones y los antecedentes relacionados al problema de estudio. Ahora, una vez dilucidado este aspecto se comienza con su elaboración:

2.1. Antecedentes de la investigación

Son diversas las investigaciones educativas referidas a la concepción del *Infinito matemático* entre las cuales son menester mencionar:

Valdivé y Garbin, (2008); analizaron los procesos de conceptualización de la noción infinitesimal en estudiantes de Licenciatura en Ciencias Matemáticas y la asignatura Análisis Matemático, a partir del estudio de la evolución histórico – epistemológica del concepto infinitesimal para interpretar factores determinantes de los procesos de construcción y concepción de los infinitesimales por parte de los alumnos de un curso de Análisis Matemático. Mediante este trabajo se logró una aproximación a la identificación, descripción y caracterización de siete esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal, de los cuales cinco de ellos están ligados a una diferencia, a una razón aritmética, a un incremento, a un símbolo y a una función y, los dos restantes son identificados como esquemas epistemológicos previos, es decir experiencias previas que le dan sentido a la noción infinitesimal.

Asimismo, Belmonte, (2009); tuvo como propósito observar y analizar el proceso de transición que tiene lugar en la reestructuración cognitiva del esquema conceptual de infinito a nivel colectivo bajo una perspectiva transversal. Llegando a la conclusión que las dificultades para comprender cómo se establece la noción de infinito en la mente del individuo y cómo evoluciona dicha noción sometida al proceso de enseñanza y aprendizaje se deben, dentro de tantos factores, a la propia naturaleza del concepto, que desde el principio presenta un carácter sinonímico de otras expresiones ya existentes en el vocabulario del niño o joven; por el contrario, esto no ocurre de igual manera con la nociones matemáticas más complejas como, por ejemplo, la idea de Límite.

Por su parte, Crespo, C., Homilka, L. y Lestón, P. (2009); presentaron los resultados de una experiencia llevada a cabo con estudiantes de escuela media en relación a las ideas construidas fuera de escenarios escolares, en este caso la idea de *Infinito*, y su influencia cuando llegan a contextos escolares matemáticos, el trabajo fue orientado desde la perspectiva socioepistemológica, puesto que considera a la problemática de estudio como *"el examen de los fenómenos que se suceden cuando el saber matemático, construido socialmente fuera de la institución escolar se introduce y se desarrolla en el sistema de enseñanza"* (Farfán, 2003, citado por Crespo et al., 2009). Como conclusión, se obtuvo que conceptos como el de *Infinito*, se construyen fuera de la escuela de manera intuitiva y no matemático, y que cuando entran en el aula, se manifiestan de manera conflictiva, generando así obstáculos epistemológicos al tratar ideas relacionas al *Infinito*, esto es si no se exploran las construcciones anteriores.

Posteriormente, Belmonte y Sierra (2010); elaboraron una investigación con la que se concentraron en estudiar los modelos intuitivos que funcionan ante situaciones que implican la noción de *Infinito*, así como el análisis de su evolución a lo largo de los niveles educativos considerados que va desde la educación primaria hasta el primer curso de enseñanza universitaria. Como resultado de este trabajo se logró identificar tres nuevos modelos que operan cuando un sujeto se enfrenta a preguntas o problemas que requieren del uso de la noción de infinito para su resolución, estos modelos son: los modelos de indefinición, modelos de divergencia y modelo de acotado – finito / no acotado – infinito. Además, se evidenció que estos modelos entran en conflictos bajo determinados contextos, lo que trae consigo contradicciones internas que se reflejan a través de respuestas incoherentes.

Igualmente, Fedriani y Tenorio (2010); realizaron una aproximación a las diferentes visiones que se tienen y se han tenido del concepto de infinito en la historia de la matemática, así como también explicar el papel de *Infinito* en la sociedad actual y comparar la percepción por que esta tiene con respecto el rigor matemático. Como consecuencia del proceso de investigación realizado por los autores se obtuvieron las siguientes conclusiones: primero, en la sociedad, las referencias al infinito están relacionadas más con la trascendencia o con intentos de conseguir notoriedad. Segundo, la comprensión de *Infinito* más accesible para cualquier individuo es la geométrica, puesto que no resulta tan abstracta y por último, la asimilación de infinito representa un problema educativo de difícil tratamiento, pero que puede abordarse con resultados positivos desde el convencimiento de que la idea de infinitud evoluciona con el proceso de aprendizaje y que relaciona distintas materias o disciplinas entre sí.

De igual manera, la investigación realizada por Cescutti y Ortega (2010); donde se analizaron los obstáculos epistemológicos asociados a la noción actual de *Infinito* desde la perspectiva de la teoría de las situaciones didácticas de Guy Brusseau, así como también de los estudios realizados por Bruno D` Amore. Como consecuencia de esta investigación se obtuvieron las siguientes conclusiones: los estudiantes utilizan estructuras o modelos de pensamiento matemático, incluyendo su aplicación, sin conocer lo que verdaderamente significan, lo que da lugar a una actuación algorítmica por parte del sujeto en los procesos matemáticos.

Por otro lado, también se determinó que los obstáculos epistemológicos que se manifiestan en los estudiantes, en primer lugar, se dan través del fenómeno de *deslizamiento* y, en segundo lugar, por medio del fenómeno de *aplastamiento*, lo que trae consigo que los métodos de enseñanza relacionados con la idea de Límite son más reproductivos que productivos, puesto que el estudiante repite los procedimientos enseñados por el profesor siguiendo un algoritmo o "receta", debido a la no utilización de los sistemas de representación semiótica, originando el surgimiento de errores, como el caso del fenómeno de *deslizamiento*, el cual está ligado al pasaje entre diferentes contextos.

Fernandez, C. (2010); realiza una construcción lógica de la secuencia numérica en un contexto ordinal, haciendo especial ahínco por el sistema de relaciones lógicas existente entre sus términos. Se obtuvieron las siguientes conclusiones: Primero las distintas interpretaciones epistemológicas sobre la secuencia numérica se han reflejado en la enseñanza del número en la escuela, por tal motivo los planteamientos conjuntistas introducen los conceptos de cardinal y de correspondencia, con lo cual se producen intentos por reducir la aritmética a la lógica y el número natural a las clases, mientras que los planteamientos aritmetistas respaldan el número ordinal. Segundo, que el dominio de la secuencia numérica es significativa desde la perspectiva relacionada a los modelos ordinales de la lógica formal del número natural, es decir, las competencias ordinales que manifiestan los niños están en relación con los axiomas de los modelos ordinales del número natural.

Por su parte, D’Amore B. (2011); en su investigación *La didáctica del Infinito matemático* se plantea un resumen y análisis de resultados de sus investigaciones anteriores sobre esta noción, así como también evidenciar brevemente los obstáculos que se han manifestado en el desarrollo histórico de este difícil argumento, hasta la demostración de Cantor. Como resultado de esta investigación se obtuvo que la demostración del teorema de Cantor se revela por encima de las capacidades normales de aprendizaje de los estudiantes de las escuelas superiores que aún no han seguido un curso del Análisis y que esto se debe sobre todo a obstáculos de naturaleza epistemológica y didáctica, como se ha mostrado, y, a su vez, debido a dos pasajes en la demostración (deslizamiento y manipulación de las cifras). Asimismo, Las demostraciones de los otros dos teoremas (“segmentito-segmentote” y “formas periódicas”, así denominados por los investigadores) resultaron más inteligibles, pero igualmente manifestaron la existencia de obstáculos de diferente naturaleza, como por ejemplo de tipo curricular y cognitivo general.

De igual modo, Fuentes y Oktaç (2011); en esta investigación se aborda él cómo “niñas o niños talento en matemáticas” comprenden el *Infinito* al abordar la paradoja de las pelotas de tenis, con base en una descomposición genética de dicha paradoja. Además, se discutieron y explicaron algunos aspectos teóricos relacionados con las construcciones y mecanismos mentales relacionados con esta noción; así como la manera en que dicho concepto puede ser construido cognitivamente. Como resultado de este trabajo se obtuvo que los sujetos de estudio poseen las herramientas matemáticas para abordar el problema, pero sólo como un algoritmo, puesto que no logran relacionar estas ideas con el contexto del problema que se les plantea, por lo que se evidencia la necesidad de formular estrategias metodológicas que generen desde temprana edad la encapsulación de los números naturales como un proceso reiterativo *Infinito* en un objeto o unidad, esto es estrategias que permitan la consolidación de la noción de de *Infinito actual*.

En este orden de ideas, es importante señalar el trabajo realizado por Salat (2011); el cual se propuso estudiar el pensamiento y el método deductivo aplicado por los estudiantes al enfrentarse a conjuntos infinitos, así como también la construcción y uso de proposiciones por medio de algunos axiomas intuitivos relacionados a la teoría de conjuntos. Se obtuvo como conclusión que los estudiantes que ya habían finalizado el bachillerato a los cuales se les aplicó el instrumento, evidenciaron una tendencia a emplear el principio de que todo conjunto es mayor que cualquiera de sus partes al tratar con conjuntos infinitos, lo cual representa un error; mostrando que la noción de *Infinito* manejado por Cantor, de acuerdo Salat (2011), “aparece tardíamente en la formación matemática de los estudiantes. Quizá porque el concepto de infinito es una construcción del hombre que va más allá de la realidad material” (p. 82).

Cabe destacar el estudio realizado por Fernández (2011); en este se describen cómo los estudiantes expresan verbal y simbólicamente sus concepciones intuitivas sobre la noción de Límite de una función en un punto, y además cómo interpretan y responden a tareas vinculadas con dicho concepto, analizando el significado de determinados términos claves que expresan diferentes facetas vinculadas al concepto de límite, centrándose en delimitar, describir y caracterizar los significados puestos de manifiesto por estudiantes sobre el concepto de límite finito de una función en un punto, al inicio de sus estudios sobre análisis matemático. Como resultado se comprobó que aparte de los significados del concepto de Límite que manifiestan algunas investigaciones anteriormente realizadas, además se asientan nuevos componentes que enriquecen y amplían dichos significados, los cuales surgen de manera natural o inducida por los diversos ítems del cuestionario.

Así como también, otros aspectos que sobresalen en los argumentos manifestados por los sujetos, cabe mencionar los siguientes: “identificación del límite con la imagen del punto; límite como lugar donde cambia de manera brusca la función, ya sea de dirección o un salto; y errores ligados a la confusión de la variable independiente y dependiente” (Fernández, 2011, p. 64). Por otro lado, se identificó en los individuos que el empleo de las expresiones “aproximarse infinitamente” y “no se puede realizar la operación de la función” atiende primero al “uso implícito del sistema de representación numérico y el uso de la expresión denota usos implícitos del sistema de representación gráfico (“hueco”) y simbólico (“indeterminación”)”(Fernández, 2011, p. 60 – 61).

En suma, todas estas investigaciones convergen en la existencia de obstáculos, ya sean de origen epistémico o didáctico en relación a la noción de *Infinito*, planteando los errores que frecuentemente los individuos cometen en la resolución de problemas que involucre tópicos y contenidos del análisis matemático, así como también geométricos y algebraicos donde se haga uso de esta noción, tal es el caso de las nociones de Número Real, Función, Cardinalidad, Límite y Continuidad. En donde la formación de los modelos intuitivos y los esquemas mentales de los sujetos juegan un papel preponderante para la comprensión y encapsulación de los objetos matemáticos, por ende estos deben ser analizados de manera metódica, epistemológica y didáctica planteándose, además, los conflictos de origen cognitivos abordado por la psicología.

2.2 Fundamentación teórica.

2.2.2 Análisis histórico de la noción de Infinito.

Antes de iniciar a dilucidar con relación a este tópico se debe tener presente algunos aspectos fundamentales que son pertinentes aclarar, primeramente hay que considerar *“Lo que hay y lo que es”*, para ello hay que ver lo que se entiende por realidad; la realidad no es más que aquello que se encuentra o se puede encontrar de un modo u otro, así pues, dicho concepto designa lo que hay. Pero no hay que caer en el equívoco de confundir “lo que hay” con “lo que existe”, puesto que el verbo existir es un modo muy específico de haber, propio de ciertas cosas (Marías, 1971).

Aunque, además, se debe advertir que en la teoría de entes se pueden distinguir cuatro tipos de objetos, cada uno con su propia estructura óntica, a saber, se tienen *“los objetos reales”* (*las cosas*), *“los objetos ideales”* (objetos *que son*), estos dos agrupados en la estructura óntica del ser *que es*, *“los valores”* (objetos *que valen*) y *“la vida”* misma (objeto metafísico que alude a la *existencia*), en la cual se encuentran los demás objetos, puesto ocupa un plano ontológico más profundo que el de las otras tres esferas ontológicas (*objetos reales*, *objetos ideales* y *valores*) (García, 2005), debido a que, estas últimas, en palabras de García (2005):

“están en” la vida; pero ella, la vida, no está en ninguna parte. Por consiguiente, ontológicamente hay una diferencia esencial entre el ente de las cosas reales, el ente de los objetos ideales, el ente de los valores y el ente vida; y es que esos tres primeros entes son entes “en” la vida, mientras que la vida no es “en”, no está “en”. (p.394)

Sentado esto, el hombre en su interacción con las cosas tiene que habérselas con lo que hay (cosas y objetos ideales), ya que pertenece a su esencia en pocas palabras “lo que hay” es componente suyo, en tal sentido, en que la manera de ser “yo mismo” es el marco de referencia a lo otro que yo, es decir, yo solo soy teniendo que habérmelas con lo que hay, en el cual ese “tener que” en sí mismo no es más que lo que le confiere su carácter real a las cosas. Por ende, el conocimiento se cimienta o parte del supuesto de que hay ser previo a todo conocimiento, puesto “lo que es” es una interpretación de “lo que hay”, o sin más el ser es el ser de lo que hay, de donde surge el “ente” como contemplación de lo que verdaderamente hay, Parmenides (citado por Marías, 1971, p. 253) señala: “El ente es y que el único camino de que se puede hablar es este: que es, solo se puede hablar de lo que hay diciendo que es”.

En conclusión el hombre en su hecho de conocer “lo que hay” (cosas) y el modo en que se comportan estas por lo que tienen de suyo, surge la interpretación de lo que hay como lo que es, de donde surge que esas cosas que son se convierten en entes. Con relación a esto, Marías (1971) dice:

Cuando trato de conocer o, lo que es lo mismo, de averiguar lo que las cosas son, parto ya del ser que creo tienen; el mero preguntarme por el ser pone ya su ámbito, el que hace posible la pregunta y le da sentido, y mientras permanezco en él lo identifico, sin más, con lo que hay. Pero este significa, literalmente, quedarse en una interpretación, sin advertir que lo es y confundirla, por lo tanto, con la realidad. Por eso, las cosas cambian de aspecto cuando se toma el ser como interpretación de la realidad; en términos aun más claros, cuando se pregunta uno por el ser de las cosas. (p.255)

Es por ello, en segundo lugar, se tiene que advertir que una interpretación también es una realidad, por el contrario lo que es la realidad de que es interpretación no es la interpretación como tal, por tal motivo es que no se debe confundir una teoría o interpretación de algo con ese algo. De acuerdo a esto, Marías (1971) plantea "las cosas, por tanto, tienen ser, pero no por sí; el ser es algo que hago yo, pero con las cosas; es decir, mi hacer que las cosas (las cosas que hay) sean" (p.258). Para luego, afirmar más adelante lo siguiente:

Por esta razón, que es decisiva, todo conocimiento de *entes* se funda en una reflexión sobre el ser mismo, de manera que la irrupción de cada uno de los modos de haber no solo requiere una nueva idea del ser, sino una reelaboración de la anterior, de tal suerte que en cada momento se pueda "dar razón" desde el ser de todos los entes,…, en suma: Solo puede hablarse de una idea del ser en cuanto está dando razón de lo que hay (p.259).

La dificultad de esta distinción radica en que como el sujeto o investigador no es el autor original de esas interpretaciones, sino que son fruto de la ciencia, la sociedad e historicidad, es decir, su modo de existencia es social e histórica, así como también científica, como por ejemplo las creencias que les son dadas o recibidas como una realidad misma con la que se encuentra y tiene que habérselas, y que no son obra del, sino todo lo contrario, por lo tanto, les son ajenas. Como no se puede desechar las interpretaciones y mucho menos abolirlas, entonces se tienen que tomar en consideración y conocerlas como lo que son, simples interpretaciones para así dejar de confundirlas con la realidad a que hacen referencia (Marías, 1971).

Siguiendo este orden de ideas, se tiene que al investigar el desarrollo y la construcción de ciertos conceptos matemáticos, que no son más que interpretaciones de entes abstractos, se debe tomar en consideración el estudio de la evolución del concepto ligado a un determinado ente, por medio de un análisis reflexivo, histórico y crítico, examinando así los conflictos o problemas que surgieron en el proceso, explicando e identificando además los obstáculos que se suscitaron al momento de su concepción, para así acceder en la medida de lo posible a su ser, es decir, *a lo que es*. Por tal motivo, a continuación se realiza un estudio de los antecedentes históricos – epistemológico de la noción de *infinito* matemático en su dualidad *potencial* y *actual*.

Preludio. Egipto y Mesopotamia, las civilizaciones de los valles fluviales:

Cuidadoso cálculo para penetrar en las cosas,
en el conocimiento de todas las cosas que existen, misterios...
todos los secretos. Este libro fue copiado en el año 33, mes cuarto
de la estación de la inundación (bajo la majestad del Rey del (Alto y)
Bajo Egipto, "A-user-Rê", goce de vida, fielmente de un escrito
antiguo realizado en el tiempo del Rey del Alto
(y Bajo) Egipto, (Ne-mal) 'et-Rê'. Mirad,
el escriba Ahmés escribió esta copia."

La noción de *Infinito* en un principio pudo estar sujeta al origen de nociones primitivas ligadas a los conceptos de número, magnitud y forma, en cuanto a esto Boyer (1986) señala que "el desarrollo del concepto de número fue efectivamente un largo y lento proceso (…) por el dato de que algunas lenguas, incluido el griego, han conservado en su gramática una distinción tripartita entre uno, dos y más de dos" (p. 21), para seguidamente opinar "…evidentemente nuestros antepasados muy primitivos contaban al principio solo hasta dos, y cualquier conjunto que sobrepasaba este nivel quedaba degradado a la condición de muchos" (p. 21). Sin embargo, cabe mencionar que:

> Darwin en su Descent of Man (1371), hace notar que algunos de los animales superiores tienen facultades tales como memoria y alguna forma de imaginación, y actualmente resulta incluso más claro que la capacidad para distinguir número, tamaño, orden y forma (…) no son propiedad exclusiva del género humano. Experimentos llevados a cabo con cuervos y cornejas, por ejemplo, han demostrado que por lo menos algunos pájaros pueden distinguir entre conjuntos que contengan hasta cuatro elementos. (Boyer, 1986, p. 19)

Por otro lado, las grandes civilizaciones caracterizadas por el uso de los metales nacieron originalmente en los valles fluviales ubicados en las regiones de Egipto, Mesopotamia, India y China (Boyer, 1986). Sin embargo, esta investigación toma en cuenta, para el estudio de los inicios de la noción de *Infinito*, los albores del pensamiento humano en Egipto y Mesopotamia, ya que se poseen registros confiables y avalados por estudios históricos reconocidos; en relación a esto Boyer (1986) explica:

> Los registros cronológicos correspondientes a las civilizaciones de los valles de los ríos Indo y Yangtze son muy inseguros, pero en cambio se dispone de una información bastante fiable acerca de los pueblos que vivieron a lo largo del Nilo en el «creciente fértil» de los ríos Eufrates y Tigris. (p. 29)

Es notorio señalar, que las dos civilizaciones, mencionadas anteriormente, ya conocían una forma de escritura primitiva antes que culminara el cuarto de milenio, es decir, el 4000 A.C. Estos tipos de pictogramas fueron evolucionando de una manera progresiva para dar a lugar a una escritura con símbolos sencillos (Boyer, 1986). En Mesopotamia la escritura era cuneiforme, puesto que era realizada sobre tablillas hechas de arcillas donde imprimían marcas en forma de cuña, donde el significado del contenido a transmitir estaba determinado por el diseño que se originaba en la disposición de dichas marcas; mientras que la escritura egipcia se desarrolló por medio de jeroglíficos tallados en piedra y posteriormente marcados sobre el papiro (Boyer, 1986).

Asimismo, en la civilización egipcia la geometría, y por ende la matemática, se originó ante la necesidad práctica de medir y trazar los confrontes de las tierras, de donde surgió un sistema de numeración jeroglífica, el cual era un sistema decimal, es decir, de base diez conformado de un "sencillo esquema iterativo y con ayuda de un conjunto de símbolos distintos para cada una de las primeras media docenas de potencia de base diez" (Boyer, 1986, p. 31), observándose que ya para esa época los egipcios manejaban grandes cifras.

Por lo tanto, en este sistema numérico, "según demuestra el papiro de Rhind, los egipcios utilizaban los números naturales y las fracciones con numerador 1. Para representar números se basaban en el sistema de agrupación múltiple" (Temas para la Educación, 2010, p. 1). En este orden de ideas, Boyer (1986) describe el sistema de numeración utilizado por los egipcios del siguiente modo:

> Un palote vertical aislado representa la unidad, un arco se usa para el 10, una especie de lazo recuerda una C mayúscula representa el 100, una flor de loto para el 1.000, un dedo doblado para el 10.000, un tipo de pez parecido a una lota para 100.000 y una figura humana de rodillas y con los brazos por alto (quizás una especie de Dios Infinito) para representar 1.000.000. (p.31)

Evidenciando el carácter a priori de la infinitud a través de una magnitud muy elevada para ese entonces, es decir la aparición de un esquema potencial de infinito en su acepción más primitiva. Ahora, en el Papiro de Ahmes y en el Papiro de Rhind se encontraron una gran cantidad de información matemática, en la que la matemática tenía un fin práctico, como lo es la de contar y medir, así como también para fines religiosos y ceremoniales, en estos se evidenció que los egipcios utilizaban sumas de fracciones unidad, es decir, la fracción del tipo $1/2$, junto con la fracción $2/3$, para expresartodas las fracciones (Boyer, 1986).

Igualmente, "los egipcios consideraban las fracciones generales propias de la forma m/n, con *m* menor que *n*, no como una «cosa» elemental y simple, sino como parte de un proceso incompleto" (Boyer, 1986, p.34). De donde se desprende que comenzaban a intuir la noción de infinitesimal y de reducción de fracciones a través de iteraciones rudimentarias, por ejemplo en el papiro de Ahmes se encuentra una descomposición, entre tantas, de la siguiente forma $\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$, además, conocían el hecho de que dos tercios de la fracción $\frac{1}{p}$ es igual a la suma de las dos fracciones unitarias $\frac{1}{2p}$ y $\frac{1}{6p}$ (Boyer, 1986).Recurriendo a estos conocimientos, los egipcios fueron capaces de resolver problemas aritméticos con fracciones, así como problemas algebraicos elementales.

Por su parte, la civilización mesopotámica, llamada también babilónica, poseía un alto nivel de desarrollo, el sistema de numeración que se desarrolló en este fue un sistema sexagesimal, cuya base fundamental es 60; este tuvo su origen, lo más probable, debido a que "la base 60 se adaptase y se localiza de una manera consciente por los intereses de la metrología, ya que una magnitud de 60 unidades puede dividirse fácilmente de manera exacta (…) lo que permite diez posibles subdivisiones exactas" (Boyer, 1986, p. 49).

No obstante, no lograron un sistema posicional completo por la ausencia del cero, en cuanto a esto Boyer (1986) afirma: "los babilónicos no parecen haber sido capaces, al principio, de inventar una manera clara de representar una «posición vacía» en un numeral, es decir no dispusieron de un símbolo para el cero en su sentido no cardinal sino posicional" (p. 51), aunque la posición es solo relativa, ya que para un mismo signo podría representar varios números, enteros como fraccionarios, dependiendo del contexto.

Hay que destacar, que esta civilización conocía los números enteros y las fracciones unitarias, ya usados por los egipcios, pero además extendieron el principio posicional a las fracciones explotando así las formas fraccionales decimales. Crearon algoritmos para aproximar raíces cuadradas. De igual manera elaboraron tablas en las que se disponían valores para la multiplicación, inversos, tablas de cuadrados, cubos, raíces cuadradas y cubicas escritas en el sistema sexagesimal cuneiforme (Boyer, 1986).

Asimismo, se tiene que el método algorítmico empleado por los babilónicos para aproximar raíces cuadradas es mencionado a continuación:

> Sea $x = \sqrt{a}$ la raíz que se trata de calcular y sea a_1 una primera aproximación a esta raíz; a partir de ella calcúlese una segunda aproximación b_1 tal que verifique la ecuación $b = {}^{a}/_{a_1}$. Si a_1 era demasiado pequeña, entonces b_1 será demasiado grande y viceversa, y por tanto la media aritmética $a_2 = a_1 + {}^{b_1}/_{2}$ será sin duda una aproximación mejor, (…) es evidente que el proceso puede continuarse indefinidamente. (p. 52)

Por lo tanto, si se considera el valor de $\sqrt{2}$ que aparece en la tablilla de Yale 7.289, se puede observar que resulta igual a_3 si se inicia con el término $a_1 = 1;30$, de donde este método pudo haber originado la inquietud, por parte de los matemáticos, por los procesos infinitamente largos, ya que en este algoritmo mesopotámico para el cálculo de raíces cuadradas encierra un método iterativo, aunque esto no se dio totalmente, ya que no tomaron en cuenta estas implicaciones con lo infinitesimales (Boyer, 1986). Ahora bien, en lo que respecta en las tablas faltan los inversos de los números 7 y 11, esto "debido sin duda a que los inversos de tales números «irregulares» tienen una expresión sexagesimal infinitamente larga (…) aquí pudieron haberse enfrentado (…) con el problema del infinito, pero tampoco (…) lo tomaron en consideración sistemáticamente" (Boyer, 1986, p. 53).

Quizás estos métodos algorítmicos en el desarrollo de las matemáticas rudimentarias, presentes en estos pueblos, tal vez fue lo que inspiro posteriormente a los filósofos y matemáticos griegos, si bien es cierto, la matemática egipcia y babilónica surgió por la necesidad de resolver problemas prácticos que se presentaban en la vida diaria, no obstante también pudo ser utilizada con fines de diversión o satisfacción del espíritu, analizar, entre una de tantas cosas, los procesos que involucran lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño y a cuestionarse sobre todas las cosas pertenecientes a la naturaleza.

El Pensamiento Helénico:

"El principio y elemento de las cosas es lo indefinido"

Anaximandro

Eminentes filósofos y matemáticos han tratado de dar una definición de *Infinito* a lo largo de la historia. En la antigua Grecia; Platón, Pitágoras y Aristóteles entre otros, se planteaban la existencia del *Infinito* y las contradicciones generadas a partir de la aceptación de su existencia. Las nociones de la infinidad del tiempo y de la eternidad son comunes al pensamiento griego, donde la eternidad se le muestra como atributo del ser universal; y de las tres formas en las que la idea de lo eterno puede resumirse según Mackenzie (citado por Mondolfo,1956) en: "1º) Lo que se extiende infinitamente en el tiempo; 2º) Lo que queda absolutamente fuera de él y 3º) Lo que lo incluye trascendiéndolo" (p.60).

Por lo tanto, en el pensamiento griego surge la idea de manifestar que el concepto de eternidad inmutable es igual al de infinidad de los tiempos, para así apoyar la concepción de extratemporalidad en la concepción de la infinitud temporal para luego concebirla como eterna. Dando a entender la imperfección de cada límite temporal manifestada en la mentalidad helénica, como consecuencia directa de la inferioridad existente entre el *Khrónos* en relación al *aión*[1] (Mondolfo,1956). Y que además:

> (…) cuando atribuye al cosmos un comienzo en lugar de la eternidad (…) el pensamiento griego afirma la preexistencia de la fuente de la que deriva el mundo, ya el Caos *prótista*[2] de Hesíodo, ya el *prótiston aristón gennésan*[3]y los otros principios divinos que *aei ésan*[4], según Ferecides. Pero cuando, en el desarrollo de las cosmogonías, surge la idea de que el devenir cósmico al par de la vida orgánica puede comprender, en correspondencia con el proceso de formación, también el inverso, el de disolución, aquel *aei*, que es repudio de un límite absoluto, se precisa en la afirmación de una substancia eterna. Su permanencia excluye todo comienzo absoluto o absoluta cesación, dentro de cuyos límites pueda encerrarse la historia cósmica, y reúne en cambio en ésta siempre el fin con el principio (…) y hace del ciclo de formación y disolución (gran año) nada más que un acto de una serie infinita. (Mondolfo, 1956, p. 62)

Ahora, en el pensamiento helénico se han encontrado documentos en los cuales se abordan esas cuestiones. Esta profunda conciencia de la infinidad contribuyó a la formación y en la aplicación del proceso de división hasta el infinito que condujo a los griegos a una noción clara de lo infinitesimal, y, además, a la inclusión del *Infinito* dentro de cualquier magnitud finita. Es aquí donde la conciencia de la infinidad se desarrolla paralelamente en dos opuestas direcciones, la que responde a lo infinitamente grande y la que atañe a lo infinitamente pequeño Mondolfo (1956). Así, Anaximandro de Mileto (610 – 547 A.C) en su obra "Entorno a la naturaleza", expresa que "el infinito (*ápeiron*[5]) es el principio y elemento primordial de los seres", distinguiéndolo de los llamados elementos como el agua, el aire, la tierra y el fuego; puesto es el principio generador (naturaleza) *Infinito*, del cual nacen todos los cielos y los universos contenidos en ellos (Aristóteles, p.24).

Los orígenes de la noción de *Infinito* en matemática se remontan hasta Pitágoras (aprox. 569 - 500 A.C.), quien sostenía con firme convicción de que todo conocimiento matemático revela un invisible ángulo de la realidad, por lo tanto todo en el mundo es armonía y número. Además, decía que el *Infinito* es lo Par; porque lo Par, cuando es abarcado y delimitado por lo Impar, confiere a las cosas la infinitud. Por otra parte, los pitagóricos y así como también Platón, consideran que el *Infinito* es por sí mismo un principio, no algo accidental a otras cosas, sino algo que es en sí mismo una sustancia. Para Platón existen dos infinitos, lo Grande y lo Pequeño (Aristóteles, p.88).

---

[1] Del tiempo respecto a la eternidad (Mondolfo, 1956, p. 61).

[2] Primerísimo (Mondolfo, 1956).

[3] El primero y óptimo principio creador (Mondolfo, 1956).

[4] Existían siempre (Mondolfo, 1956).

[5] El término Ápeiron ($\alpha\pi\varepsilon\iota\rho\omega\nu$) proviene del griego y es un adjetivo que significa ilimitado, infinito e inmutable. También se utiliza para calificar aquello de lo cual uno no puede desprenderse.

En relación a lo anterior, Larios (2000) expresa que la doctrina platónica sobre el infinito se encuentra expuesta en el dialogo de “El Filebo”. En la cual, da una clasificación de todo lo que existe en el universo, por tal motivo, el mundo entero es visto en términos de finitud e infinitud. De esta forma, Platón interpreta dialécticamente el contraste entre finitud e infinitud:

> (…) todas las cosas a que se atribuye una existencia eterna, se componen de uno y muchos, y reúnen en si por su naturaleza lo finito y lo infinito, y siendo tal la disposición de las cosas, es preciso, en la indagación de cada objeto, aspirar siempre al descubrimiento de una sola idea. Efectivamente se encontrara una y una vez descubierta, es preciso examinar si después de ella hay dos o tres o cualquier otro número; en seguida, hacer lo mismo con relación a cada una de estas ideas, hasta que se vea, no sólo que la primitiva es una y muchas y una infinidad, sino también las ideas que contiene en sí; que no se debe aplicar a la pluralidad la idea de infinito, antes de haber fijado por el pensamiento el número determinado que hay en ella entre lo infinito y la unidad; y que solo entonces es cuando se puede dejar a cada individuo ir a perderse en el infinito. (p. 31)

Después Anaxágoras de Clazómenes (500-496 - 428-27 A.C) discurría sobre “la unión originaria y la infinitud de los infinitesimales” estableciendo que “todas las cosas estaban juntas, infinitas en multitud y en pequeñez, porque también lo pequeño era infinito. Y estando todas las cosas juntas, ningún ser era discernible a causa de su pequeñez...”; porque no hay un grado mínimo de lo pequeño, sino que siempre hay un grado menor, pues es imposible que el ser no sea. Pero también de lo grande hay siempre un mayor. Y es igual en multitud a lo pequeño, y toda cosa, comparada consigo misma, es al mismo tiempo grande y pequeña (Mondolfo, 1956).

Posteriormente, Demócrito de Abdera (460-370 A.C) con su teoría atomitista busca explicar los fenómenos que acontecen en el mundo, por otro lado, su doctrina filosófica se centra en la concepción de un espacio donde coexiste en conjunción el vacío (no ser) con el ser, en el cual se encuentran los infinitos átomos que dan a lugar y constituyen la realidad física del universo (Pareja, 2007). “Estos átomos son absolutamente pequeños, indivisibles, eternos y que llenan completamente el espacio que ocupan. Esta teoría atomista nos lleva a imaginar la posibilidad de llenar en forma plena el espacio, con un agregado indefinido de átomos” (Pareja, 2007, p. 2).

Además, en su teoría física de constitución del mundo, este se comporta como una máquina que se mueve por medio de mecanismos precisos donde no intervenían lo sobrenatural, en relación a esto Pareja (2007) expresa, “su teoría cosmogónica es, en cierto aspecto, antecesora de las modernas teorías físicas, en el sentido de considerar la materia y la energía perennes e indestructibles. Los átomos son eternos, al igual que el movimiento, decía. Según Diógenes Laercio” (p. 3). De esta manera, en contraste con Anaxágoras, Demócrito consideraba que “la materia es divisible, pero hasta cierto punto nada más; y los últimos elementos, los átomos, poseen propiedades distintas a los de los cuerpos grandes. Son impenetrables, absolutamente sólidos y se distinguen únicamente por la forma” (Meliujin, 1960; p.19), para seguidamente afirmar que, “en el espacio infinito existen incontables mundos formados por cantidades inconmensurables de átomos” (Meliujin, 1960; p.19).

Sin embargo, es importante resaltar que Demócrito se encontró con dos grandes contradicciones en cuanto a la concepción de la estructura de la materia, las cuales se encontraban inmersas en el pensamiento helénico, estas eran, según Meliujin, (1960) las que presentaban lo siguiente:

> Si consideramos que al final de la división ilimitada de la materia se encuentran partículas inextensas, cualquier cuerpo constituido por ellas será también inextenso; pero si consideramos que las ultimas partículas son extensas, tendremos que admitir que una suma infinitamente grande de ellas (inevitable con la división ilimitada) nos daría un cuerpo de dimensiones infinitamente grandes, cosa que contradice con la experiencia. (p.25)

A tales manifestaciones, Demócrito negaba rotundamente, puesto que, para el ambas eran falsas, oponiéndose a que las últimas partículas fueran inextensas, por el contrario estas deberían ser extensos. Con la finalidad de dar validez lógica a sus razonamientos, Demócrito (citado por Meliujin, 1960) desarrolla la teoría de la indivisibilidad física que plantea que:

> Todo cuerpo es divisible sólo en el caso de que entre sus partes componentes pueda introducir una especie de cuña para separarlas. Pero con esa operación llegaremos, en última instancia, a partículas que sean absolutamente impenetrables y compactas, no existiendo ya cuña alguna capaz de separarlas. Las dimensiones de cada una de esas cuñas no serán menores que el elemento dado. Esos elementos son físicamente indesintegrables y se llaman “átomos” (indivisos). (p.26)

Aunque, se puede observar que de los razonamientos ya realizados la indivisión física de los átomos no implica que lo mismo acurra con su división geométrica, lo que se traduce, a la capacidad de poderle atribuir mentalmente a los átomos una serie de planos que consientan un posterior fraccionamiento del elemento. Por lo que, Demócrito (citado por Meliujin, 1960), ante esta cuestión, expresó:

> Todo elemento es divisible porque podemos separar su lado derecho del izquierdo, el superior del inferior, el de delante del de atrás. Pero cabe imaginar una partícula que no tenga esos lados o en el cual el concepto de lado sea inaplicable. Será un elemento extenso, pero no se lo podrá dividir en elementos más pequeños por no existir éstos. Esos elementos se califican de átomos matemáticos. Son mucho más pequeños que los átomos físicos y se encuentran en el interior de ellos. Aunque el átomo matemático tiene dimensiones finitas, no posee forma alguna, ya que la existencia de forma presupone la posibilidad de división sucesiva en elementos todavía menores. En los cuerpos hay cantidades extraordinarias – pero no infinitas – de átomos matemáticos; por lo tanto, su suma no forma un cuerpo infinitamente grande, sini una magnitud finita. Y como esos elementos son extensos, el cuerpo formado por ellos también lo será. (p.26)

Cabe agregar, que Demócrito utiliza su teoría de los átomos matemáticos para explicar las propiedades presentes en las líneas y figuras geométricas, “la línea, para él, es la suma de numerosos átomos; la superficie, la suma de numerosas líneas superpuestas, y el volumen, la suma de una gran cantidad de planos, es decir, de capaz de átomos” (Meliujin, 1960; p.26). Además, de acuerdo a Cajori (1915) se sabe por Plutarco que Demócrito sugirió la siguiente cuestión:

> Si un cono fuera cortado por un plano paralelo a su base, ¿qué deberíamos pensar de la superficie de las secciones, que son iguales o desiguales? Si son desiguales, eso mostrará que el cono es irregular, con muescas como escalones, y disparidades; y si son iguales, las secciones serán iguales, y el cono parecerá tener la propiedad de un cilindro, a saber, estar compuesto de círculos iguales y desiguales, lo cual es absurdo. (p. 16)

Adelantándose Demócrito así por varios siglos con su teoría infinitesimal a Cavalieri, a Eudoxo y a Arquímedes. Sin embargo, esta paradoja revela que “las dificultades están en la manera de aceptar la noción de un infinitesimal y por lo tanto indirectamente favorece la idea de divisibilidad en solamente un número finito de partes” (Cajori, 1915, p. 16).

Por su parte, Antifón intento resolver uno de los problemas clásicos de la antigüedad, el vinculado a la cuadratura del círculo, donde para poder cuadrar un círculo se debe llegar a una situación en que las líneas curva y recta, de la circunferencia y el polígono respectivamente, sean reducibles a los mismos elementos indivisibles (Cajori, 1915). En este orden de ideas, Antifón, conforme con los alegatos de Simplicio y Filopón (citados por Cajori, 1915), “inscribió en un círculo un cuadrado, y por bisección del arco, obtuvo polígonos regulares de 8, 16, 32 lados, y así sucesivamente. Él suponía que podría alcanzar un polígono que coincidiera con la circunferencia” (p. 16).

Asimismo, en relación al método utilizado por Antifón, Cajori (1915) señala un comentario realizado por Simplicio, el cual expresa:

> La conclusión aquí es manifiestamente contraria a los principios geométricos, no como sostiene Alejandro, porque el geómetra supone como un principio que una circunferencia puede tocar a una línea recta en sólo un punto, y Antifón deja esto a un lado; porque el geómetra no supone esto, pero lo prueba. Sería mejor decir que es un principio que una línea recta no puede coincidir con una circunferencia, porque la que no encuentra a la circunferencia en un punto solamente, la encuentra en dos puntos y no más, y los encuentros se dan en puntos solos. No obstante al bisecar continuamente el espacio entre la cuerda y el arco, nunca se agotará, ni llegaremos nunca a alcanzar la circunferencia del círculo, aunque el corte se continuara ad infinitum: si lo hiciéramos, estaríamos haciendo a un lado un principio geométrico que rechaza que las magnitudes sean divisibles ad infinitum. (p. 16)

Por otro lado, Aristóteles rechazó la idea del *Infinito* debido las contradicciones que se originaban a partir de él. No obstante, lo concibió de dos formas diferentes, las cuales son las nociones de este concepto que se manejan hoy en día. En el tercer libro de su obra Física, Aristóteles ideó dos tipos de *Infinito*: *el Infinito potencial* (*Infinito* como proceso de decrecimiento o crecimiento ilimitado) y *el Infinito actual* (Infinito visto como un todo o unidad). De acuerdo a esto Ortiz (1994) plantea:

> La noción de infinito potencial se centra en la operación reiterativa e ilimitada, es decir, en la recursividad interminable, por muy grande que sea un número natural, siempre se puede concebir uno mayor, y uno mayor que este y «*así sucesivamente*» donde esta última expresión encierra la misma idea de reiteración ilimitada, al infinito (p. 61)

Para Aristóteles, el *Infinito* era explicado a través de la adición o reducción por la división sucesiva, de esta manera, se tiene que:

> El infinito por adición es en cierto modo el mismo que el infinito por división, pues en una magnitud finita el infinito por adición se produce en un proceso inverso al otro; porque en la medida en que una magnitud se ve dividida hasta el infinito, en la misma medida aparecen las adiciones con respecto a una determinada magnitud. Pues si en una magnitud finita tomamos una cantidad determinada, y tomamos luego otra en la misma proporción, aunque no en la misma cantidad del todo inicial, no lograremos recorrer la magnitud finita; pero si aumentamos la proporción de tal manera que las cantidades tomadas sean siempre iguales, entonces la recorreremos, porque toda magnitud finita puede ser agotada mediante la sustracción de una cantidad determinada. Así pues, el infinito no tiene otro modo de realidad que éste: en potencia y por reducción. Y existe actualmente en el sentido en que decimos que el día o la competición existen; y existe potencialmente, como la materia; pero no existe por sí mismo, como existe lo finito. (p.102)

En este orden de ideas, Aristóteles (1995) manifiesta que se acercó a la concepción de *Infinito*, ya que captó según él la relación entre movimiento y la infinitud, por lo que parte del supuesto siguiente:

> Puesto que la naturaleza es un principio del movimiento y del cambio, y nuestro estudio versa sobre la naturaleza, no podemos dejar de investigar qué es el movimiento; porque si ignorásemos lo que es, necesariamente ignoraríamos también lo que es la naturaleza. Y después de que hayamos determinado qué es el movimiento, hemos de intentar investigar de la misma manera los problemas posteriores.
>
> (…) El movimiento parece ser uno de los continuos, y lo primero que se manifiesta en lo continuo es el infinito. Por esto sucede a menudo que quienes definen lo continuo utilizan la noción de «infinito», ya que entienden por «continuo» lo que es divisible hasta el infinito. Además, se piensa que el movimiento es imposible sin el lugar, el vacío y el tiempo. (p.79)

Para luego, opinar lo siguiente;

> Todos los que estudian la naturaleza ponen como sujeto del infinito una naturaleza que es distinta de los llamados «elementos», como el agua o el aire o algo intermedio[6]. Pero ninguno de los que ponen un número finito de elementos piensan que éstos sean algo infinito. Y cuantos ponen infinitos elementos, como Anaxágoras con las *homeómerías[7] y* Demócrito con la *panspermía[8]*de las figuras, afirman que el infinito es un continuo por contacto. (p. 89)

Teniendo en cuenta lo anterior, para Aristóteles, Anaxágoras asevera "que una parte cualquiera de un todo es una mezcla[9] semejante al todo, porque ve que cualquier cosa se genera de cualquier cosa" (p.90). Por lo que, según él, existe un inicio de la separación no sólo para una, sino que además para todas las cosas. En función de esto Aristóteles (1995), explica:

> (…) Y como lo generado se ha generado de un cuerpo semejante, y hay una generación de todas las cosas, aunque no simultáneamente, tiene que haber un principio de esta generación, un principio único, que Anaxágoras llama Inteligencia; la Inteligencia opera mediante el pensamiento a partir de un cierto principio. Así, necesariamente en algún tiempo todas las cosas estuvieron juntas y en algún tiempo comenzaron a ser movidas. Demócrito, por su parte, niega que los cuerpos primeros se hayan engendrado entre sí; para él el cuerpo común[10] es el principio de todas las cosas, diferenciándose éstas en magnitud y figura. (p. 90)

Por otro lado, para Aristóteles (1995, p.91) el reconocimiento de la existencia del *Infinito* tiene su origen especialmente por unas determinadas razones, cinco para ser exacto, estas son de acuerdo a él las siguientes: primero, "del tiempo, pues es infinito"; segundo, "de la división de las magnitudes, pues los matemáticos también hacen uso del infinito"; tercero, "si hay generación y destrucción incesante es solo porque aquello desde lo cual las cosas llegan a ser es infinito"; cuarto, porque lo infinito encuentra siempre su límite en algo, de suerte que si una cosa está siempre necesariamente limitada por otra, entonces no podrá haber limites últimos; y por última y más importante la razón que plantea el hecho de que "al no encontrar nunca término en nuestro pensamiento, se piensa que no sólo el número es infinito, sino también las magnitudes matemáticas y lo que está fuera del cielo" alegando seguidamente, que:

> (…) al ser infinito lo que está fuera del cielo, se piensa que existe también un cuerpo infinito y un número infinito de mundos pues, ¿por qué habría algo en una parte del vacío más bien que en otra? De ahí que se piense que si hay masa en alguna parte, parte tiene que haberla en todas partes. Y también, que si hay un vacío y un lugar infinitos, tendrá que haber también un cuerpo infinito, porque en las cosas eternas no hay ninguna diferencia entre poder ser y ser" (Aristóteles, 1995; p. 91).

Además, llega a la formulación de una noción del continuo, la cual es muy importante para su física por ser una característica fundamental del universo en general, para él esta es concebida como la siguiente:

> Lo continuo (synechés) es una subdivisión de lo contiguo; así, por ejemplo, digo que una cosa es continua con otra cuando sus límites que se tocan entre sí llegan a ser uno y lo mismo y, como indica la palabra, se «con-tienen» entre sí, pero si los extremos son dos no puede haber continuidad. (p.182)

Posteriormente, Zenón de Elea (490-425 AC), discípulo de Parménides y representante de los eleáticos, propuso, de acuerdo a Pareja (2007), "según el comentarista Proclo (411-485 AD), cuarenta paradojas[11] relacionadas con el continuo y el movimiento, que vistas retrospectivamente han desempeñado un papel importante en las matemáticas desde tiempos griegos" (p.3). En ellas trató de probar la imposibilidad del movimiento partiendo de la premisa de un espacio infinitamente divisible.

---

[6] "Con «agua» se refiere a Tales, con «aire» a Anaxímenes y a Diógenes de Apolonia; en cuanto a «algo intermedio entre éstos» (cf. *Acerca del cielo* 303bl2, *Acerca de la gen. y la corr.* 332a20, *Met.* 989al4)" (Física, 1995, p. 89).

[7] "*Homoiomerés*este vocablo no se encuentra en los fragmentos que nos quedan de Anaxágoras. Algunos conjeturan que puede haber sido una invención de Aristóteles" (Física, 1995, p. 89).

[8] "El término *panspermía* no tiene equivalente en nuestras lenguas; la idea expresada es la de que los átomos son las «semillas» *(spérmata)* de todas las cosas" (Física, 1995, p. 89).

[9] "Anaxágoras parece haber supuesto que en cualquier parte material hay una mezcla *(mígma)* homogénea, porque si cualquier cosa puede emerger de una parte cualquiera, esa parte tendrá que ser una mezcla indiferenciada de toda clase de materia" (Física,1995; p. 89).

[10] "El principio infinito de Demócrito, según Aristóteles, no sería la multiplicidad infinita de átomos moviéndose en un vacío infinito, sino más bien «el cuerpo común» *(tò koinòn sôma)* de todos los átomos" (Física,1995; p. 90).

[11] Cabe señalar que dichas paradojas pueden ser tratadas de forma natural (desde la formalización del concepto de límite) a través de la idea de convergencia de una serie infinita.

La base de sus razonamientos tenía como principios fundamentales, aceptados como evidentes por los filósofos de la época, el primero: "La suma de un numero infinitamente grande de magnitudes finitas y extensas, por pequeñas que sean, constituye una magnitud infinitamente grande" (Meliujin, 1960, p.21); y la segunda: "La suma de cualquier número de magnitudes inextensas, por grande que sea, es igual a cero. ‹Si un objeto no tiene magnitud – decía Zenón –, es que no existe›" (Meliujin, 1960, p.21). Una de las más significativas, es la de *Aquiles y la Tortuga*, en la cual Zenón plantea la siguiente cuestión:

> Si compiten en una carrera Aquiles, el de los pies ligeros, y la Tortuga, el más lento de los animales, aquél nunca cogerá a ésta, con tal de que la Tortuga inicie la carrera con una ligera ventaja con respecto al Pélida. (García, 2003; p.216)

Como resultado de esto, Zenón explicaba que:

> (…) antes de alcanzar a la Tortuga, Aquiles debe recorrer el espacio que le separaba inicialmente de ella y, mientras tanto, la Tortuga habrá avanzado una distancia, por pequeña que sea. Del mismo modo, Aquiles debe recorrer esta distancia que ahora le separa de la Tortuga antes de alcanzarla, dando ocasión al animal de avanzar otro poco, aunque sea una distancia minúscula, con lo que de nuevo surge una separación entre ambos corredores que Aquiles ha de cubrir en un tiempo durante el cual la Tortuga adelantará otra ínfima magnitud espacial, y así, aunque progresivamente decreciente, siempre existirá una separación entre los dos corredores. (García, 2003; p.217)

Por lo tanto, "al asumir la hipótesis contraria, de que el tiempo y el espacio son infinitamente divisibles llega a la conclusión de que Aquiles, el veloz héroe griego, no es capaz de sobrepasar, a una lenta tortuga" (Pareja, 2007; p.3). De acuerdo a Pareja (2007), lo que Zenón trataba de hacer era demostrar a los filósofos y matemáticos de su época que los conceptos de espacio y tiempo no estaban bien establecidos y dejar en manifiesto que no se puede fiar totalmente de la razón para hallar la verdad.

Luego, Euclides (alrededor del 300 A.C) toma la misma una actitud de Aristóteles en cuanto al *Infinito* evitándolo al ser origen de contradicciones. En su obra de los *Elementos*, específicamente en su definición 23, la cual se establece que: "Son rectas paralelas las que estando en el mismo plano y siendo prolongadas indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de ellos" (Euclides, citado por Belmonte, 2009; p.7), se puede observar, como opina Belmonte (2009), como evita utilizar cualquier frase o expresión que involucre la noción de infinito actual, ya que podía alegar, en su definición, que las rectas fueran prolongadas hasta el *Infinito*.

Cabe explicar, que Euclides no hacía alusión a rectas sin fin, "sino a segmentos de recta extensibles a longitudes arbitrarias, según supone en el postulado 2[12]. Esta noción de infinito potencial -las rectas consideradas finitas, reservándose la posibilidad de extenderlas al infinito constituye una extrapolación razonable de la experiencia" (Belmonte, 2009; p.7).

Ahora bien, el término *Infinito* tuvo, para los diferentes pensadores griegos, un gran valor significativo con una variedad de matices que conviene resumir (Filep, 2001 y 2003, citado por Belmonte, 2009, p. 25):

	Aumento ***-mediante suma***	Disminución ***-mediante división***
Actual	No hay nada fuera de él. Existe el más grande. Existen la línea y el número infinito.	No hay nada dentro de él. Existe el más pequeño (átomo). Existen el número y la línea de átomos (punto = unidad). La divisibilidad infinita de una línea es imposible.
Potencial	Siempre queda algo fuera. No existe el más grande. La línea puede construirse indefinidamente. pero no existe la línea infinita No existe el número más grande.	Siempre queda algo dentro. No existe el más pequeño (para magnitudes). No existe la parte más pequeña. de la línea, puede dividirse indefinidamente.

Tomado de: Belmonte (2009; p. 8).

Así, de acuerdo a Moreno y Waldegg (1991, citado por Belmonte, 2009) realizan un análisis sobre los diferentes usos y significados de la palabra *Infinito* en el pensamiento helénico, que se describe a continuación:

> Como nombre aparece sólo en relatos de tipo mitológico, teológico o metafísico: "Infinito" pertenece al ámbito de los dioses.
> Como adjetivo que describe a un nombre se utilizaba sólo cuando este último tenía características de un absoluto, como el Universo, el Ser, el espacio o el tiempo.
> Como adverbio de modo se utilizaba para definir acciones (mentales) tales como extender, subdividir, continuar, añadir, aproximar, etc. Y este significado está asociado con el infinito potencial, es decir, con aquellos procesos que se pueden continuar indefinidamente. (p. 26)

De esta forma, se tiene que en el periodo helenístico se presentan situaciones en las que se manifiesta de manera intuitiva la noción de *Infinito*, así como también la idea de límite; las cuales están ligadas al descubrimiento de procesos geométricos infinitos que surgieron de las paradojas de Zenón, el descubrimiento de los números irracionales y la comparación de áreas y volúmenes de figuras curvilíneas mediante la aproximación de figuras rectilíneas.

Interludio Medieval y Moderno:

"Dios, que es acto puro y no tiene nada de potencialidad, tiene un poder activo infinito sobre las demás cosas".

Santo Tomás de Aquino

La noción de *Infinito* sigue desarrollándose y ya en la Edad Media, la totalidad de la matemática relacionada con la naturaleza del *Infinito* tomó una connotación teológica, al considerar al *Infinito* como una propiedad exclusiva de la majestad divina de Dios. En tal orden de ideas, Ortiz (1994) señala: "San Agustín creía que solo Dios era ilimitado y sus pensamientos eran infinitos, por su parte Santo Tomás de Aquino (1224-1274) demostraba en la Summa Theologiae que, aunque Dios era ilimitado él no podía crear cosas absolutamente ilimitadas" (p. 62).

Negando de esta manera la existencia del *Infinito* actual, puesto que, argumenta él, si se pudieran admitir al mismo tiempo cada uno de los elementos de un conjunto *Infinito*, de tal forma que se integrasen en una totalidad actualmente definida, por esta condición podrían ser contados uno a uno, lo cual traería una contradicción, ya que sería un número *Infinito*. Por otro lado, la omnipotencia de Dios se extendió luego a la creación de cantidades infinitas, al mismo tiempo que la perfección de Dios se designaba a través de términos que se referían a su totalidad, a su eternidad, entre otras, pero no a su carácter ilimitado (Belmonte, 2009).

Por otro lado, Santo Tomás de Aquino no siguió el planteamiento por la concepción aristotélica y por el contrario aceptó la proposición mediante la cual establece que "Dios es infinito, y eterno, e incircunscribible". Sin embargo, rápidamente manifiesta que el *Infinito* puede ser categorizado de acuerdo a su naturaleza en dos aspectos diferentes y opuestos entre sí, la primera en relación a la idea de forma y la segunda a la idea de materia. Aunque, esta distinción no se diferencia mucho a la ya anteriormente planteada por Aristóteles, la distinción entre *Infinito potencial* e *Infinito actual*, lo que buscaba era una conciliación entre la idea cristiana y la concepción aristotélica (Belmonte, 2009).

---

[12] Tal como lo reseña, Belmonte (2009) el Postulado 1 plantea: "Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera" (p.7); seguido el Postulado 2 dice: "Y el prolongar continuamente una recta finita en línea recta" (p.7).

En ese mismo sentido, Cajori, (1915) explica lo concerniente a la naturaleza del continuo planteada por Tomas de Aquino, el continuo lineal era concebido por él como divisible de forma iterativa hasta el *Infinito*, aunque en la praxis no se pueda realizar dichas divisiones, dando a entender que no existía una línea mínima. Manifestando, al mismo tiempo, que el punto no es un componente de una línea, debido a que no ostenta la propiedad común, divisibilidad infinita, que posee la línea y sus partes, y, además, el continuo no puede construirse a partir de puntos, no obstante un punto a través de su movimiento puede generar una línea. Esta idea sobre el continuo fue la que dominó en el pensamiento medieval y moderno, teniendo una gran influencia de la antigua doctrina atomista.

Posteriormente, Roger Bacon (1214 – 1294),uno de los primeros escritores ingleses que se planteó la cuestión sobre la continuidad y el *Infinito*, replicaba en contra de la composición del continuo en partes indivisibles (distintas de puntos) y lo hizo a través de la renovación de las explicaciones manifestadas por los griegos y los antiguos árabes. Sosteniendo así, la hipótesis que expresa:

> (…) las partes indivisibles de tamaño uniforme harían que la diagonal de un cuadrado fuera conmensurable con un lado; si los extremos de una parte indivisible de una circunferencia están conectados por sus radios con el centro de la circunferencia, entonces los dos radios intersecarían un arco en una circunferencia concéntrica de menor radio. (Cajori, 1915; p. 24).

De lo anteriormente dicho, se infiere que la circunferencia interior es del mismo tamaño que la exterior, lo cual es imposible. Por su parte, Bacon del mismo modo argumentó en contra del *Infinito*, manifestando que “si el tiempo fuera infinito, eso implicaría que la parte es igual al todo” (Cajori, 1915; p. 24), esta deducción él la consideraba irracional e inadmisible. Por tal motivo, argumentos y planteamientos parecidos lo condujeron a concluir que el mundo constituido es finito.

Ahora bien, ya en 1600 D.C. Giordano Bruno, predicó un universo constituido por infinitos mundos. Sus estudios se iniciaron al tratar el problema de las determinaciones de Dios, concibió al mundo como totalidad, es infinito y único “uno infinito, inmóvil” (inmóvil porque lo infinito no es susceptible de movimiento local, que es en definitiva, un solo ser, una sola sustancia) (De l’infinito universo e mondi, dialogo I, tr. 1972). En su obra Bruno (tr.1972) diferencia la infinitud del universo y la infinitud divina, estableciendo:

> Llamó al universo todo infinito porque no tiene borde, término o superficie; digo que el universo no es totalmente infinito porque cada parte que de él se puede considerar es finita, y de los innumerables mundos que contiene, cada uno es finito. Llamo a Dios totalmente infinito porque él, todo eterno, está en todo el mundo y está infinita y totalmente en cada una de sus partes, al contrario de la infinitud del universo, la cual está totalmente en todo y no en las partes (si es que al referirnos al infinito se puede hablar de partes) que podemos incluir en aquel (De l’infinito universo e mondi, dialogo I). Con lo expuesto Bruno separa e independiza el concepto de infinito de la materia. (p.71)

De igual manera, René Descartes se plantea la cuestión de *Infinito*, pero a través de una perspectiva teológica y metafísica abordándolo de alrededor de la idea de Dios (puesto que para la época todo conocimiento estuvo supeditado por la iglesia y relacionado con argumentos teológicos), donde Descartes plantea la noción de totalidad de totalidades, expresando que “la infinitud de Dios incluye infinitos atributos en número positivos, e infinitud cualitativa de cada uno de los infinitos atributos” (Segundas objeciones, p. 137 - 138; 108, citado por Arana 2010, p. 139). Estableciendo así en sus *Meditaciones* una concepción de Dios, en la cual Descartes expresa: “concibo a Dios como un ser eterno, infinito, omnisciente, omnipotente, creador de todas las cosas que existen, excepto de sí mismo, que aquellas por las que se presentan las substancias finitas” (Descartes, 1641, p. 25). Para luego, dar una definición complementaria:

> Bajo la denominación de Dios comprendo una substancia infinita, independiente, que sabe y puede en el más alto grado, y por la cual he sido creado yo mismo con todo lo demás que existe, si es que existe algo más. Todo lo cual es de tal género que cuanto más diligentemente lo considero, tanto menos parece haber podido salir sólo de mí. De lo que hay que concluir que Dios necesariamente existe. (Descartes, 1641, p. 28)

Estableciendo una comparación entre hechos, puesto que, tal cual como lo manifiesta, “aun cuando exista en mí la idea de substancia por el mismo hecho de que soy substancia, no existiría la idea de substancia infinita, siendo yo finito, si no procediese de alguna substancia infinita en realidad” (Descartes, 1641, p. 28). Afirmando seguidamente:

> No debo pensar que yo no percibo el infinito por una idea verdadera, sino tan sólo por la negación de lo finito, como percibo la quietud y las tinieblas por la negación del movimiento y de la luz. Al contrario, veo manifiestamente que hay más realidad en la substancia infinita que en la finita, y por lo tanto existe primero en mí la percepción de lo infinito, es decir, de Dios, que de lo finito, es decir, de mí mismo. ¿Cómo podría saber que yo dudo, que deseo, es decir, que me falta algo, y que no soy en absoluto perfecto, si no hubiese una idea de un ser más perfecto en mí, por cuya comparación conociese mis defectos? (Descartes, 1641; p. 28)

Además, se observa en sus *Meditaciones* la diatriba entre la potencialidad y la actualidad con respecto a la idea de Dios y su atributo de infinitud, por lo que Descartes plantea:

> (…) aunque sea cierto que mi conocimiento aumenta paulatinamente y que existen en mí muchas cosas en potencia que no están todavía en acto, nada de esto atañe, sin embargo, a la idea de Dios, en la que no hay nada en absoluto en potencia, puesto que esto mismo, ir conociendo poco a poco, es una prueba certísima de la imperfección. Además, aunque mi conocimiento se engrandezca siempre más y más, nunca, no obstante, será infinito en acto, puesto que nunca llegará a un extremo tal en que ya no sea capaz de un incremento mayor todavía. Por el contrario, juzgo a Dios infinito en acto de tal modo que nada puede añadirse a su perfección. Finalmente, considero que el ser objetivo de una idea no puede provenir únicamente de un ser potencial, que en realidad no es nada, sino tan sólo de un ser actual o formal. (p. 29)

Al mismo tiempo, Galileo Galilei, llegó a la conclusión “después de observar que los puntos de dos segmentos de recta de diferente longitud podían hacerse corresponder biunívocamente” (Ortiz, 1994; p.62), en pocas palabras, la parte era del mismo tamaño que el todo cuando estas tienden a infinito. Además Galileo percibió que el conjunto de los números cuadrados perfectos es apenas una parte del conjunto de los números naturales, sin embargo cada número natural es la raíz cuadrada de un número natural ($n \rightarrow n^2$). Es decir, se percató de la existencia de una correspondencia uno a uno entre los elementos del conjunto de números naturales {1, 2, 3, etc.} y aquellos llamados cuadrados perfectos {1, 4, 9, 16, 25, etc.}. En relación a esto Pareja (2007) explica:

> Galileo,… encontró una paradoja al observar los números naturales y sus respectivos cuadrados. El conjunto de todos los enteros positivos, cuadrados y no cuadrados, debería ser “mayor” que el conjunto de los cuadrados. Sin embargo, notó que los conjuntos podían ponerse en una correspondencia biunívoca uno con el otro:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4\ldots} & \boldsymbol{n}\ \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{9} & \mathbf{16\ldots} & \boldsymbol{n^2}\ldots \end{array}$$

> Con esto estaba probando que a los conjuntos infinitos no se les puede aplicar la relación de orden “mayor que”, porque según la correspondencia mostrada, hay tantos cuadrados como enteros positivos hay. (p. 6)

Contemporáneo a Galileo se encontraba el astrónomo y filósofo alemán Johannes Kepler (1571 – 1630), el cual ya poseía la idea de infinitos elementos infinitamente pequeños, puesto que estas ideas eran necesarias para ser aplicadas en sus estudios astronómicos, especialmente en conexión con sus órbitas elípticas desarrolladas en 1609. Hay que señalar que sus profundas investigaciones de las cónicas en 1604, en su obra “Introducción a la Óptica de Vitilio”, desarrolló una especie de principio de continuidad donde consideraba, a diferencia de Apolonio, cinco tipos de cónicas, las cuales pertenecían a una única familia (Boyer, 1986), su explicación se basó de acuerdo al siguiente procedimiento:

(…) a partir de la sección cónica formada simplemente por un par de rectas que se cortan, en la que los dos focos coinciden con el punto de intercepción, en el cual se puede pasar gradualmente desde un conjunto infinito de hipérbolas, según uno de los focos va alejándose más del otro. Cuando el segundo foco se haya alejado infinitamente, no tenemos ya una hipérbola con sus dos ramas, sino una parábola. Según el foco móvil traspasa el punto del infinito y se va acercando de nuevo al otro lado, vamos pasando por un conjunto infinito de elipses, hasta que, cuando los dos focos coinciden de nuevo, tendremos una circunferencia como quintos y último tipo de cónica (Boyer, 1986; p.409).

Ya en el año 1609, Kepler en su "Astronomía Nova" publica sus dos primeras leyes astronómicas, en su obra también supone que el área encerrada por la órbita descrita por un planeta alrededor del Sol "estaba formada por triángulos infinitamente pequeños con vértice en el Sol y los otros dos vértices en puntos infinitamente próximos sobre la órbita del planeta" (Boyer, 1986; p.411). Por otro lado, su método para el cálculo de volúmenes se fundamentaba en suponer que "los sólidos como compuestos de una cantidad infinita de elementos de volumen infinitamente pequeños" (Boyer, 1986; p.412), para luego aplicar una estrategia similar al cálculo de áreas. Por su parte, el filósofo Tomás Hobbes (1588-1679; citado por Cajori, 1915) también hizo gala en participar en lo referente con el *Infinito*, ocupándose directamente de los argumentos de Zenón. Así, en el año 1655 escribió lo siguiente:

La fuerza de aquel famoso argumento de Zenón contra el movimiento consistía en esta proposición, *todo lo que puede ser dividido en partes, infinitas en número, es infinito;* la cual él sin duda pensaba que era verdadera, pero sin embargo es falsa. Porque dividir algo en un número infinito de partes no es más que dividirlo en tantas partes como lo haría cualquier hombre. Pero no es necesario que una línea tenga un número infinito de partes, o que sea infinita, porque yo puedo dividirla y subdividirla tanto como yo quiera; porque por muchas partes que haga, su número es finito, porque el que dice partes, simplemente, sin añadir cuántas, no limita ningún número, sino lo deja a la determinación del oyente, por lo tanto decimos vulgarmente, que una línea puede dividirse infinitamente; lo cual no puede ser cierto en ningún otro sentido. (p. 31)

En este sentido, Cajori (1915) expresa "para Hobbes, *infinito* es sinónimo de *indefinido.* Toma una actitud agnóstica sobre los problemas del infinito" (p. 31), esto queda evidenciado en lo que escribió luego:

Pero cuando no se dice nada más que esto, *el número es infinito*, debe entenderse como si se dijera, el sustantivo *número* es un sustantivo *indefinido*...Y, por lo tanto, aquello que vulgarmente se dice, que el espacio y el tiempo se pueden dividir infinitamente, no debe entenderse así, como si pudiera haber una división infinita o eterna, sino debe tomarse en este sentido, *todo lo que se divide en partes tales que pueden dividirse a su vez*... ¿Quién puede afirmar que eso lo demuestra? 'Si el mundo fuera eterno entonces un número infinito de días o de otras unidades de tiempo precederían al nacimiento de Abraham, pero el nacimiento de Abraham precedió al de Isaac, entonces un infinito es más grande que otro o un eterno es mayor que otro eterno, lo cual', según él, 'es absurdo'. Esta demostración es como la suya, él de esto: que el número de pares es infinito, concluiría que hay tantos números pares como simplemente números, o sea, que hay tantos números pares como números pares e impares juntos. Aquellos que de esta manera niegan la eternidad del mundo, ¿no están del mismo modo negando la eternidad del creador del mundo?... Y los hombres que razonan de esta manera tan absurda no son idiotas, sino, lo que hace a este absurdo imperdonable, geómetras, y eso los convierte en jueces, impertinentes, pero jueces severos de las demostraciones de otros hombres. (Hobbes citado por Cajori, 1915, p.32)

Posteriormente, Jhon Wallis (1616 – 1703), en su obra *"Aritmética Infinitorum"* publicado en el año 1655, comienza a utilizar la curva lemniscata "∞", introducida por Jacob Bernoulli cuya ecuación es $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$, como símbolo de *Infinito*, donde se aritmetizaba la "Geometria indivisibilibus" de Cavalieri, geometría que estableció la autenticidad y la legitimidad del cálculo de los indivisibles (Boyer, 1986).

Por otro lado, Cavalieri había ideado una nueva técnica para solucionar cierta clase de problemas geométricos, tal es el caso del problema de "*la génesis de las figuras geométricas*", cuyo procedimiento describe González (2004) a continuación:

Considerando la generación del cono y del cilindro a partir del triángulo y del paralelogramo, y teniendo en cuenta que la superficie del paralelogramo es el doble de la del triángulo, supuestas la misma base y altura, Cavalieri observó la *anomalía* o desproporción de que el volumen del cono fuera un tercio del cilindro. Para corregir esta anomalía y buscar la proporción entre los dos sólidos y los elementos que los generan, propuso que éstos fueran considerados, no como el resultado de un corte que siguiera el eje del cono o del cilindro, sino de otro tipo de corte, por planos equidistantes y paralelos a la base. Ello implicaba el recurso a lo infinitamente pequeño, o a lo indivisible, conforme al espíritu arquimediano. (p. 100)

Por lo que este nuevo procedimiento de cálculo se basó en cuadrar o cubicar, tomando aquellos elementos propios que se originan en las secciones paralelas a la base. Donde se establece, además, una correspondencia entre magnitudes desconocidas y magnitudes conocidas pero sin llegar a establecer una magnitud total con relación a las partes geométricas que forman la figura. Este método se acercó mucho a la integración y sirvió de base para su creación. Por otro lado, hay que señalar que como la suma de los elementos infinitésimos de la figura no era capaz de ser expresada matemáticamente en esos momentos, en la práctica se sustituía por una técnica que evidenciara geométricamente la correlación entre dos sumas infinitas de partes infinitas en número ilimitado (González, 2004).

Asimismo, la dificultad matemática que se presentaba en la geometría de Cavalieri puede ser ejemplificada por medio de este ejemplo, siguiendo a Koyré (1977; citado por González, 2004):

La razón entre el cono y el círculo podía hallarse si se podía encontrar la razón entre la suma (agregado) de todos los círculos decrecientes en el cono (infinitos en número) y la suma de todos los círculos iguales del cilindro (cuyo número es también infinito). En el caso del cono, estos círculos son decrecientes desde la base hasta el vértice y forman una progresión aritmética, la de los cuadrados de los términos. En el caso de otros cuerpos se obtendrían progresiones diferentes. El método general consistía en establecer la relación entre esta suma de términos crecientes o decrecientes y la suma de los términos iguales que forman la figura uniforme y conocida de la misma base y altura. (p. 101)

Por lo tanto, se tiene que la problemática teórica ocasionada por la geometría de los indivisibles tenía su origen, de acuerdo a González (2004):

(…) en el paso de entidades unidimensionales a entidades bidimensionales, al sustituir un elemento lineal por un elemento superficial: para mayor complicación, éste último podía tener forma cuadrada, circular, etcétera, según se tratara de conos, pirámides, etcétera; pero el paso determinante era la sustitución de una línea por una superficie. Por consiguiente, al considerar un área como una suma de rectas se estaba razonando entorno a figuras finitas del espacio sobre la base de considerarlas formadas por elementos infinitamente pequeños. (p. 101)

Sin embargo, la investigación de los infinitesimales trajo como consecuencia muchas crisis de los fundamentos para la época, uno de tantos coparticipes de esas crisis fue Blaise Pascal, quien introdujo la consideración de un *Infinito* tan pequeño como se imagine o se desee, independientemente de su extensión física, por lo de su carácter de indivisible. En contraste con las teorías imperantes, las cuales eran regidas por una metodología basada en el ideal escolástico de la deducción, es decir, el ideal de emplear nociones que hayan sido definidas perfectamente (González, 2004). Aunque cabe resaltar, que el cálculo de los indivisibles planteado por Pascal no satisfacía algunas de las reglas de la aritmética, tal como lo señalaba Brunschvicg (1972, citado por González, 2004; p.98) el cual da como ejemplo el siguiente:

(…) la proposición que afirma que un indivisible, multiplicado tantas veces como se quiera por una cantidad, está tan alejado de sobrepasar una extensión dada que no puede formar sino uno solo y único indivisible. A partir de esta propiedad, Pascal asimiló el indivisible al cero de la aritmética, que como tal es un verdadero cero de la extensión. Ello estaba en clara oposición a algunas leyes de representación espacial, como la que expresaba un plano por un número indefinido de líneas. (p. 99)

En este orden de ideas, Pascal mantenía su teoría en un movimiento constante entre "la consideración de la división infinita como algo incomprensible y sin representación directa, y por otra parte, como un principio geométrico ineludible. La noción matemática de indivisible no es sino un reflejo de esa contradicción" (González, 2004; p. 99). La manera en que se manifiesta el pensamiento pascaliano queda ejemplificada, siguiendo a Brunschvicg (1972, citado por González, 2004), a continuación:

> (…) mientras el método de exhaución de los griegos se expresa y se representa en las figuras mismas, tal como aparecen a la mirada del geómetra, el método de los indivisibles, cuando trata de resolver los problemas de integración de una figura dada, recurre a la suma de infinidad de elementos que tienen una dimensión menos. Esta infinitud de elementos constituye un supuesto del razonamiento, que basta para configurar la práctica geométrica del nuevo método de lo indivisible. (p.99)

Posteriormente, Pascal al realizar estudios profundos sobre la cicloide, y todos aquellos problemas relacionados con esta, introdujo los principios fundamentales del análisis infinitesimal, antes que cualquier otro, aunque en sus cálculos no se manejaba de manera explícita la noción de *Infinito* (González, 2004). Por lo que, ideó un procedimiento, el cual consistía en:

> (…) determinó, de manera rigurosa, los límites de las sumas de un número infinitamente grande de cantidades infinitamente pequeñas, resolviendo a la vez los problemas de los diferentes tipos de integración a base de calcular volúmenes geométricos. La noción pascaliana equivalente a la de integral venía dada por la suma de líneas, planos y senos, y el método de integración tenía su equivalente en las sumas piramidales. Su método, directo y geométrico, le dispensaba de la necesidad de buscar un algoritmo. (González, 2004; p. 101)

Por otro lado, Isaac Newton (1642-1727) elabora la teoría de las fluxiones en su obra *Methodus fluxionum et serierum infinitorum* (1736), "donde se estudian las magnitudes variables, introducidas como abstracción de las diferentes formas del movimiento mecánico continuo denominadas fluentes. Todas las fluentes son variables dependientes y tienen un argumento común, el tiempo" (Ferrante, 2009; p.6). En este método, Newton "consideraba a las variables x e y como cantidades que van fluyendo, o *'fluentes'*, de las cantidades p y q[13] (…) son las 'fluxiones' o velocidades de variación" (Boyer, 1986; p.499) y que "la razón p/q (…) la razón entre la velocidades instantáneas del cambio de y y de x, es decir la pendiente de la curva $f_{(x,y)} = 0$"(Boyer, 1986; p.498) , mediante este procedimiento trató de forma general problemas de análisis infinitesimal, llegando a resultados tales como la demostración que el área bajo la curva $y = ax^{\frac{m}{n}}$ viene dada por $\frac{ax^{\frac{m}{n+1}}}{\frac{M}{n+1}}$, o lo que es lo mismo $z = \frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}}$, donde z es el área de la curva (Boyer, 1986).

Por otro lado, años anteriores a la aparición del método de las fluxiones, había desarrollado de manera indirecta el teorema binomial (1664 ó 1665) a partir de los trabajos de Wallis en relación a un problema de cuadraturas y cálculo de áreas. En palabras de Boyer (1986), en relación a una carta escrita por Newton a Leibniz donde explica como concibió ese método, relata que:

> (…) se encontró en la obra de Wallis con el cálculo de áreas (desde x = 0 hasta x = x) encerradas por curvas cuyas ordenadas eran de la forma $(1-x^2)^n$. Examinando las áreas que se obtenían para exponentes n iguales a 0, 1, 2, 3, etc., descubrió que el primer término siempre era x, el segundo término era $\frac{-0}{3}x^3$ ó $\frac{-1}{3}x^3$ ó $\frac{-2}{3}x^3$ ó $\frac{-3}{3}x^3$, según que el exponente n fuera 0, 1, 2 ó 3, y así sucesivamente. Por lo tanto, aceptando el principio de "intercálculo" o inerpolación de Wallis, supuso Newton que los dos primeros términos que aparezcan en el área para $n = \frac{1}{2}$ deberían ser
>
> $$x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3}$$
>
> y, de la misma manera, procediendo por analogía, encontró los términos siguientes, siendo los cinco primeros
>
> $$x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3} - \frac{\frac{1}{8}x^5}{5} - \frac{\frac{1}{16}x^7}{7} - \frac{\frac{1}{128}x^9}{9}$$
>
> Posteriormente comprobó Newton que se podría haber obtenido el mismo resultado deduciendo primero que
>
> $$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \cdots$$
>
> por medio de una interpolación análoga a la anterior, y después hallando el área por integración de la serie término a término. (Boyer, 1986; p.496)

Con lo cual operó sin hacer uso del triángulo de Pascal y a partir del desarrollo de su teorema y de trabajos posteriores con series infinitas vislumbró el camino para el cálculo, puesto que "había descubierto que el análisis mediante series infinitas tenía la misma consistencia interna que el álgebra de cantidades finitas y que estaba regido por las mismas leyes generales" (Boyer, 1986; p.497), por lo que estas series "no deberían ser consideradas más como recursos de aproximación únicamente, sino que eran formas alternativas de las funciones que representaban" (Boyer, 1986; p. 497). Al respecto Wallis en su *Algebra* (citado por Boyer; 1986) declara que la series infinitas o convergentes "sugieren la designación de alguna cantidad particular mediante una progresión regular o sucesión de cantidades que se aproximen a ella de una manera continua y que, si se prolonga infinitamente, debe terminar por ser igual a ella" (p.497).

Por otra parte, se expresó en cuanto a la continuidad y el *Infinito*, al referirse sobre las paradojas de Zenón, específicamente la paradoja de "*Aquiles y la Tortuga*" en el problema de Aquiles, donde se preguntó si algunas variables pueden o no alcanzar sus límites. Tomando en cuenta sus declaraciones realizadas, se tiene:

> (...) esas razones últimas con las cuales las cantidades se desvanecen no son verdaderamente las razones de cantidades últimas, sino límites hacia los cuales siempre convergen 1as razones de cantidades decreciendo sin límite; y a los cuales se aproximan más cerca que cualquier diferencia dada, pero nunca ni van más allá ni en efecto los alcanzan hasta que las cantidades se disminuyan in infinitum[14]. (Cajori, 1915; p.45)

Para luego, manifestar su opinión dejando claro que las variables alcanzan sus límites:

> Las cantidades, y las razones de las cantidades que en cualquier tiempo finito convergen continuamente a la igualdad, y antes de que termine ese tiempo se aproximan una a la otra cada vez más que cualquier diferencia dada, finalmente llegan a ser iguales. [15] (Cajori, 1915; p. 45)

De esta manera, cabe agregar la opinión de Cajori (1915) quien en relación a este expresa:

> En otros pasajes del primer libro del Principia se permite a 1as variables alcanzar sus límites. Aunque la exposición de Newton no es tan explícita como uno quisiera, ni está libre de críticas, merece el crédito de percibir que las variables pueden alcanzar sus límites y que las variables que se presentan en la mecánica usualmente son, de naturaleza tal que efectivamente alcanzan sus límites (p. 45).

Asimismo, contemporáneamente, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), escribió lo siguiente:

> Es verdad que hay una infinidad de cosas, es decir, que siempre hay más de las que podemos designar. Pero si se les toma como auténticos todos, entonces no hay número *infinito*, ni línea ni cualquier otra cantidad que sea *infinita*, como es fácil demostrar. Las escuelas han querido o debido decir eso, al admitir un *infinito sincategoremático* (infinito potencial), pero no el *infinito categoremático* (infinito actual), por decirlo en su lenguaje. En rigor, el verdadero infinito sólo está en lo absoluto, que es anterior a toda composición y no está formado por adición de partes. (p.177)

---

[13] Originalmente Newton utilizaba *po* y *qo*. Estas hacen referencia a los pequeños incrementos que experimentan la variables x e y durante un determinado intervalo de tiempo (Boyer, 1986).

[14] Newton, Principia, Libro I, Sección I, último escolio.

[15] Newton, Principia, Libro I, Sección I, Lema I.

En cuanto a la paradoja de *Infinito* ya descrita por Galileo en sus discursos y demostraciones, del tipo aritmético, en palabras de Burbage y Chouchan (2002) establecen:

> Hay a menudo, dice Leibniz, "fallas en las consecuencias", pero también, "falsas suposiciones que enredan"…, se percibe entonces que muchas de estas paradojas no lo son: las dificultades nacen de principios mal fundados, que juegan como presupuestos en el razonamiento, siendo una mezcla mal controlada de géneros. (p.40)

Con ello Leibniz se desliga un poco de las paradojas del *Infinito*, aludiendo que estas eran originarias de contradicciones que reposan sobre bases inciertas, aunque nunca rechazó su validez, admitió que si las paradojas se desarrollan, es porque nuestros conceptos son limitados. No obstante, todo lo que respecta al empleo y utilización del *Infinito* en la geometría, así como además en la matemática en general, durante el periodo del siglo XVII, se encontraba influenciado por nombres como el de Cavalieri, Fermat y Florimond de Beaune, entre otros. Lo que trajo como consecuencia que muy pocos matemáticos y estudiosos de aquella época lograran entender "el significado y el alcance del nuevo cálculo, el cual investigaba lo infinito a partir de las diferencias de diversos órdenes de infinitos y consideraba lo infinitamente pequeño como variación" (González, 2004; p. 108).

Cabe agregar "que la originalidad del algoritmo leibniciano para el cálculo infinitesimal depende de esta metafísica de la diferencia" (González, 2004; p. 108). En este orden de ideas, "la nueva noción leibniciana de lo infinitamente pequeño permitió que en un problema cualquiera pudiera descenderse de manera progresiva a las diferenciales de grado infinito (dxdy, ddx ddy, etcétera)" (González, 2004; p. 108). Esto se debe a que Leibniz descubrió, alrededor de 1673, que:

> (…) la determinación de la tangente a un curva depende de la razón entre las diferencias de las ordenadas y de las abscisas, cuando se hacen infinitamente pequeñas estas diferencias, así como las cuadraturas dependen de la suma de las ordenadas o de los rectángulos infinitamente estrechos que constituyen el área. (Boyer, 1986; p.505)

A partir de sus trabajos en torno a los infinitesimales y los diferenciales, Leibniz ideó una nomenclatura y nuevo lenguaje para expresar sus operaciones para así ayudar y agilizar los procesos de pensamiento, por lo que, aproximadamente, en el año 1676 "después de varios ensayos se decidió a representar por dx y dy las diferencias más pequeñas posibles (o diferenciales) de la x y de la y", igualmente para el proceso de integración, "escribía simplemente omn. y (es decir, *«todas las y»*) para representar la suma de las ordenadas bajo una curva, pero más tarde utilizó el símbolo $\int y$, y posteriormente aun el $\int y\,dx$" (Boyer, 1986; p.506), donde la s es el signo de la integral por ser la inicial de la palabra suma.

Ahora bien, también hay que mencionar que los fundamentos del cálculo fueron atacados y criticados duramente, uno de sus principales detractores fue el obispo Berkeley(1685 – 1753) quien expuso sus ideas en contra, así su primera declaración publicada sobre este tema aparece en su Alciphron, or the Minute Philosopher (1732). En donde manifiesta, siguiendo a Cajori (1915):

> (…) la ciencia matemática no llega a tener «esas ideas claras y distintas» que muchos «esperan y sobre las que insisten» en los misterios de la religión... como «las que han surgido en geometría sobre la naturaleza del ángulo de contacto, la doctrina de las proporciones, de los indivisibles, los infinitesimales y otros puntos diversos». Dice que así como las matemáticas, aunque envueltas en obscuridades, se consideran excelentes y útiles, también los artículos de la fe Cristiana deben aceptarse como no menos verdaderos y excelentes, debido a que proporcionan material de controversia. (p. 45)

Posteriormente, Berkeley en su obra el Analyst (1734), elabora un discurso sobre dos puntos que son desarrollados y explicados detalladamente, los cuales se describen a continuación en palabras de Cajori (1915):

> (1) La concepción de fluxiones es ininteligible ya que son 1as razones de cantidades que no tienen magnitud, (2) la derivación de la fluxión de x^n se apoya en una violación de un canon axiomático de razonamiento profundo. Newton no tomó las fluxiones infinitamente pequeñas, sino originalmente como los momentos de fluxiones como infinitamente pequeños. Después descartó lo infinitamente pequeño y explicó las fluxiones con su teoría de razones primeras y últimas. Berkeley argumentaba con gran agudeza contra lo infinitamente pequeño. (p. 46)

En este mismo sentido, Berkeley (1982; citado por González, 2004) en *Of infinites* rechazó la utilización de la geometría y las figuras geométricas como símbolos del continuo aritmético, manifestando:

> But if lines are infinitely divisible, I ask how there can be any such thing as a point? Or granting there are points, how can it be thought the same thing to add an indivisible point as to add, for instance, the differentia of an ordinale in a parabola, which is so far from being a point that it is itself divisible into an infinite number of real quantitys whereof each can be subdivided in infinitum, and so on according to Mrs. Leibnitz.[16](p. 111)

De esta forma, de acuerdo González (2004) Berkeley declarará:

> (…) apoyándose en la filosofía de Locke y también en cierta ambigüedad del lenguaje de Leibniz, las contradicciones que supone la introducción de los infinitesimales (magnitudes actuales que no son ni finitas ni nulas) cuya naturaleza se desconoce y del infinito (no tenemos idea que lo represente) en los nuevos procedimientos matemáticos. Sin embargo, su posición es un elemento muy útil para comprender el alcance de la problemática filosófica del nuevo cálculo que, en ausencia de una noción clara de infinitesimal, su aceptación en general será meramente práctica ante el estupor de que de premisas falsas se deducen fórmulas verdaderas. (p. 111)

Por otro lado, en su obra *A Defence of Fee – thinking in Mathematics* de 1975, realiza un resumen de los intentos para establecer los fundamentos del cálculo en sus coetáneos y los principales problemas que se encontraban en este periodo histórico, de esta manera Berkeley (citado por Lavine, 2005) expresa:

> Algunos vuelan hacia proporciones entre nadas. Algunos rechazan cantidades porque son infinitesimales. Otros sólo aceptan cantidades finitas y las desechan porque no son considerables. Unos equiparan al método de las *fluxiones* con el de *exhaustaciones* y no admiten nada de ahí en adelante. Unos más mantienen una clara concepción de las fluxiones. Otros más sostienen que pueden demostrar cosas incomprensibles. Algunos mas probarían el algoritmo de las *fluxiones* por medio del método de reductio *ad absurdum*; otros los harían a priori. Algunos sostienen que los incrementos que tienden a cero son cantidades reales; otros dicen que son nada, y otros más aseguran que son cantidades límite. Hay tantos modos de pensar como hombres […] Algunos insisten en que las conclusiones son verdaderas, y por tanto también los principios […] Finalmente, varios […] francamente reconocieron que las objeciones no tienen respuesta. (p.37)

Luego, el matemático suizo Leonhard Euler (1707 – 1783) integró los fundamentos del cálculo diferencial de Leibniz y el método de las fluxiones de Newton, dando origen al "análisis" propiamente dicho, el cual se refiere al estudio de los procesos infinitos. El nuevo análisis se fundamentó en la obra *Introductio in analysin infinitorum*, aunque a las funciones algebraicas y las funciones transcendentales se les dio un tratamiento analítico estrictamente más no geométrico, por lo que, cuestiones como la del seno de un ángulo no era percibida como un segmento sino como un número que representa la ordenada de un punto de la circunferencia unidad. En esta obra, Euler trata de proceso infinitos, ya sean productos o fracciones con series infinitas (Boyer, 1986).

[16] "Pero si las líneas son divisibles al infinito, yo me pregunto ¿cómo puede existir un punto? O, si se admite la existencia de puntos, me pregunto cómo se puede pensar que sea la misma cosa añadir un punto indivisible y añadir por ejemplo la *differentia* de una ordenada en una parábola, diferencia que es por poco un punto ya que como tal es divisible en un número infinito de cantidades reales, cada una de las cuales puede ser a su vez subdividida in *infinitum* y así a seguidamente, al menos si creemos al Sr. Leibniz" (tr. Gonzales, 2004; p. 111).

En sus trabajos, Euler manipulaba las relaciones entre la teoría de números y las propiedades de las series infinitas las cuales utilizaba de forma pragmática y en cierto punto imprudentemente, pero que le daba deducciones correctas (Boyer, 1986). De esta manera, obtuvo muchos resultados considerables, tales como:

> del desarrollo:
> $$\ln\frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots$$
> Obtiene que
> $$\ln\infty = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\ldots$$
> y, por lo tanto, que
> $$\frac{1}{\ln\infty} = 0 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{10} - \cdots$$
> donde en la serie aparecen los inversos de los primos, con signos menos, y los inversos de los productos de dos primos distintos, con signo más. (Boyer, 1986; p.563).

Por otro lado, en la *Introductio*, según Boyer (1986) también aparecen una gran cantidad de series y productos infinitos, entre esas aparecen:

> $$0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{16}{17}\cdot\frac{18}{19}\cdot\ldots$$
> y el
> $$\infty = \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{18}\cdot\ldots$$
> consecuencia del anterior. El símbolo ∞ lo utiliza Euler libremente para representar el inverso de cero. (p. 563)

Por el contrario, Jean Le Rond D`Alembert (1717 – 1783), "definía lo infinitamente grande en términos de límites" (Boyer, 1986; p.568) en contraste a la posición de Euler quien consideraba "las cantidades infinitamente grandes como las inversas de las magnitudes infinitamente pequeñas" (Boyer, 1986; p.568). Por lo que, "D`Alembert negaba la existencia del infinito actual, ya que pensaba en magnitudes geométricas y no en términos de la teoría de conjuntos" (Boyer, 1986; p.568). Además, proporciona una idea de límite en la cual "llama a una cantidad el límite de una segunda cantidad variable si la segunda puede aproximarse a la primera hasta diferir de ella en menos que cualquier cantidad dada (sin llegar nunca a coincidir con ella)" (D`Alembert; citado Boyer, 1986; p.567), aunque esta definición no fue muy aceptada por los matemáticos de la época por su falta de precisión lingüística.

La Matemática Contemporánea. Siglos XIX – XX:

"¡El infinito! Ninguna cuestión ha conmovido
tan profundamente el espíritu del hombre".
David Hilbert (1921)

En 1831, Gauss en un fragmento en una carta dirigida Schumacher muestra su posición en cuanto al Infinito actual, al enviar en esta una demostración sobre uno de los postulados de Euclides da a entender su rechazo rotundo hacia el Infinito, a continuación de acuerdo a Ferreirós (1992; citado por Belmonte, 2009) Gauss escribe:

> Pero en lo que respeta a su demostración protesto ante todo contra el uso de una magnitud infinita como si fuera completa, cosa que nunca está permitida en la matemática. El infinito es sólo una façon de parler, cuando propiamente se habla de límites que se acercan tanto como se quiera a determinadas relaciones, mientras que a otros se les permite crecer sin limitación. (p. 27)

De esta manera, se puede observar la manera en que Gauss se expresaba acerca de la existencia de un infinito actual, el cual rechaza y que, por su parte, solo aprobaba la noción potencial de está, basada en la teoría de Límites. Sin embargo, debido al rechazo idealista que surgió posteriormente con respecto al mecanicismo newtoniano originó que se volviera a tomar en consideraciones algunas de las posiciones de Leibniz, en específico la formulada en la Monadología, en la que se fundamentó en la aceptación de lo simple, es decir, las monadas, y del *Infinito actual* (Belmonte, 2009), planteamiento expresado a continuación:

> Estoy en tal medida a favor del infinito actual, que en lugar de admitir que la naturaleza lo aborrece, como se dice vulgarmente, sostengo que la afecta por todas partes para mejor mostrar las perfecciones de su Autor. Así, creo que no hay ninguna parte de la materia que no sea, no digo ya divisible, sino actualmente dividida; y en consecuencia la menor partícula debe considerarse como un mundo lleno de una infinidad de criaturas diferentes. (Ferreirós, 1992; citado por Belmonte, 2009; p.27)

Asimismo, el filósofo Immanuel Kant fijó posición en relación a tal enigmático ente matemático, en el siglo XIX, "coincidía con Aristóteles al señalar que el límite absoluto es imposible en la experiencia, es decir, nunca se puede llegar al infinito (actual)" (Ortiz, 1994; p.63).En la crítica del discernimiento Kant indica que no se puede dar un número al *Infinito* puesto que no puede haber totalidad absoluta de progreso sin fin, es decir, porque no se puede dar un esquema, un equivalente espacio – temporal al *Infinito*.

Pero fue el matemático francés Augustin – Louis Cauchy (1789 – 1857) quien le dio la forma que tiene actualmente el cálculo infinitesimal elemental; su posición, argumentos y demostraciones en relación a este aparece en tres de sus libros, los cuales son el Cours dànalyse de l`École Polytechnique (1821), el Résumé des lecons sur le calcul infinitésimal (1823) y las Leçons sur le calcul différentiel (1829), partiendo del concepto de Límite de D`Alembert y perfeccionándolo desde una perspectiva aritmética, dejando a un lado la geometría, los infinitesimales, así como también las velocidades de cambio (Boyer, 1986), llega a formular la siguiente definición:

> Cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por definir de él en tan poco como queramos, este último valor se llama el límite de todos los demás. (Cauchy, 1882 – 1932; citado por Boyer, 1986; p.647)

Además, define un infinitésimo, no como una cantidad o número constante muy pequeño, sino como "una cantidad variable se hace infinitamente pequeña cuando su valor numérico disminuye indefinidamente de manera que converge hacia el límite cero" (Cauchy, 1882 – 1932; citado por Boyer, 1986; p.647). Por otro lado, Cauchy "definió la Derivada como un límite y sólo empleó diferenciales definidas en términos de la Derivada; definió la convergencia y divergencia de las series y abiertamente enunció que las series divergentes no tienen suma" (Lavine, 2005; p.45). También logra definir la Derivada haciendo uso de conceptos fundamentales tales como la de función y de límite, en consecuencia:

> Para definir la derivada de la función $y = f_{(x)}$ con respecto a *x*, le da a la variable x un incremento $\Delta x = i$ y forma el cociente
> $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_{(x+i)} - f_{(x)}}{i}$$
> Y al límite de este cociente de diferencias cuando i tiende hacia cero, lo define como la derivada de $f'_{(x)}$ de y con respecto a *x*. (…) Si d_x es una cantidad finita, entonces la correspondencia diferencial d_y de $y = f_{(x)}$ vendrá definida simplemente como $f'_{(x)} = d_x$. (Boyer, 1986; p. 648).

De igual forma, definió "la integral como el límite de una suma de rectángulos" (Lavine, 2005; p.45). Su aporte más significativo es el relacionado con el desarrollo de criterios de convergencia para series, la más conocida el criterio de convergencia de Cauchy para una sucesión, la cual establece que: "la sucesión S_0, S_1, ... tiene un límite si $|S_{n+r} - S_n|$ es menor que cualquier cantidad dada para todo valor de r y para valores suficientemente grandes de *n*" (Lavine, 2005; p.45). No obstante, muchos de sus errores, de acuerdo a Grattan – Guiness (1980; citado por Lavine, 2005) provenían de que "hablaba del límite de una variable, no del límite de una función, y no expuso la dependencia de una variable en la variable independiente. Consideraba a una variable que se aproxima a cero como un infinitesimal" (p. 46).

Luego, el filósofo, teólogo matemático checo Bernhard Bolzano (1781 – 1848), fue el primero que se preocupó y trató de cimentar la noción de *Infinito* actual, en su obra Paradojas de lo infinito (1851) expresando que éste podía ser introducido en matemática de manera consistente, libre de contradicciones y resaltando el hecho de que el concepto de equivalencia entre dos conjuntos era aplicable tanto a conjuntos finitos como infinitos, lo cual sirvió de base e influyó en los trabajos de Georg Cantor; esto de acuerdo a Ortiz (1994).

Bolzano define al conjunto infinito como: Un conjunto no vacío A es finito si para algún entero positivo n, $\boldsymbol{A}$ es equipolente a $\{1, 2, 3, 4, 5,\ldots., n\}$; de otra forma $\boldsymbol{A}$ es infinito. Por otro lado, un conjunto $\boldsymbol{A}$ es infinito si existe un subconjunto propio $\boldsymbol{B}$ de $\boldsymbol{A}$ equipolente a $\boldsymbol{A}$; en cualquier otro caso $\boldsymbol{A}$ es finito. Cabe destacar que esta definición de conjunto finito es la actualmente aceptada, aunque en ella Bolzano plantea una contradicción con la intuición que se tiene de subconjunto propio, por la razón de que si un conjunto $\boldsymbol{A}$ tiene un subconjunto propio $\boldsymbol{B}$, entonces $\boldsymbol{B}$debe ser más pequeño que $\boldsymbol{A}$ debido a que existen elementos de $\boldsymbol{A}$ que no están en $\boldsymbol{B}$, esta contradicción aparente lo que indica es que la manera en que se observa el mundo de lo finito al igual que la lógica empleada para explicar los fenómenos finitos no podrían ser suficientes para ser aplicables a situaciones donde se presente o se mida la noción de *infinito*. En relación con esto Boyer (1986), expresa:

> Así fue hasta que en tiempos de Dedekind, quien vio "que en las paradojas de Bolzano no algo anómalo, sino justamente una propiedad universal de los conjuntos infinitos, que Dedekind tomó como definición precisa: "Un sistema S se llama infinito cuando es semejante a una propia parte de sí mismo; en caso contrario, se dice que S es un sistema finito". (p.700)

Por su parte, Karl Weierstrass (1815 – 1897) realizó varias investigaciones sobre representación de funciones por medio de series de potencias y estableció una definición de Límite más elaborada que la de Cauchy, donde se reemplaza la expresión "tan poco como queramos" por ϵ (Lavine, 2005). Esta definición, plantea que:

> (…) una función $f_{(x)}$ tiene su límite L en $x = x_0$, si para todo $\epsilon > 0$ hay una δ tal que si $|x - x_0| < \delta$ y $x \neq x_0$, entonces $|f_{(x)} - L| < \epsilon$. En la terminología de Cauchy la "variable" – que es la función – "termina" en el intervalo definido por $|x - x_0| < \delta$, difiriendo del "valor fijo" L por "tan poco como uno desee", es decir, por menos que ϵ. (Kitcher, 1983; citado por Lavine, 2005; p.49).

Ya para la década de 1860, Weierstrass empleando sus propios hallazgos y los métodos sugeridos de Bolzano logra demostrar "que todo conjunto infinito acotado de puntos tiene un *punto límite*, es decir, un punto en el que todo intervalo alrededor de él contiene una cantidad infinita de miembros del conjunto" (Kline, 1972; citado por Lavine, 2005; p.50), a esta enunciado se le conoce como el teorema Bolzano – Weierstrass.

Ahora, para la época el tratamiento del *Infinito* estaba orientado y asociado con lo muy grande o lo muy pequeño, no eran aceptada las ideas relacionadas con el *Infinito actual*, pues eran vista como anomalías, hasta que apareció la definición de conjunto infinito dada por Dedekind (1831 – 1916)en su obra *Stetigkeit und irrationale Zahlen*en 1872. Esta definición reza de la forma siguiente: Dedekind (1882): "Un conjunto $\boldsymbol{A}$ es *infinito* si algún subconjunto propio $\boldsymbol{B}$ de $\boldsymbol{A}$ es equipolente a $\boldsymbol{A}$; en cualquier otro caso $\boldsymbol{A}$ es infinito" (Carta de Dedeking a Cantor, 1882; citado por Ortiz, 1994; p. 66).

Sin embargo, luego, Georg Cantor (1845 - 1918) demuestra que existen diversos órdenes de infinitud. Además, desarrolla una teoría conjuntista lineal de puntos al trasladar la operatividad de los números reales a los números de la recta, basada en la correspondencia uno a uno entre dos conjuntos, estableciendo la relación de equipotencia entre conjuntos a través de una relación biyectiva, permitiendo distinguir entre conjuntos contables y no contables, con las investigaciones y aportes de Cantor se da un cambio metodológico dejando a un lado el proceso de verificación empírico por uno más apegado a la lógica (Belmonte, 2009). Sus teorías serán estudiadas más a fondo en el apartado titulado *"el Paraíso de Cantor"* por sus invaluables contribuciones al campo de la matemática y al estudio del *Infinito*.

Posteriormente, en 1892 Camille Jordan realizó una formulación concluyente en relación a la integral de Cauchy – Riemann, influenciado por la Teoría de Conjuntos de Cantor, este realiza estudios y proporciona una serie de afirmaciones definitivas. En aquella época la Integral de una función en dos dimensiones era definida sobre la región que se hallaba en el interior de una curva cerrada y que a su vez estaba limitada por esta, entonces la integral venía dada en términos de los valores límite de las sumas de particiones del plano las cuales se realizaban arbitrariamente y en rectángulos (Lavine, 2005).

No obstante, esta concepción de la integral de superficie presentaba un problema, el cual atañía al qué hacer con los rectángulos que se encontraban en la frontera de la región evaluada, es decir, aquellos rectángulos que no se encontraban totalmente dentro ni totalmente fuera de la región a integrar. La cuestión estaba en que si estos debían ser tomados o no al realizar las sumas. Por lo que el problema se resolvió por medio de la afirmación "que la suma de las áreas de los rectángulos de la frontera tendía a cero en el límite y que, por tanto, no importaba si los rectángulos de la frontera eran incluidos o excluidos" (Lavine, 2005; p. 64). Pero surgieron otras cuestiones que parecían cuestionar esta afirmación más específicamente en los estudios de la curva de Peano.

Luego, esto fue resuelto por Jordan al tratar las particiones (los rectángulos) como los subconjuntos del plano desde el punto de vista cantoriano. En palabras de Lavine (2005):

> La noción de Cantor y Stolz del contenido exterior se generaliza de una manera obvia de la línea al plano: se pueden usar rectángulos en vez de intervalos. Jordan introdujo la noción de contenido interior, la cual le fue sugerida por la noción de contenido exterior. El conjunto exterior de un conjunto se define utilizando las áreas de conjuntos finitos de rectángulos que contienen al conjunto: es la máxima cota inferior de tales áreas. El contenido inferior de un conjunto es la mínima cota superior de las áreas de los conjuntos finitos de rectángulos disyuntos dos a dos que están contenidos dentro de dicho conjunto. Jordan decía que un subconjunto del plano es medible si tiene un conjunto exterior igual a su contenido interior. Naturalmente, la medida de un conjunto medible es su contenido exterior o interior. Se puede ver fácilmente que la medida de los conjuntos familiares de puntos sobre el plano son justamente sus áreas. (p. 64)

Una vez hechas estas modificaciones, "Jordan definió la integral en términos de los valores límite de las sumas sobre las particiones arbitrarias del plano en conjuntos medibles" (Lavine, 2005; p. 64), tratando así la región de integración como un conjunto medible arbitrario, y no como se venía haciendo en el cual se trataba solo como el interior de una curva. Demostrando además, "que un conjunto es medible si y solo si el contenido exterior de su frontera es cero" (Lavine, 2005; p. 64), lo cual le sirvió para demostrar "que la suma de las áreas en la frontera tendían a cero en el límite y, por tanto, que la integral estaba bien definida" (Lavine, 2005; p. 64), lo cual añadió en su obra Cours d' analyse en 1893.

Ahora, ya para el año de 1902 Henri Lebesgue, introduce en el análisis la teoría de conjuntos, una vez ya definida la exponenciación cardinal hecha por Cantor en 1885 donde planteó que la potencia del conjunto de los números reales es $2^{\aleph_0}$. Lebesgue modifica la definición del conjunto exterior de los subconjuntos del intervalo unitario con la finalidad de dar cabida a la existencia de conjuntos infinitos numerables de intervalos, ya demostrados anteriormente por Cantor, en lugar de conjuntos finitos solamente. Por lo tanto, de acuerdo a Lavine (2005), "admitió $[a_1, b_1]$,…, además de $[a_n, b_n]$" (p. 65), para luego, definir "que el contenido interior de un subconjunto E del intervalo unitario 1 menos el contenido exterior del complemento de E. Actualmente la noción correspondiente de medida es conocida como medida de Lebesgue" (p. 65). Esta medida la empleó para definir la integral de una función planteándola como:

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

Posteriormente, Kurt Gödel (1906-1978), demostró como producto de sus *Teoremas de Incompletitud*, por medio de un corolario, que la consistencia de la *Teoría de Conjuntos*, desarrollada hasta el momento, no podía probarse dentro del mismo sistema. Esto es, en los "Teoremas de Incompletitud se demostraba que siempre existirían ciertos problemas sencillos que no se podrían resolver con una teoría axiomática. Además, la existencia de conjuntos infinitos no puede deducirse del resto de los axiomas de la Teoría de Conjuntos" (Fedriani y Tenorio, 2010; p.44).

El Paraíso de Cantor:

"En matemática, el arte de formular una pregunta ha de tenerse en mayor estima que resolverla"
Georg Cantor

Esta investigación permite estudiar los principales constructos teóricos de Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 - 1918) en relación a la noción de *Infinito* actual, los cuales evidencian el paraíso que él construyó a los matemáticos alrededor de tan enigmático asunto, que ha preocupado al hombre desde sus inicios como ser pensante. Sus investigaciones fueron de vital importancia para el desarrollo de la matemática actual, por tal motivo se tomó este apartado solo para describir y explicar, en la medida de lo posible, su teoría de *Infinito* inscrita en su aritmética transfinita y en su teoría de conjuntos.

Cantor, introdujo la *Teoría de los Conjuntos* y *Números Transfinitos*, aportando así un nuevo lenguaje lógico manejable y capaz de expresar conjuntos infinitos a través de combinaciones de una cantidad limitada de signos con lo cual fue capaz de describir conjuntos más grandes aún que un "todo". En palabras de Lavine (2005):

> Cantor comenzó estudiando los dos puntos más interesantes: el conjunto de los números racionales y el de los números reales. Buscaba diferencias entre los dos que fueran relevantes en relación con el hecho de que los números reales son continuos, mientras que los números racionales no lo son. En 1874, (…), demostró que los números algebraicos (y por tanto su subconjunto, los números racionales) pueden ser puestos en correspondencia biunívoca (uno a uno), con los números naturales, mientras que no puede hacerse esto mismo con los números reales (p.56)

En este mismo orden de ideas, una de las demostraciones más relevantes en la *Teoría de Conjuntos* es la que tiene que ver con la afirmación de que el conjunto de los números reales posee una potencia mayor que la del conjunto de los números racionales; para esta demostración utilizó el método de *reductio ad absurdum*,Boyer(1986) describe el método y razonamiento empleado por Cantor de la siguiente manera:

> Supongamos que los números reales entre 0 y 1 son numerables, y supongámoslos expresados todos ellos como decimales que no terminan en una sucesión de ceros (es decir, que por ejemplo $\frac{1}{3}$ aparecerá representado por 0,3333…, $\frac{1}{2}$ por 0,4999…, etc.); si los números $0 < x < 1$ pudieran ordenarse en un orden numerable tendríamos una sucesión:
>
> $$a_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13} \ldots$$
> $$a_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23} \ldots$$
> $$a_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33} \ldots$$
> ………………………………………………
>
> donde a_{ij} es un dígito entre 0 y 9, ambos incluidos. Para demostrar que en cualquier ordenación de este tipo no pueden figurar *todos* los números reales entre 0 y 1, Cantor construye un decimal infinito distinto de todos los de la lista: para ello basta escribir el decimal $0, b_1b_2b_3b_4 \ldots$, donde $b_k = 9$ si $a_{kk} = 1$, y $b_k = 1$ si $a_{kk} \neq 1$. Este número real estará entre 0 y 1 y, sin embargo, será distinto evidentemente de todos los de la sucesión dada, que habíamos supuesto contenía *todos* los números reales entre cero y uno. (p.702)

Por lo tanto, Cantor demostró la existencia de varios "tamaños" u órdenes de infinitud, probando que es imposible establecer una correspondencia uno a uno entre el conjunto de números naturales y el conjunto de números reales entre el cero y el uno. Argumentando con esto que las cantidades infinitas no necesariamente deberían responder a las mismas leyes que las finitas, y que sus leyes específicas podían ser establecidas.

Además, introdujo una invención magistral, la del concepto de función *biyectiva*, en otras palabras, la idea de una relación exhaustiva y uno a uno, la cual le servía de herramienta para la comparación de conjuntos y establecer si eran equivalentes o no. Con lo que posteriormente surge el concepto de *cardinalidad*, es decir la **"**herramienta para comparar conjuntos numerables. Dos conjuntos ***A*** y ***B*** tienen la misma cardinalidad si es posible definir una relación biyectiva de ***A*** sobre ***B***" (Revista Matemática Digital. Nº 18, abril 2009).

También ideó y utilizó una serie de principios básicos con lo cual fundamentó su teoría, Lavine (2005) con respecto a ello manifiesta, que aunque no trabajó bajo un esquema axiomático, este "abordó los hechos con base en cierta perspectiva o concepción, no con base en supuestos ya estipulados. No obstante, tomó como básicos cada uno de los principios que yo considero como axiomas cantorianos, en uno u otro sentido, básicos" (p.94). Estos supuestos o axiomas cantorianos, de acuerdo a Lavine (2005) y en notación actual, son:

> Axioma 1. Los números ordinales están ordenados linealmente por $<$.
> Axioma 2. Existe un numero ordinal mínimo, 0.
> Axioma 3. Todo número ordinal α tiene un sucesor inmediato $\alpha + 1$[17]. (p.95)
> (…)
> Axioma 4. Existe un número ordinal ω tal que $0 < \omega$. Para todo número ordinal α, si $\alpha < \omega$, entonces $\alpha + 1 < \omega$ y cada número ordinal distinto de cero $\alpha < \omega$ hay un número ordinal β tal que $\alpha = \beta + 1$.(p.96)
> (…)
> Definición 5. Un *conjunto* es el rango de una función uno a uno que tiene como dominio un segmento inicial propio de los números ordinales[18].
> Axioma 6. (de extensionalidad). Los conjuntos que tienen los mismos elementos son iguales.
> Axioma 7.Todo conjunto de ordinales tiene una mínima cota superior.(p.96)
> (…)
> Axioma 8. Para todo número ordinal α hay un conjunto asociado (α) –la clase numérica de α– tal que β está en (α) si y sólo si β es un número ordinal y el conjunto de predecesores de α es el rango de una función uno a uno que tiene dominio de los predecesores de β. (p.96)
> (…)
> Axioma 9. Para todo número ordinal α, hay un número ordinal $\beta > \alpha$ tal que el conjunto de los predecesores de β no es el rango de una función uno a uno con dominio α.(p.97)
> (…)
> Axioma 10. Sea S un conjunto de conjuntos, sea F una función que tiene como dominio los predecesores de algún número ordinal α que atestigua que S es un conjunto, de tal manera que todo miembro de S sea $F_{(\gamma)}$ para alguna $\gamma < \alpha$. Entonces hay una función binaria H tal que, para todo $\gamma < \alpha$, la función *"única"H* $(\gamma, .)$que permanece después de que γ es introducida a H tiene como dominio el conjunto de los predecesores de un número ordinal inicial y atestigua que $F_{(\gamma)}$ es un conjunto. (p.97)

---

[17] Específicamente, "el axioma dice que para todo número ordinal α hay un número ordinal β tal que $\alpha < \beta$, y para cualquier número ordinal γ, si $\alpha < \gamma$, entonces $\beta \leq \gamma$. Se ve fácilmente que el número ordinal β es único. Llamémoslo $\alpha + 1$" (Lavine, 2005; p.95).

[18] Complementado la definición, Cantor (1891; citado por Lavine, 2005) expresa: "entiendo por "conjunto" (*"Mannigfaltigkeit" oder "Menge"*) toda cantidad que puede ser concebida como unidad, i.e., cualquier dominio de elementos definidos que pueden ser amalgamados en un todo por medio de una Ley" (p.100).

Luego, presenta una definición de conjunto más elaborada: "Entendemos por conjunto bien definido (o variedad) cualquier reunión en un todo *M* de determinados objetos bien distinguidos *m* de nuestra intuición o nuestro pensamiento (llamados elementos de *M*)". Donde al decir la frase "*reunión en un todo*", Cantor expresa que un conjunto es un objeto en sí mismo, dando la noción de clase, por otro lado, la afirmación "*de objetos bien distinguidos*" quiere dar a entender que todos los elementos de un conjunto deben estar determinados sin ninguna ambigüedad y que estos no deben ser confundidos entre ellos mismos, ni con otros elementos que no sean del conjunto, para así establecer si un objeto pertenece o no al conjunto. Y por último, cuando se refiere a objetos "*de nuestra intuición o pensamiento*" desea manifestar que los objetos pueden ser reunidos dentro de un mismo conjunto sin atender a la procedencia, diversidad o abstracción de estos (Di Tada, E., 2006).

De igual manera, durante su investigación, Cantor define un concepto que le es imprescindible a la hora de desarrollar su corpus teórico y este es el de *potencia* o *número cardinal de un conjunto*, el cual es definido por Cantor (citado por Di Tada, E., 2006):

> Llamaremos potencia o número cardinal del conjunto *M* al concepto general que por medio de nuestra facultad activa del pensamiento resulta cuando se hace abstracción de la naturaleza de los elementos que le pertenecen y del orden que están dados,..., el número cardinal $\overline{\overline{M}}$ es un conjunto compuesto por unidades y este número tiene existencia en nuestra mente como una imagen intelectual o proyección de conjunto original *M*. (p. 114)

Dicho en otras palabras, la potencia de un conjunto "puede ser considerada como un atributo de cualquier colección *bien definida*, cualquiera que sea el carácter de sus elementos" (Cantor, 1879; citado por Lavigne, 2005; p.58).

Por otro lado, en una carta dirigida a Eneström expone una serie de opiniones y explicaciones con respecto al infinito actual y a los números hechos infinitos[19], entre las cuales resalta la manifestada en oposición a las supuestas pruebas que existían en contra de las acepciones ya mencionadas, argumentando que estas pruebas son erróneas, ya que se le asigna a los números de hecho infinitos o números transfinitos, todas las propiedades que satisfacen los números finitos. Afirmando seguidamente:

> De hecho, por el contrario, los números infinitos, en tanto pueda, en absoluto, hablarse de ellos, deben considerarse justamente en su oposición a los números finitos, es decir, como un nuevo tipo de números, cuyas características deben depender exclusivamente de la naturaleza misma de las cosas y ser objeto de investigación independiente, sin someterse a nuestro arbitrio o a nuestros prejuicios. (Cantor, 2004; p. 178)

Con respecto a esto, en la misma carta Cantor plantea que son diversos los criterios empleados para agrupar y ordenar las principales concepciones que se han manifestado a lo largo de la historia en torno al problema del *Infinito actual* y que en la mayoría de estos puntos de vista han sido utilizados para poner en duda la existencia del *Infinito actual*. Entre ellas menciona las presentes:

> En primer lugar, en tanto existente *in Deo Extramundano aeterno omnipotenti sive natura naturante*[20]. En tal caso, se llama *absoluto*.
>
> En segundo, en tanto que se presenta *in concreto seu in natura naturata*[21]. Aquí lo llamo *transfinito*.
>
> El infinito actual puede cuestionarse, en tercer lugar, *en abstracto*, es decir, en tanto que pueda ser aprehendido por el conocimiento humano en la forma de números *de hecho infinitos* o *números transfinitos*, como los llamo, esto es, en la forma todavía más general de los *tipos de orden*. (Cantor, 2004; p.179)

Una vez señaladas estas posturas u orientaciones, Cantor (2004) hace una distinción entre ellas y toma para ello las dos últimas, puesto que la primera alude a la visión filosófica donde se aborda el problema que plantea el *Infinito actualin Deo*, en relación a esto último Ortiz (1994) indica "el Infinito Absoluto es el Absoluto, por definición lo imposible de alcanzar: lo inalcanzable. El grado máximo de independencia, autonomía y completitud (…) Para Cantor desentrañar el infinito absoluto era una labor mística: la búsqueda de Dios" (p.67). Ahora, de las dos posturas escogidas Cantor indica que se generan cuatro puntos de vistas distintos y que han sido sostenidos en la historia, las cuales describe a continuación:

> (1) Se puede rechazar el infinito actual tanto *en concreto* como *en abstracto*.
>
> Esta postura ha sido defendida, por ejemplo, por Gerdil, Cauchy, Moigno, al igual que por Ch. Renouvier y por todos los llamados *positivistas* y pensadores afines.
>
> (2) Se puede aceptar el infinito actual *en concreto* y, al mismo tiempo, rechazarlo *en abstracto*. Como he demostrado en mis *Grundlagen*[22], esta es la posición que han sostenido, entre muchos otros, Descartes, Spinoza, Leibniz y Locke (…) Hermann Lotze (…)
>
> (3) El infinito actual puede también ser aceptado *in abstracto* y, al mismo tiempo, por el contrario, puede ser negado *en concreto*. Este punto de vista es compartido por una parte de los neo-escolásticos, mientras que otra parte de ellos, estimulada poderosamente por la Encíclica *De Philosophia Cristiana admentem Sancti Thomae Aquinatis Doctoris Angelici in scholis catholicis instauranda* de León XIII, intenta defender el primero de estos cuatro enfoques.
>
> (4) Por último, el infinito actual puede igualmente, aceptarse tanto *en concreto* como *en abstracto*. Esta postura, que personalmente considero como *la única correcta*, ha sido sostenida históricamente por muy pocos. De hecho, quizá sea yo el primero en adherirse con toda determinación y consecuencia a ella.Estoy, sin embargo, firmemente convencido de que no seré el último. (Cantor, 2004; p.180)

De igual manera, aclara que el *Infinito* (indefinitum) *potencial* o sincategoremático no origina una clasificación como la plasmada para *Infinito actual*, debido a que "esta noción sólo tiene importancia como concepto relacional, como una idea subsidiaria de nuestro pensamiento, sin, no obstante, designar ningún concepto propiamente dicho" (Cantor, 2004; p. 181). Por lo que, opina además, que "como un recurso epistemológico y como una mera herramienta mental, ha tenido, por supuesto, un papel muy relevante en el cálculo diferencial e integral inventado por Leibniz y Newton. Pero no puede reclamar para sí más que esto" (Cantor, 2004; p. 181). Mientras, que para Cantor el *Infinito actual* tanto en la matemática como en la física "constituían lo *Transfinito*, donde, a diferencia del infinito absoluto, inalcanzable, existían una infinitud de infinitos: *los cuales están claramente limitados, sujetos a nuevas extensiones, y por lo tanto relacionados con lo finito*" (Ortiz, 1994, p.68).

En suma, fueron innumerables las investigaciones realizadas por los mejores matemáticos de finales de siglo XIX y principios del siglo XX, tales como: Burali-Forti (1897), Hilbert (1926), Zermelo (1871-1953), Fraenkel A. (1891-1965), Russell (1903, 1967.), entre otros; quienes demostraron que las ideas de Cantor se quedarían para siempre en el mundo de las matemáticas, sentando las bases para la comprensión de la noción de *Infinito*, con respecto a esto D. Hilbert (1926) describió a la teoría de Cantor como el "producto más sublime del genio matemático y uno de los logros supremos de la actividad intelectual humana". Aunque en sus investigaciones se demostraron ciertas antinomias sus trabajos conservaron sus principales elementos.

En conclusión, la noción de *Infinito actual* se constituye, en palabras de Cantor (2004; p.182), "en una cantidad (quantum) en sí fija y constante que se encuentra más allá de toda magnitud finita". Es decir, surge al considerarlo como una unidad y que lo tratamos como si fuese un elemento que surge al superar el paso al Límite. Pero las contradicciones que surgieron posteriormente en relación al problema de *la hipótesis del continuo* dejaron ciertas dudas por la indeterminabilidad de esta, debido a los estudios realizados por Gödel y Cohen, propiciando que la naturaleza del *Infinito* siga siendo una inquietud constante y abierta para el espíritu humano, y que dicha noción se manifieste dentro de un movimiento dialéctico entre el ser y no ser, esto es, entre lo apodíctico o la antinomia.

---

[19] "Proviene de la frase *aktual unendliche zahlen* el cual se vincula literalmente a como números actualmente infinitos y que posteriormente Cantor denomina números transfinitos"(n. T, Cantor, 1885, p. 175).

[20] "En un Dios extramundano, eterno y omnipotente, o sea, como una naturaleza creadora" (n. T, Cantor, 1885, p. 179).

[21] "En concreto o como naturaleza creada. La distinción parece provenir de Nicolás de Cusa, quien distingue entre una *natura naturans* (o *naturante*, generadora), esto es, entre el Dios cristiano como algo trascendente y una *natura naturata*, como una naturaleza creada" (n. T, Cantor, 1885, p. 179).

[22] Cantor se refiere aquí a su memoria de 1883, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltikeitslehre* [Fundamentos de una teoría general de las variedades] (n. T, Cantor, 1885, p.179).

2.2.3 Bases psicopedagógicas y didácticas

A la hora de integrar lo matemático y lo pedagógico en ese proceso de didactificación, término empleado por Gascón (2002), la definición de un concepto matemático se debe considerar como una serie de palabras o una definición verbal del concepto, que sea producto de su evolución histórica, entre las cuales, se podrá distinguir entre las *definiciones formales*, o sea, definiciones acordadas y admitidas por la comunidad científica de los matemáticos en un periodo dado de la historia, y las *definiciones personales* utilizadas por los individuos (ya sean estudiantes, profesores, matemáticos, entre otros) (Tall, 2001) como interpretación, construcción o reconstrucción de una definición formal, así como también, algún tipo de imagen que se tiene antes del acercamiento del estudiante con teorías axiomáticas.

Por tanto, se tiene que considerar el lenguaje semiótico, el cual debe adaptarse a las capacidades y a la comprensión de los alumnos; así como también a la secuencia de las unidades de aprendizaje que debe estar adaptada a la lógica interna de las matemáticas; propiciando en el estudiante la capacidad de formular conjeturas, invención y resolución de problemas, desarrollando así capacidad heurística, dejando a un lado el método algorítmico del pensamiento, es decir, descartar el énfasis de la búsqueda mecánica de respuestas, como se ha venido realizando en la actualidad.

Por otro lado, se deben introducir los conceptos y procesos matemáticos respetando las etapas de desarrollo que se dan en los sistemas de representación cognitiva, evitando precipitar el aprendizaje del nuevo objeto, así como también la innecesaria complejidad de los signos matemáticos, tomando en consideración las individualidades que tienen que ver con los ritmos de trabajo individual o colectivo en la clase.
Ahora bien, se considera además lo planteado por Brun (1996a, citado por D'Amore, 2000, p. 2) donde señala que "La Didáctica, en tanto ciencia de la producción, organización y gestión de los bienes del sistema de enseñanza – aprendizaje, tiene relación con la cuestión epistemológica relativa a la transformación del conocimiento". En pocas palabras, hace referencia a lo propuesto por Gascón (2002) en relación a la enseñanza de las matemáticas en lo referente a Programa Epistemológico en donde el problema de la Educación Matemática puede ser abordado a partir del análisis de las prácticas que se llevan a cabo en las diferentes instituciones, siendo generadoras de conocimientos a partir de la elaboración por parte de la didáctica de determinados modelos epistemológico – didáctico.

Hecha la observación precedente, hay que mencionar además lo que Schubauer – Leoni (1996, citado por D'Amore, 2000) expresa:

> El individuo, sujeto de la psicología cognitiva o socio-cognitiva, es por tanto estudiado en cuanto alumno que se enfrenta a una situación didáctica y, de esta forma, con un saber específico. Asistimos entonces a un desplazamiento de la función cognitiva en los estudios de didáctica respecto a aquellos de la psicología. De hecho, en el caso de la didáctica, los procesos cognitivos, los "gestos mentales" de los sujetos, el surgimiento de concepciones nuevas, son analizados no solo en cuanto productos de los controles internos que los sujetos ejercen sobre el problema, sino también en función de los controles externos provenientes de la situación. Por lo tanto, se trata de avanzar en la comprensión de las condiciones que hacen posible el encuentro del alumno con el problema y la relativa aceptación de su parte. (p.3)

Una vez expuesto esto, para el presente estudio hay que tomar en cuenta una sustentación teórica sólida que permita abordar, comprender y explicar los procesos de enseñanza y aprendizaje de objetos matemáticos, en este caso la noción de *Infinito*, teniendo en cuenta la didactificación conjunta entre lo pedagógico y lo matemático de conceptos matemáticos cuyas conceptualizaciones se sirven de los modelos intuitivos que poseen los estudiantes sobre la noción de infinito, así como también la psicología cognitiva y los procesos de enseñanza y aprendizaje. Entre estas teorías, para el estudio se utilizarán las siguientes:

a. La Teoría del Pensamiento Matemático Avanzado (PMA).

Para abordar la problemática propuesta en la investigación se hace necesario recurrir, para el estudio de los esquemas conceptuales, a la "teoría cognitiva originada por Tall (1991, 1992, 1995, 2001, 2004, 2005) y Dreyfus (1990, 1991)" Valdivé y Garbin (2008, p.416), es decir, el modelo teórico del Pensamiento Matemático Avanzado (PMA), el cual fue elaborado a partir de las observaciones y los hallazgos encontrados por Tall en conjunción con Dreyfus, y en "donde los objetos matemáticos básicos no son nuevos para el estudiante pero que no se pueden considerar estabilizados en su mente (…) y que es el Análisis quien va a jugar un papel esencial en su maduración y conceptualización" (Valdivé, 2008, p.534).

De esta manera, la escolaridad y el proceso de enseñanza y aprendizaje en el sujeto se desarrollan a lo largo de etapas definidas por edades y contenidos, que inician desde su inserción en el sistema educativo y culminan con los estudios universitarios o de postgrados. Entre estas etapas cognitivas, se encuentran el Pensamiento Matemático Elemental (PME) y el Pensamiento Matemático Avanzado (PMA), donde por PME se entiende por aquella etapa cognitiva que tiene lugar hasta la secundaria, mientras que el PMA, es la etapa relacionada con la enseñanza de la matemática en ámbitos universitarios. Una vez dicho esto, es importante señalar las características del PMA, según Garbin (2005b) en esta etapa cognitiva se precisa lo siguiente:

> a) Se enseñan una mayor cantidad de conceptos en menor tiempo.
> b) Se enseña con mayor frecuencia los contenidos del currículo de manera formal antes de que el estudiante se haya familiarizado con ellos de manera informal.
> c) Se enseñan conceptos que históricamente evolucionan muy lentamente y, al mismo tiempo, se exige aprendizaje de demostraciones estándar y la realización de construcciones mentales abstractas.
> d) Se enseña una mayor cantidad de conocimientos matemáticos y se exige comunicación de los mismos y el aumento de estrategias de trabajo; se espera, además, que los estudiantes adquieran la habilidad de distinguir entre pensamiento matemático y metamatemático.
> e) La dificultad de evaluar a los estudiantes en tiempos cortos y la de reducir las actividades a tareas elementales; de esta manera se dificulta una evaluación que tome en cuenta la comprensión, el análisis y la síntesis, y no sólo la reproducción de conocimientos por parte del estudiante. (p.172)

Por otro lado, en lo que respecta a esta teoría, Valdivé (2008) elucida lo siguiente:

> En la teoría psicológica del aprendizaje de la matemática (PMA), específicamente de la matemática avanzada o en el Análisis, han de hacerse algunas consideraciones. Por un lado, acerca de los procesos de pensamiento que usa un estudiante cuando está realizando tareas cognitivas que involucran los infinitesimales y, por el otro, acerca de la enseñanza que promueva los procesos cognitivos de síntesis y análisis en los alumnos. (p.534)

Indicando así dos vertientes, una relacionada a las tareas cognitivas realizadas por el estudiante y otra a actividades de enseñanza. La primera, referida a la actividad realizada por el estudiante en su proceso cognitivo al resolver problemas o situaciones donde reajusta y reorganiza sus conocimientos previos, en la medida que la nueva información se vaya afrontando, construyendo un modelo mental o esquema conceptual de lo que está aprendiendo. Mientras que la segunda, está orientada al cómo promover actividades en la cual la capacidad de razonamiento lógico y reflexivo en los estudiantes se vea aumentada, para así desarrollar un aprendizaje significativo en estos en relación a constructos y conceptos avanzados de pensamiento.

Además, se debe tener presente la transición que ocurre de un Pensamiento Matemático Elemental (PME) al Pensamiento Matemático Avanzado (PMA), para así comprender cómo ocurre el proceso de reformulación y adaptación de los conocimientos previos establecidos internamente por el estudiante en su estructura cognitiva, y de esta forma incorporar nuevos conocimientos de una manera más adecuada propiciando el desarrollo de actividades y tareas que promuevan la comprensión, el análisis y la síntesis, dejando a un lado la reproducción algorítmica del estudiante en cuanto al conocimiento. En concordancia con lo mencionado, Garbin y Azcárate (2001) alegan:

Tall (1995) afirma que el paso del PME al PMA implica una transición significativa que requiere una reconstrucción cognitiva. Esta reconstrucción implica, por un lado, el paso de «describir» a «definir», y por otro, el paso de «convencer» a «demostrar». Se podría decir que los alumnos que se encuentran en la franja de edad de 16-20 años, aproximadamente, son los que están en esta época de transición; se trata de alumnos de Bachillerato y primeros cursos de Universidad. (p. 54)

En relación con lo anterior, cabe mencionar lo planteado por Tall (1994, 2001; Ob. Cit., p. 534) en el cual manifiesta que “los estudiantes no tienen bien desarrolladas las estructuras cognitivas, por lo que son engañados por las falsas imágenes. Los estudiantes tienen sus propios esquemas conceptuales asociados a los conceptos, esquemas desarrollados a través de sus propias experiencias previas”. Lo cual significa que los estudiantes crean sus propios esquemas conceptuales con los cuales representa el mundo en que viven y que estos son adquiridos de forma empírica, y es por ello que el acto de comprender se puede definir de acuerdo con Dreyfus (1991, citado por Azcárate, C. y Camacho, 2003, p. 136), como “un proceso que tiene lugar en la mente del estudiante y es el resultado de una larga secuencia de actividades de aprendizaje durante las cuales ocurren e interactúan una gran cantidad de procesos mentales”.

No obstante, cuando describen los procesos cognitivos involucrados en el pensamiento matemático avanzado (PMA), no se puede dejar a un lado el proceso de abstracción, el cual es uno de los procesos matemáticos que consiste en la substitución de fenómenos concretos por conceptos confinados en la mente (Azcárate y Camacho, 2003). Por tal motivo, se puede considerar a la abstracción como una de las características de la matemática avanzada, aunque esta no sea exclusiva para este tipo de pensamiento, la abstracción juega un papel fundamental en estudios superiores; con relación a esto Azcárate y Camacho, (2003) consideran que “la progresiva matematización implica la necesidad de abstraer, definir, demostrar y formalizar. Por otro lado, entre los procesos cognitivos de componente más psicológica, además de abstraer, podemos citar los de representar, conceptualizar, inducir y visualizar” (p.136).

Ahora, otro factor a considerar, por parte del docente de matemáticas, es que la naturaleza de los entes matemáticos es muy distinta a la naturaleza de los objetos observables, ya que en los entes matemáticos influye el proceso de abstracción y percepción donde se usan símbolos manipulables mentalmente por el sujeto asociados a procesos y relaciones. Esto es manifestado por Garbin y Azcárate (2001) las cuales expresan:

(…) dada la naturaleza de los objetos matemáticos también es importante distinguir los objetos mentales y los objetos físicos. Los objetos matemáticos tienen un significado más abstracto y son de naturaleza distinta a los objetos visuales como percepciones de los objetos físicos del mundo exterior. Un ejemplo típico es el de los objetos matemáticos como punto y línea. En el mundo real, un punto es una marca de un lápiz no prolongada y con medida finita; sin embargo, en matemática, tal concepto es abstracto, tiene posición pero sin medida. Cuando nos referimos a la estructura cognitiva, decimos que el esquema conceptual usa el símbolo para conectar convenientemente procesos y relaciones; de esta manera, en la mente se tienen símbolos que se pueden manipular como objetos mentales, sin ser necesariamente objetos físicos. (p. 54)

Por su parte, Tall y Vinner (1981) y Vinner (1983) explican lo referente a los conceptos de *Imagen conceptual* y *definición conceptual*, los cuales hay que tener en consideración para luego poder introducir y describir la acepción cognitiva y epistemológica del esquema conceptual, por ende explican lo siguiente:

Las definiciones de estos términos mejoran su precisión entre un trabajo y otro, por lo tanto detallaremos las que describe Vinner (1983). Vinner (1983) define en primer lugar la noción de cuadro o dibujo mental de un concepto (mental picture) como el conjunto de todas las representaciones visuales mentales del concepto, ya sean pictóricas, simbólicas o gráficas. Llama imagen conceptual (conceptual image) al conjunto de todos los dibujos mentales asociados al concepto y de las propiedades que asigne el sujeto mentalmente a cada dibujo mental. Por otro lado la definición conceptual (conceptual definition) es cualquier explicación verbal precisa del concepto, no circular. (p.11)

Una vez dilucidado lo expuesto en los párrafos anteriores, se tiene que una concepción se asemeja mucho a lo que se conoce como esquema conceptual, ya que una concepción se puede entender de dos maneras una desde el punto de vista cognitivo y otra desde la perspectiva epistemológica; donde la primera está relacionada “con los conocimientos y competencias del sujeto con relación a un objeto matemático” (Valdivé y Garbin, 2008, p.418), mientras que el segundo, “se identifica al estudiar tanto la génesis histórica como la evolución de un concepto” (Valdivé y Garbin, Ob. Cit., p.418).

Teniendo en cuenta esto, Ruiz (1998, Ob. Cit., p.418) menciona que “para un mismo concepto matemático se han ido sucediendo una diversidad de puntos de vista sobre el mismo que, en su momento, fueron considerados como correctos y posteriormente han sido rechazados o revisados”. Ahora, Artigue (1989, Ob. Cit., p.419) afirma que “la noción de concept image está muy próxima a la concepción del sujeto en su sentido más global”, por lo que se asume que aun cuando los términos poseen definiciones diferentes debido a los distintos contextos teóricos en los cuales son enmarcados, estos comparten los mismos significados.

Por lo que, se puede distinguir entre el enfoque cognitivo y epistemológico del término esquema conceptual, según Valdivé y Garbin (2008, p. 419) “por acepción cognitiva del esquema conceptual del sujeto, entendemos a los conocimientos que este evoca sobre un concepto específico y que son accesibles a la investigación didáctica para representar y describir cada concepto que la persona conoce”. Mientras, que el carácter epistemológico alude a “la evolución histórica de los conceptos matemáticos o a los tipos de conocimientos asociados a la noción matemática, así como también a las representaciones, los procedimientos y métodos que los matemáticos usaron para resolver una situación en un contexto específico (Ob. Cit., 419).

En este mismo sentido, con respecto al ¿cómo? se originan las concepciones Tall (1995, citado por Azcárate y Camacho 2003) expresa que existen dos secuencias de desarrollo las cuales son diferentes, pero a la vez simultaneas, donde, primero, se comienza por la percepción de objetos y, segundo, con la acción que recae en ellos. Plantea, además, que la mayor parte de la actividad matemática inicia por la percepción de objetos de manera visuo-espacial, para luego describirlo verbalmente, clasificarlo y dar el inicio a deducciones verbales basadas en la información obtenida.

En concordancia con lo expuesto y a manera de complemento, cabe mencionar algunas consideraciones teóricas, desde el punto de vista de este enfoque, que impulsaron el aprendizaje avanzado, tal como lo mencionan Harel, Selden y Selden (2006; citado por Arrieta, 2010), los cuales se pueden describir de la manera siguiente:

1. *La distinción entre imagen del concepto y definición del concepto*: que permite diferenciar entre la definición formal de un concepto y la correspondiente estructura mental individual consistente en ejemplos asociados, contraejemplos, hechos y relaciones.

2. *Progreso en las imágenes conceptuales para darle sentido a la definición formal del concepto*: la tendencia de muchos estudiantes a evocar la imagen de un concepto en lugar de la definición de tal concepto, cuando se enfrentan a una variedad de tareas matemáticas, no es necesariamente malo.

3. *Definición como organización*: además de la construcción del concepto, la construcción de la definición es importante junto con otros procesos matemáticos avanzados, tales como la visualización, generalización, abstracción, síntesis, pensamiento algorítmico, axiomático y prueba.

4. *Adquisición del concepto*: además de la comprensión de las definiciones matemáticas formales, existen otras formas de llegar a comprender un concepto, a saber, a través de la comparación de sus definiciones equivalentes, a través de sus múltiples representaciones y haciendo conexiones con otros conceptos. (p.35)

Ahora, al analizar la acción que repercute sobre los objetos matemáticos Tall (1995, citado por Azcárate y Camacho 2003) considera un tipo de desarrollo cognitivo diferente, que tiene su origen en el problema de la dualidad proceso – objeto, es decir, caso en el que un proceso y su producto se representan a través de un mismo símbolo, por lo que llega a la definición de un término denominado *procepto*. Este es definido por Tall (1995, Ob. Cit., p.139) como "un objeto mental combinado que consiste en un proceso, un concepto producido por dicho proceso, y un símbolo que se puede usar para significar cualquiera de los dos o los dos". Con respecto a la definición dada Ob. Cit, (2003) dan los siguientes ejemplos:

> La expresión $f(x) = x^2 - 9$ representa simultáneamente el proceso de cómo calcular el valor de la función $f(x)$ para un valor particular de x y el objeto, es decir el concepto de función para un valor general de x. Se habla de un procepto "molde".
>
> En cuanto a las expresiones:
>
> $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-9}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen x}{x}$; $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$ representan el proceso de tender a un límite y el objeto valor del límite, pero sin incluir el procedimiento de cálculo específico para obtener ese valor. En este caso se trata de un procepto "estructural". (p. 140)

Asimismo, cabe agregar algunas de las características cognitivas particulares de los conceptos de límite y continuidad descritas por Fernández (2011) en la que menciona:

> Tall (1980) pone de manifiesto la riqueza de tipos de los procesos infinitos (limiting processes). Procesos infinitos continuos, tales como el límite de una función en un punto y la propia noción de continuidad, pues se basan en la idea de continuo frente a discreto, y procesos infinitos discretos, como los límites de secuencias y series, las expansiones decimales, o aproximación de áreas de formas geométricas. Cuando a los estudiantes se les transmite una noción informal de límite y posteriormente la definición formal, la imagen conceptual se "contamina" con ciertas propiedades que no forman parte de la definición conceptual dada. Los estudiantes conciben en su mayoría el límite como un proceso dinámico en vez de una cantidad numérica (Tall, 1980b, citado por Tall, 1980).
>
> Cornu (1981, 1983) citado por Gray y Tall (1994) muestra que dado que el proceso de cálculo de límite no es explícito, esto rompe en cierta manera con las intuiciones de los estudiantes pues su experiencia previa con los algoritmos aritméticos y algebraicos son explícitos. (p. 13)

Lo planteado se evidencia en el ejemplo dado por Tall (1986), en donde si un estudiante trabaja en un contexto reducido en el que todos los ejemplos considerados tienen una cierta propiedad y característica, entonces, sino existe contraejemplos, la mente tiende a asumir las propiedades conocidas como implícitas en otros contextos.

Esto es, si al estudiante se le presentan la mayoría de las sucesiones convergentes como 1/n, que tiende a un límite, cero, pero cuyos términos nunca igualan al límite. Al no existir contraejemplos de los mismos, el estudiante comienza a creer que esto cierto. Por lo que, experiencia propia del estudiante y sus esquemas así formados tiende a afirmar con frases como "se acerca cada vez más a" o "tiende a", lo que sugiere de manera implícita que los términos de una sucesión nunca pueden coincidir con el límite, es decir, que una sucesión de términos convergente a un límite está cada vez más próximo a él, pero que nunca llega a alcanzarlo.

Por otro lado, se debe tener en cuenta lo que se entiende como noción de representación, el cual "es un concepto clave en la filosofía del conocimiento, que se ha manejado y sometido a crítica de manera sistemática. Las disciplinas cuyo objeto de estudio es el conocimiento humano manejan las nociones de representación y comprensión" (Rico, 2000, citado por Fernández, 2011, p. 9). De esta forma, se enfatizará dos de las definiciones existentes en cuanto a esta noción, la primera debida a Kaput (1987, citado por Fernández, 2011) la cual considera:

> (…) una dualidad entre el objeto representante y el objeto representado, que funcionan como entidades funcionalmente separadas pero íntimamente relacionadas y postula que cualquier especificación particular de la noción de representación debería describir las siguientes entidades: el mundo representado, el mundo representante, qué aspectos del mundo representado están siendo representados, qué aspectos del mundo representante realizan la representación y la correspondencia entre los dos mundos, aclarando que en los casos interesantes uno o los dos mundos pueden ser entidades hipotéticas o incluso abstracciones. (p. 10)

Mientras la segunda definición es abordada desde la perspectiva de Castro y Castro (1997, citado por Fernández, 2011) los cuales consideran las representaciones como "notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como sus características y propiedades más relevantes" (p. 10).Por lo que "el conjunto de símbolos, gráficos y reglas que permiten representar una estructura matemática tienen carácter sistémico, se habla de sistemas de representación" (Fernández, 2011, p. 10).

En este orden de ideas, Duval (1996, 1999; citado por Garbin y Azcárate, 2001) considera que en la actividad matemática hay que enseñar a saber diferenciar entre la representación del objeto con el objeto matemático mismo, por lo que, "Duval, al interrogarse sobre si los medios estructuralmente requeridos para que una persona pueda acceder a los objetos del conocimiento matemático, son diferentes o no, a los medios requeridos para acceder a los otros objetos de conocimiento" (p. 54), asevera lo siguiente:

> - La no accesibilidad de los objetos matemáticos fuera de un sistema semiótico aunque sea rudimentario. Los objetos matemáticos, no son objetos reales, como pueden ser los propios de las disciplinas como la biología o la física que pueden ser manipulables. «De aquí la necesidad de describir y aprender cómo funcionan ciertos sistemas de representación: representaciones de escritura decimal de los números, representaciones gráficas de formas (funciones o no), representaciones de la escritura literal y algebraica, representaciones que son las figuras en geometría…».
> - La necesidad de no confundir nunca un objeto con su representación semiótica (un número y su escritura, un objeto geométrico y la figura que lo representa…). (p. 55)

En relación a esto, es notorio señalar, lo que respecta a la paradoja cognitiva mencionada por D'Amore (2000), en la cual se basa en lo manifestado por Duval (1993), explicando que el aprendizaje de los objetos matemáticos no puede ser de otra manera sino por medio de un aprendizaje conceptual, pero que es únicamente a través de las representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos, estableciendo así la dificultad para los estudiantes de diferenciar el objeto matemático con su representación semiótica, o sea, con la estructuración de sus esquemas conceptuales relacionados con el objeto a través de un sistema de signos juntamente con todas la propiedades que lo caracterizan, esta dificultad surge debido a que los objetos matemáticos no poseen una realidad objetiva palpable a los sentidos.

Por otro lado, también se debe a los diferentes factores que intervienen entre la aprensión de los conceptos matemáticos definidos formalmente y los procesos cognitivos que sirven para concebirlos, entendiendo una definición de un concepto matemático la establecida por Tall (2001), distinguiéndose así entre definiciones formales y las definiciones personales manejadas por los individuos, en estas "participarían tanto la parte institucional (el Saber) como la parte personal (de quienquiera que haya abordado dicho saber, no solo el experto)" (D'Amore, 2000, p. 9). Ahora bien, la definición de un concepto posee un papel fundamental en la formación de las representaciones cognitivas del sujeto que posee de un concepto en específico, puesto que el *Infinito* como ya se ha mencionado no se ha definido totalmente, por lo que se maneja a modo de una noción, ya sea de manera *actual* o *potencial*, esto acarrea dificultades en la enseñanza de tópicos ligados al *Infinito*, tal como lo es la enseñanza de la idea de Límite.

En este orden de ideas, se entiende como definición, según Cecilia Calvo (2001, citada por Azcárate, 2003), el siguiente:

> La definición de un concepto matemático es un enunciado verbal que predetermina el concepto de una manera no circular (sus elementos deben ser nociones primitivas de la teoría o nociones definidas previa e independientemente) y consistente (no puede involucrar contradicciones lógicas que derivarían en que ningún objeto verifique sus condiciones). En este marco, dos definiciones se consideran equivalentes cuando determinan el mismo conjunto de ejemplos. (p. 160)

Por lo que se tiene que la dualidad que presenta la noción de *Infinito* matemático, *actual* o *potencial*, constituye un serio problema en el momento de la formación de los esquemas conceptuales propios de los estudiantes, debido a las contradicciones que conllevan estas dos nociones opuestas entre sí, con relación a lo que respecta a los conceptos matemáticos, Azcárate y Camacho (2003), establecen que:

> Con el propósito de clarificar las ideas y el lenguaje, resulta relevante la distinción que establecen Tall y Vinner (1981) "entre los conceptos matemáticos definidos formalmente y los procesos cognitivos que sirven para concebirlos", es decir entre los diferentes resultados del proceso de adquisición y representación de un concepto matemático en la mente de cada individuo y la definición formal del mismo (p. 137).

Por lo tanto, se considera, la definición de un concepto matemático como una serie de palabras o una definición verbal del concepto, el cual debe satisfacer dos condiciones, que sea un enunciado no circular y consistente, producto de su evolución histórica, entre las cuales, se podrá distinguir dos acepciones, primero, *definiciones formales* (definiciones acordadas y admitidas por la comunidad científica de los matemáticos en un periodo dado de la historia) y, segundo, las *definiciones personales* utilizadas por los individuos (ya sean estudiantes, profesores, matemáticos, entre otros) como interpretación, construcción o reconstrucción de una definición formal previamente enseñada.

Ahora, es importante señalar lo explicado por Azcaráte y Camacho (2003), con respecto a las teorías de Sfard (1991), las cuales expresan lo siguiente:

> Sfard (1991) habla de dos tipos de concepciones de un mismo concepto matemático: las concepciones que llama operacionales cuando se tratan las nociones matemáticas como procesos dinámicos, algoritmos y acciones, y las concepciones estructurales cuando se consideran los conceptos matemáticos como objetos abstractos estáticos. Si bien afirma que los dos tipos de concepciones son complementarias ("la habilidad para ver una función o un número, a la vez como un proceso y como un objeto es indispensable para una comprensión profunda de las matemáticas, cualquiera que sea la definición de comprender"), ella considera que las concepciones operacionales preceden a las estructurales (p. 138).

Por tal motivo, se debe tomar en cuenta todos estos señalamientos a la hora de estudiar el origen y la formación de una noción de un objeto matemático, así como también los conceptos y representaciones propias del sujeto, para evitar así los conflictos cognitivos que se presentan en la enseñanza de la matemática. Entendiendo además, que "el pensamiento matemático avanzado ocurre en un campo conceptual matemático donde son apropiadas las estructuras matemáticas abstractas disponibles para fortalecer una red de relaciones deductivas" (Gómez, 2009; p.3). Por tal motivo, "hay actividades preliminares (…) que introducen conceptos no inmediatamente abstraídos de la realidad, tal como la noción matemática de un proceso infinito, la noción de un límite, [la noción de un espacio topológico] o el cardinal del infinito" (Tall, 1988; Ob. Cit., p.3).

El aprendizaje de la noción de *Infinito* conlleva la activación de muchos procesos cognitivos complejos en el estudiante, tales como el proceso de abstracción, conceptualización, definición y la operacionalización del mismo, unido además, a la dificultad de diferenciar dicho objeto matemático con su representación semiótica y más si se halla inmerso en problemas donde se utilicen otros conceptos o donde este opere para la resolución de cierto tipo de problemas o en la adquisición de nuevos conocimientos. La noción de *Infinito*, así planteada, psicológicamente es un objeto complejo y contradictorio, este se encuentra ligado entre otras cosas a una noción basada en la Teoría de Conjuntos y a la noción de número, así como también al acto de contar y a la noción de clase. De allí, que la investigación presente busque conocer sobre los procesos cognitivos que se dan a lugar en el sujeto cuando opera con situaciones que involucren al *Infinito* y la generación de los esquemas conceptuales a partir de estos.

Por otro lado, la noción de *Infinito*, al ser un objeto matemático, este no puede ser manipulado directamente como los objetos físicos, por lo que se hace ineludible un sistema semiótico para acceder a él, de aquí la necesidad de describir y aprender el funcionamiento de ciertos sistemas de representación, pero sin caer en el equívoco de confundir la representación semiótica con el objeto de estudio, pues la representaciones semióticas son sólo representaciones mentales para fines comunicativos, no obstantes son fundamentales para la actividad cognitiva del pensamiento del sujeto que la concibe, de allí la importancia del estudio del PMA.

b. La Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD).

Antes de comenzar a desarrollar una idea y una descripción de esta teoría, es importante recordar que la respuesta pedagógica en sí misma no responde satisfactoriamente al problema de la educación, por lo tanto, surge otro marco a considerar, y este es, la Didáctica de las Matemáticas, el cual partiendo de la necesidad de hacerse cargo de lo pedagógico y lo matemático, de forma integral y no disociada, produce lo que se conoce como didactificación conjunta de lo pedagógico y lo matemático (Gascón, 2002). Es por ello, que se tomará a consideración algunas de las teorías desarrolladas en esta disciplina, para crear un puente entre la pedagogía y la matemática que permita la enseñanza de la actividad matemática.

Asimismo, una de las teorías en didáctica escogida para desarrollar esta investigación, fue una teoría procedente de la escuela francesa de la didáctica de la matemática, la cual tiene una influencia piagetiana y es una teoría de corte constructivista, que además, representa un "intento de crear modelos en los que el conocimiento se construye por adaptación del individuo a las situaciones problemáticas propuestas. El alumno aprende por adaptación a las distintas situaciones que el profesor le plantea en un contexto escolar" (Gómez, 2002, p. 38). Esta plantea reflexiones que deben ser consideradas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de tópicos matemáticos, la teoría referente es la "Teoría de las situaciones didácticas" desarrollada por Guy Brousseau (1986; en Gómez, 2002).

En relación a lo anterior, en un primer momento, en su conocida obra *"Iniciación al estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas"*, se describen las situaciones en las que los jóvenes construyen su propios conocimientos a través de contextos, introducidas por el docente, en las que se le planteen problemas para que así estos formulen métodos para su resolución, así como también enunciados o reglas generales producto de la experiencia que van adquiriendo mediante su resolución. Es decir, una situación didáctica, según Brousseau (1986; citado por Vargas, 2000) es:

> Conjunto de relaciones establecidas explícitamente y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, en un cierto medio, comprendiendo, eventualmente, instrumentos y objetos y, un sistema educativo (el profesor) con la finalidad de posibilitar a estos alumnos un saber constituido o en vías de constitución... el trabajo del alumno debería, al menos en parte, reproducir las características del trabajo científico propiamente dicho, como garantía de una construcción efectiva de conocimientos pertinentes (p.9)

La teoría, ya mencionada, fue concebida basándose en una hipótesis acerca de la construcción del significado de una noción (Camacho y Aguirre, 2001) la cual expresa que:

> Una noción aprendida no es utilizable sino en la medida en la que ella es relacionada con otras, esas relaciones constituyen su significación, su etiqueta, su método de activación. Empero, no es aprendida si no es utilizable y utilizada efectivamente, es decir, solo si es la solución de un problema. (p. 238)

Teniendo en cuenta esto, se deduce que el medio es fundamental, puesto que representa el ambiente dentro del cual el estudiante puede actuar de manera autónoma haciendo uso de su racionalidad, de tal manera que, el principio metodológico rector de la TSD, siguiendo a Brousseau (1994; citado por Gascón, 1998), es "definir un *'conocimiento matemático'* mediante una *'situación'*, esto es, por un autómata que modeliza los problemas que únicamente este conocimiento permite resolver de forma óptima" (p.9). Con respecto a esto Chamorro (1999; citado por Gómez, 2002) explica:

> En este modelo de aprendizaje por adaptación, las variaciones en las condiciones del medio, las acciones y las retro-acciones, producen como respuesta comportamientos de los alumnos tendentes a modificarlo, de manera que tras una situación en desequilibrio se pueda alcanzar un equilibrio interno. (p. 38)

Ahora bien, Brousseau (1986; citado por Chavarría, 2006), desarrolla una serie de conceptos esenciales como lo son el Contrato Didáctico y la Situación A – Didáctica, las cuales le permiten ir entramando una teoría sólida y bien articulada. Cabe mencionar, que se entiende por *Contrato Didáctico* a: "la consigna establecida entre el profesor y el alumno, de esta forma, comprende el conjunto de comportamientos que el profesor espera del alumno y el conjunto de comportamientos que el alumno espera del docente." (Chavarría, 2006, p.3). De la misma manera se entiende por *Situación A – Didáctica*, según lo descrito por Chavarría (2006):

> El proceso en el que el docente le plantea al estudiante un problema que asemeje situaciones de la vida real que podrá abordar a través de sus conocimientos previos, y le permitirán generar además, hipótesis y conjeturas que asemejen el trabajo que se realiza en una comunidad científica. En otras palabras, el estudiante se verá en una micro–comunidad científica resolviendo situaciones sin la intervención directa del docente, con el propósito posteriormente de institucionalizar el saber adquirido (p.2).

En efecto, se debe construir un medio que permita inducir y construir en el sujeto conocimientos socialmente adquiribles y que para ello el profesor debe provocar adaptaciones mediante la elección de situaciones propuestas al estudiante con la finalidad de construir la relación de su contexto con el conocimiento, o bien modificarlo como una respuesta adaptativa al medio.“Las situaciones de este tipo,…, el alumno tiene conciencia de implicarse, no por razones ligadas al contrato didáctico, sino al razonamiento matemático. Dicho de otro modo, las intenciones didácticas no se revelan al alumno” (Gómez, 2002, p. 39).

Con respecto a lo anterior, para que una situación sea *A – Didáctica* es necesario que se satisfagan una serie de requerimientos, los cuales son planteados por Gómez (2002) de esta forma:

- Que exista un procedimiento de base insuficiente.
- Que el medio permita retroacciones y que el juego sea repetible
- Que se requiera, de forma lógica, el conocimiento buscado para pasar de la estrategia de base a la estrategia óptima. (p. 39)

Otro aspecto que se debe tener en consideración es el relacionado a la noción de *Situación Fundamental*, esta es definida por Gómez (2002) como:

> Un grupo restringido de situaciones en las que la noción de enseñar juega para el alumno el papel de respuesta de adaptación óptima. Una situación fundamental debe permitir una creación efectiva del saber, de manera que el alumno fabrique una concepción correcta del conocimiento. Encontrar situaciones fundamentales es un importante objetivo a conseguir para todas las situaciones de enseñanza, aunque a veces resulte utópico dada la gran dificultad que hay para hallarlas. (p. 42)

O dicho de otro modo, se entiende por *Situación Fundamental*, en función de un determinado conocimiento matemático C, en palabras de Gascón (1998) a:

> (…) un conjunto minimal de *situaciones adidácticas* (específicas de C), que permiten engendrar, por manipulación de los valores que toma sus *variables didácticas*, un campo de problemas suficientemente extenso como para proporcionar una buena representación de C en relación a cómo ha sido reconstruido C en la institución didáctica en cuestión. (p.11)

Ahora, dentro de esta teoría se establece o se distingue una tipología de situaciones, que se presentan en el proceso de enseñanza y aprendizaje en conjunción al proceso didáctico, estableciendo así cuatro tipos de situaciones que se presentan en una situación didáctica que son: las situaciones de acción, de formulación y de validación. Describiéndolas se tienen:

- ***Situaciones de acción***: situaciones en las que el alumno debe actuar sobre un medio (material, o simbólico); la situación requiere únicamente aplicación de conocimientos implícitos. (Panizza, 2003.)
- ***Situaciones de formulación***: son situaciones en la que el alumno o grupo expone un mensaje dirigido a otro alumno o grupo el cual debe comprender dicho mensaje y actuar (sobre un medio, material o simbólico) en base al conocimiento contenido en el mensaje (Panizza, 2003.). Es decir, son aquellas situaciones en el cual se formulan enunciados y se realizan pruebas de proposiciones, elaborando modelos, lenguajes, conceptos y teorías para ser puestas a prueba.
- ***Situaciones de validación***: hace alusión a las situaciones en la que dos alumnos o grupo deben enunciar afirmaciones y lograr ponerse de acuerdo sobre la verdad o falsedad de las mismas. Estas serán evaluadas por otro grupo, los cuales juzgarán para aceptarlas o no oponiendo otras maneras de resolución. (Panizza, 2003.)
- ***Situación de institucionalización***, definido así por Brousseau (1994, citado por Panizza, 2003.):

> La consideración “oficial” del objeto de enseñanza por parte del alumno, y del aprendizaje del alumno por parte del maestro, es un fenómeno social muy importante y una fase esencial del proceso didáctico: este doble reconocimiento constituye el objeto de la institucionalización. (p.14)

En este mismo sentido, resulta oportuno mencionar una serie de efectos que pueden interrumpir el proceso de generación y construcción de conocimiento en el estudiante durante una *Situación Didáctica*, de acuerdo a Chavarría (2006), Brousseau identifica los siguientes:

- ***Efecto Topaze***: Está relacionada a “aquella circunstancia en donde el estudiante llega a la solución de un problema, pero no ha sido por sus propios medios, sino porque el profesor asume la resolución del problema” (p.3). debido a que este, ante “las dificultades que tiene un grupo para llegar a la resolución de un problema, por lo cual se ve en la necesidad de indicar cuál es el procedimiento que deben seguir” (p.3).
- ***Efecto Jourdain***: Es la que se origina por la actitud que asume el docente “cuando un estudiante da una respuesta que es incorrecta, no obstante, para no desilusionarlo le dice que “está bien”, que es la respuesta correcta. Entonces, un comportamiento banal del alumno es asumido como un conocimiento válido” (p.4).
- ***Deslizamiento Meta – Cognitivo***: “Consiste en la actitud de tomar una heurística en la resolución de un problema y asumirla como el objeto de estudio” (p.4). Ejemplo de ello, la utilización de los Diagramas de Venn en la Teoría de Conjuntos, en esta: “Cuando se comenzaron a analizar los diagramas de Venn dejamos de lado lo que es la teoría de conjuntos, pues se tomaron los primeros como la teoría en sí misma. Ese es un deslizamiento meta cognitivo” (p.4).
- ***Uso Abusivo de la Analogía:*** este efecto hace alusión a la situación en la cual durante la resolución de un problema se emplea de manera constante el uso de la analogía, a tal punto que se suplanta el estudio de una noción compleja por un caso análogo o similar (Chavarría, 2006). Por lo que, “no nos podemos quedar con los problemas análogos, sino que debemos devolvernos al problema original. De lo contrario, incurrimos en el uso abusivo de la analogía” (p.4).
- ***La inadaptación a la exactitud***: consiste en banalizar los conocimientos matemáticos por parte del profesor o transmitirlos tal y como es concebido por el saber sabio, es decir, es un problema de transposición que se manifiesta cuando el “docente decide perder rigor a cambio de que los estudiantes entiendan, o bien, prefiere rigurosidad con la consecuencia inmediata de la incomprensión por parte de algunos de sus estudiantes” (p.4)

Por otro lado, la teoría de Brousseau provee una información valiosa en cuanto a una teoría de los obstáculos presentes en la enseñanza y en la didáctica de la matemática como disciplina científica, por lo que resulta oportuno aclarar lo que se entiende por obstáculo, esta noción es introducida en primera instancia por Gaston Bachelarden su libro publicado en 1938 y titulado: “La formación del espíritu científico”, en el que explica:

> Cuando buscamos las condiciones psicológicas de los progresos científicos, llegamos pronto a la convicción que estos están en términos de los obstáculos que debe plantear el problema del conocimiento científico. Y no se preocupa por considerar los obstáculos externos como la complejidad y la fugacidad de los fenómenos, ni de incriminar la debilidad del sentido y del espíritu humano: es dentro del acto mismo del conocimiento, íntimamente, que aparecen, por una clase de necesidad funcional, las lentitudes y los problemas. Aquí mostraremos las causas de estancamiento e incluso de regresión, descubriremos las causas de la inercia que llamaremos los obstáculos epistemológicos. El conocimiento de lo real es una luz que proyecta siempre algunas sombras. Ella no es inmediata y plena nunca. Las revelaciones de lo real son siempre recurrentes. Lo real no será jamás “aquello que podamos creer” pero esto es aquello que siempre debemos pensar. El pensamiento empírico es claro, sobre todo, cuando el aparato de razones ha estado puesto a punto. En correspondencia con un pasado de errores, encontramos la verdad en un verdadero arrepentimiento intelectual. De hecho, conocemos; en contra de un conocimiento anterior, en destrucción de conocimientos mal hechos, en dominación dentro del espíritu mismo, que obstaculiza la espiritualización (Bachelard, 1983, citado por Artigue, 1990, p.6)

Posteriormente, Brousseau, partiendo de los estudios de Bachelard conceptualiza la noción de obstáculo y la define del siguiente modo:

> Un obstáculo es una concepción que ha sido en principio eficiente para resolver algún tipo de problemas pero que falla cuando se aplica a otro. Debido a su éxito previo se resiste a ser modificado o a ser rechazado: viene a ser una barrera para un aprendizaje posterior. Se revela por medio de los errores específicos que son constantes y resistentes. (Brousseau, 1983, citado por Barrantes, 2006; p. 3)

En relación con lo anterior expuesto, Cescutti y Ortega (2010) explican lo concerniente al reconocimiento del obstáculo a partir del error manifestado por el estudiante en su praxis, por lo que afirman:

> Así pues, el error viene a ser el indicativo para reconocer la existencia del obstáculo en el individuo, puesto que estos son predecibles, pueden ser identificados por medio del conocimiento del ambiente o la situación, es decir el medio didáctico en el cual el obstáculo fue construido como conocimiento, ya sea este conocimiento edificado por el estudiante de manera correcta o incorrecta, atendiendo a que el obstáculo epistemológico tiene validez en su constructo, ya que es resultado de un conocimiento previo que ahora se presenta extemporáneo para adquirir uno nuevo. (p. 37)

Asimismo, Brousseau (1983; citado por Artigue, 1990) plantea una serie de características que satisfacen los obstáculos, estas son:

a) Un obstáculo es un conocimiento, no una falta de conocimiento;
b) El alumno utiliza este conocimiento para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto que encuentra con frecuencia;
c) Cuando se usa este conocimiento fuera de este contexto genera respuestas incorrectas. Una respuesta universal exigiría un punto de vista diferente;
d) El alumno resiste a las contradicciones que el obstáculo le produce y al establecimiento de un conocimiento mejor. Es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber;
e) Después de haber notado su inexactitud, continúa manifestándolo, de forma esporádica. (p.8)

Y señala además, que los obstáculos que se encuentran en la enseñanza de las matemáticas pueden ser originados de tres formas distintas, estableciendo así una tipología de los obstáculos, la cual se menciona a continuación:

a) Un origen ontogenético, correspondiente a los obstáculos unidos a las limitaciones de las capacidades cognitivas de los estudiantes comprometidos dentro del proceso de enseñanza.
b) Un origen didáctico para los obstáculos ligados a las opciones del sistema de enseñanza.
c) Un origen epistemológico, finalmente, para los obstáculos relacionados a la resistencia a un saber mal adaptado, es decir los obstáculos al sentido de Bachelard. (Brousseau, 1983, citado por Artigue, 1990, p.8)

Hechas las consideraciones anteriores, como complemento, vale la pena mencionar lo expresado por Belmonte (2009) en lo concerniente a los obstáculos epistemológicos, el cual explica que:

> Se pueden encontrar en la historia de los propios conceptos, lo que no quiere decir que se deba amplificar su efecto ni que se deban reproducir en el medio escolar las condiciones históricas donde han sido vencidos. Los conceptos, aunque son imágenes mentales que subyacen bajo las palabras o símbolos con los que se expresan regularidades, suelen tener elementos comunes en todas las personas como producto del proceso de enseñanza y aprendizaje; pero, también pueden poseer matices individuales. Si el obstáculo es epistemológico, aparecerá en casi todos los estudiantes de manera normal y recurrente. Los obstáculos epistemológicos pueden presentar diferentes aspectos. En primer lugar, los obstáculos que manifiestan los alumnos al utilizar el lenguaje cotidiano como lenguaje matemático, la terminología y notación matemáticas. En segundo lugar, el obstáculo que surge al intentar crear estructuras conceptuales acordes con la estructura lógica que guía la construcción del conocimiento matemático. Y, en tercer lugar, los obstáculos que surgen al no poder relacionar un concepto con una estructura conceptual, que impide que el alumno generalice dicha noción. Esta última dificulta también se puede considerar como obstáculo ontogénico. (p.108)

Por su parte, Artigue (1990) destaca la importancia que representa para el didáctico el análisis epistemológico, debido a la identificación de los obstáculos que ello permite, "dando la posibilidad de escoger, en medio de las dificultades que generalmente se encuentran por la enseñanza dentro del aprendizaje de tal o cual noción, aquellas que son realmente inevitables porque constituyen el desarrollo del conocimiento"(p. 8). Dentro de este orden de ideas, la noción de *infinito* matemático ha presentado desde sus inicios obstáculos asociados a su naturaleza y son esos conflictos cognitivos los que pueden reconocerse en el proceso de construcción de esta noción, dichos obstáculos han sido estudiados por varios teóricos entre los cuales se encuentra D'Amore, más específicamente en el tópico de los obstáculos epistemológicos y didácticos (Cescutti y Ortega, 2010).

De esta manera, las razones que hacen que el *Infinito* se presente como un obstáculo epistemológico en la enseñanza de contenidos matemáticos, D'Amore (2005) manifiesta:

> "¿Cuándo y en ocasión de cuáles ideas matemáticas es probable que se tenga un obstáculo epistemológico?
>
> - Se tiene casi siempre un obstáculo epistemológico a propósito de aquellas ideas para las cuales en un análisis histórico de estas se reconoce una fractura, un pasaje brusco, una no continuidad en la evolución histórico – crítica de la misma idea.
> - Se tiene un obstáculo epistemológico a propósito de una idea cuando el mismo error se verifica como recurrente más o menos en los mismos términos alrededor de dicha idea.
>
> La búsqueda de los obstáculos va entonces hecha contemporáneamente, y este ligamen es muy interesante:
>
> - en la escuela, en la práctica didáctica;
> - en el estudio de la historia de la Matemática, uniendo una investigación con la otra." (D'Amore, 2005, p. 66)

Por su parte, en las investigaciones efectuadas por Arrigo y D`Amore (1999,2002), Arrigo y D`Amore (2004), así como también el estudio ejecutado por D'Amore y otros (2006); los investigadores identificaron y describieron ciertos fenómenos que se presentan cuando se miden obstáculos epistemológicos asociados al infinito actual; estos son:

Dependencia: Fenómeno que se caracteriza como procesos mentales y convicciones intuitivas que llevan al estudiante a pensar que:

> (…) la cardinalidad de un conjunto infinito depende de su extensión, sobre la base de un modelo gráfico; en este sentido, un segmento largo tiene más puntos que un segmento corto, mientras un conjunto A, con $A \subset B$, tiene menos elementos que B" (D'Amore y otros, 2006; p.4).

Aplastamiento: Es un fenómeno según el cual "el estudiante considera que todos los conjuntos son infinitos, en cuanto infinitos, tienen la misma cardinalidad" (D'Amore y otros, 2006). En pocas palabras:

> Sobre la base del cual el estudiante, impulsado por la solicitud del profesor o del investigador, acepta que algunos conjuntos infinitos sean entre ellos equipotentes (como N y Z) y lo hace porque piensa que esto está ligado con el hecho de ser infinitos, por tanto, como generalización, todos los conjuntos infinitos son equipotentes (Arrigo y D`Amore, 2004, p.8).

Asimismo, la forma patológica de aplastamiento tiene su origen, de acuerdo a Arrigo y D'Amore (2004) en:

> La aplicación incondicional a los conjuntos infinitos los procesos propios de los conjuntos finitos. Esta actitud es resultado de una evidente falsa concepción, generada de años de aplicación de determinados procesos siempre y únicamente en el ámbito finito, procesos que con el tiempo se convierten en verdaderos y propios modelos universales (p.13).

Y por último, el fenómeno de deslizamiento, el cual se define a continuación:

Deslizamiento: "Se tiene cuando se está hablando de alguna cosa (o en un cierto modo o en el ámbito de un cierto lenguaje) e, improvisadamente, nos hallamos hablando de otra cosa (o en otro modo o en otro lenguaje)" (Arrigo y D'Amore, 1999, p.8). Además, en el caso más específico, reseña "el doble pasaje y el hecho de que es relativo a una demostración. Se debe también hacer referencia a la dificultad de parte de los estudiantes en el pasaje entre diversos sistemas de representación" (Duval, 1995, Ob. Cit., p. 8), es decir, si se consideran los registros de representación lingüísticos u otros registros este fenómeno se entendería como "(…) la conversión de la representación de alguna cosa en una representación de esta misma cosa en otro sistema semiótico" (Duval, 1996, 1999; citado por Azcaráte y Camacho 2003, p. 140).

Por ejemplo el pasaje del contexto geométrico al aritmético y viceversa se inserta en el *"jeu de cadres"* de Douady (1984-86), (citado por Arrigo y D'Amore, 1999, p.8), o también si se está hablando de una lista de números en una sucesión, se pasa a consideraciones sobre las modalidades de escribir los mismos números (Arrigo y D'Amore, 2004, p.8). Otro ejemplo con respecto a este fenómeno es señalado por Azcaráte y Camacho (2003) las cuales plantean "al resolver un problema matemático usamos un gráfico cartesiano para representar una función y en el siguiente paso de la resolución, expresamos con una ecuación algebraica la misma función" (p. 140).En tal sentido, la problemática llamada deslizamiento, es de carácter lingüístico y semiótico en donde el estudiante manifiesta una conflicto, ya sea explícito o implícito, en aceptar o no el hecho de una demostración en la cual se emplee el paso de un tipo de discurso a otro.

Teniendo en cuenta lo anterior, se puede observar que la estimación de los/las estudiantes tiene un papel importante en el estudio de los obstáculos en la enseñanza de la matemática, puesto que la estimación "Es el resultado de un procedimiento (consciente o inconsciente) que tiende a determinar el valor desconocido de una cantidad o de una magnitud" (Pellegrino, 1999, p. 145; citado por D'Amore et al. 2006, p. 2). Con lo que respecta al tópico de *Infinito actual* D'Amore y otros (2006) explican: "No se trata, por tanto, de "aproximar" un resultado, sino de captar la esencia del cardinal de una colección." (p. 2), por lo tanto, se tiene que el problema ocurre cuando los estudiantes realizan estimaciones donde mezclan números finitos e infinitos de forma natural sin advertir, por otro lado, que los procesos que se aplican a colecciones finitas son diferentes a las aplicables a colecciones infinitas.

c. El fenómeno de la Transposición Didáctica (TD).

Antes de plantear lo que es la transposición didáctica, se debe de describir algunos de los fundamentos de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica desde el enfoque antropológico, es decir, tener presente la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) desarrollada por Chevallard (1999) la cual podría describirse de la siguiente forma:

> La Teoría Antropológica de lo Didáctico se centra casi de manera exclusiva en la dimensión institucional del conocimiento matemático, siendo un desarrollo del programa de investigación iniciado con la *didáctica fundamental* (Gascón, 1998). El punto crucial radica en que la TAD *"pone la actividad matemática y, por tanto, la actividad de estudio de la matemática, enel conjunto de la actividad humana y de las instituciones sociales"* (Chevallard, 1999, citado por D'Amore y Godino, 2007, p. 197).

Asimismo, la definición de objeto matemático dada por Chevallard (1991) en la que expresa que es:

> Un emergente de un sistema de prácticas donde son manipulados objetos materiales que se desglosan en diferentes registros semióticos: registro de lo oral, palabras o expresiones pronunciadas; registro de lo gestual; dominio de la inscripción, lo que se escribe o dibuja (grafismos, formulismos, cálculos, etc.), es decir, registro de lo escrito. (p. 8)

Por otro lado, Chevallard (1999) explica con relación a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) lo siguiente:

> La TAD introduce una conceptualización unitaria en términos de praxeologías –unión de lostérminos griegos praxis y logos– para referirse a esa unidad indivisible formada por la actividad yel conocimiento humanos. Se parte del postulado que afirma que toda actividad humana se puede describir como la activación de praxeologías, asumiendo así que toda práctica o saber hacer (praxis) aparece siempre acompañada de un discurso o saber (logos); es decir, una descripción, explicación o racionalidad mínima sobre lo que se hace, el cómo se hace y el porqué de lo que se hace. La praxisestá formada, a su vez, por dos componentes, $[T/\tau]$ un tipo de tareas T y una técnica τ o manera institucionalizada y compartida de llevar a cabo las tareas del tipo T en cierta institución. El logos, a su vez, tiene otras dos componentes $[\theta/\Theta]$, una tecnología θ o discurso razonado (logos) sobre la técnica (para hacer inteligible la técnica τ como medio para realizar T) y un componente teóricoΘ que rige la propia tecnología θ, aportando elementos descriptivos, justificativos y generativos de los demás componentes de la praxeología. Al unir la praxis y el logos tenemos la praxeología, que se designa como $[T/\tau/?\theta/\Theta]$. Hablaremos así de praxeologías matemáticas (u organizaciones matemáticas, OM) y praxeologías didácticas (u organizaciones didácticas, OD). (p. 9)

Por lo que, la TAD desarrolló su modelo en términos de praxeologías tanto Matemáticas y Didácticas. La primera hace referencia según D'Amore y Godino (2007) a "sistemas de prácticas que una institución considerada apropiadas para resolver un tipo de tareas, de acuerdo con Chavellard, Bosh y Gascón (1997)" (p. 198); y la segunda:

> (…) coincide con la praxeología matemática, pero la componente praxémica alude a las tareas del profesor y de los alumnos, técnicas de estudio, etc. Incluye referencias problemáticas al lenguaje específico (dialógico) que se instaura entre el profesor y el alumno y al objeto llamado trayectoria didáctica (proyecto didáctico), en el cual asume significado específico el tiempo durante el cual se desarrolla (Chevallard, 1999, citado por D'Amore y Godino, 2007, p. 198)

Donde estas se constituyen por cuatro elementos, estos son: Tipos de tareas, técnicas, tecnología y teoría (Bosch, Espinoza y Gascón, 2003) son pues las cuatro categorías de elementos que componen una organización o praxeología matemática, organizadas en dos niveles distintos; en este orden de ideas, se tiene que el primer nivel "es el que remite a la práctica que se realiza, la *praxis* o *saber-hacer*, es decir, los *tipos de problemas* o *tareas* que se estudian y las *técnicas* que se construyen y utilizan para abordarlos" (Ob. Cit.,p. 5). Mientras que el segundo nivel alude a "la parte descriptiva, organizadora y justificadora de la actividad, que llamaremos *logos* o, simplemente, *saber"* (Ob. Cit., p. 5), por lo tanto, recoge las descripciones y las explicaciones que se conciben para hacer entendibles las técnicas, "esto es, el discurso *tecnológico* (…) y la *teoría* que da sentido a los problemas planteados, permite interpretar las técnicas y fundamentar las descripciones y demostraciones tecnológicas" (Ob. Cit., p. 5).

En relación con este último, hay que plantear, además, la existencia de la relación ternaria entre el docente, alumno y el saber matemático, el cual ha sido un esquema polémico desde su implementación, pero que funciona, ya que incorpora el saber como un término de suma importancia involucrado en el proceso de enseñanza y aprendizaje, originando preguntas de interés para la didáctica, tales como: ¿qué es aquello al cual hace referencia el saber dentro del sistema didáctico?, y por otro lado, se comienza a plantear ¿qué relación guarda el saber enseñado que encuentra el observador con el saber sabio que se maneja en la comunidades científicas – matemáticas?, así como también las distancias que guardan entre sí.

Siguiendo este orden de ideas, la transposición didáctica es explicada por De Faria (2006) siguiendo la definición dada por Chevallard (1991) de esta manera:

> Chevallard sugiere que el conocimiento designado como "Saber a Enseñar" sufre un conjunto de *transformaciones adaptativas* que lo hará apto para ocupar un lugar entre los Objetos de Enseñanza. La *Transposición Didáctica* se ocupa y toma un lugar dentro de este conjunto de transformaciones.
>
> Así: "el trabajo que transforma un Objeto de Saber a Enseñar en un Objeto de Enseñanza" (o bien, la traslación de conocimientos científicos a conocimientos escolares) corresponde a la Transposición Didáctica. De esta forma, su objeto de estudio es el *saber* y las *transformaciones* que sufre este saber desde su origen hasta su puesta en práctica en la sociedad. (p.1)

Ahora bien, ya descrito en una primera instancia lo relacionado al fenómeno de transposición didáctica, esta revela a su vez la existencia de diversos géneros o modos del saber, por el movimiento del saber de una comunidad “científica” a otra “escolar” (De Faria, 2006) debido a las diferentes transformaciones que sufre, por lo que el saber desempeña diferentes funciones de acuerdo al contexto en que este sea manejado. En relación a los modos de saber, De Faria (2006) explica lo siguiente:

> El primer modo del saber corresponde al *Saber Sabio*. Éste se refiere al saber que es generado por el matemático profesional, el investigador en matemática. Este saber es desarrollado en los centros o institutos de investigación, laboratorios, Universidades, etc. (…) es un saber especializado; logrado a partir de un conjunto o procedimientos que se llevaron a cabo en algún lugar, espacio y tiempo (…). El saber científico no puede ser enseñado en la forma como se encuentra redactado en los textos técnicos-científicos y esto constituye un obstáculo a considerar en el proceso de aprendizaje. Por lo cual, es transformado en un *Saber a Enseñar*, el cual ocupa lugar en los programas de estudio (currículo). Se trata de un saber ligado a una forma didáctica que sirve para presentar el saber al estudiante (…) Finalmente (…) el *Saber Enseñado* (…) es aquél saber registrado en el plano de aula del docente, que no coincide necesariamente con la intención prevista en los objetivos programados al nivel del saber a enseñar. Este saber está ubicado en los Sistemas Didácticos, los cuales, corresponden propiamente a la relación ternaria: profesor-estudiante-saber. (p.2)

Por lo tanto, el saber sabio está ligado a una clase de saber especializado desarrollado en una comunidad científica, institución, laboratorio o universidad; que responde a intereses políticos, económicos, tecnológicos, entre otros; y que se maneja a través de un tipo de lenguaje tecnificado distinto al manejado por el resto de la sociedad. Asimismo se tendrá el saber a enseñar, el cual es un tipo de saber presentado al estudiante de manera didáctica para así facilitar la comprensión del saber científico en el proceso de aprendizaje, esto queda evidenciado en los programas de estudio, y está orientado por una teoría didáctica o modelo teórico que será la base del trabajo docente. Y por último, el saber enseñado, el cual es una clase de saber manejado a un nivel micro que se da a través de la relación del tridente profesor – estudiante – saber, por medio de los sistemas didácticos y al trabajo del docente en el aula. Estos modos de saber son producto de dos transformaciones, que según Chevallard, seguido por De Faria (2006) son: la transformación externa y la transformación interna. Entendido esto, se entiende por transformación externa al proceso de descontextualización que sufre el saber sabio dentro de su contexto, lenguaje e historia para que este sea apto de ser enseñado y admitido dentro de los programas oficiales, eliminado la historicidad de su construcción o descubrimiento. Por otro lado, la transformación interna responde a la manera en que el docente interpreta el documento oficial del ministerio y lo lleva al aula por medio de la planificación de sus lecciones (De Faria, 2006).

Ahora, sobre la base de lo explicado en los párrafos anteriores, se puede decir, en segunda instancia, que lo denominado transposición didáctica hace referencia al paso que existe del saber sabio al saber enseñado, y a su vez a la distancia eventual que los separa, es decir, la transposición didáctica es un proceso que se da dentro de un conjunto de transformaciones adaptativas que buscan trasladar los conocimientos científicos a conocimientos escolares, esto es, el paso que se da en la traducción del contexto del conocimiento especializado a un contexto de conocimientos que resulten de fácil aprensión para el estudiante, donde el objeto de saber a enseñar se transmuta a objeto de enseñanza. Esta transposición es realizada por el docente quien reconstruye y recontextualiza, a su modo de ver, el saber sabio para que se dé a lugar un aprendizaje significativo, dicho camino de adaptación da orígenes a distintos modos de saber, convirtiéndose así en una herramienta para el didacta que permite recapacitar, tomar distancia, interrogar las evidencias, poner en cuestión la ideas simples, desprenderse de la familiaridad engañosa de su objeto de estudio, es decir, ejercer una vigilancia epistemológica del objeto a estudiar.

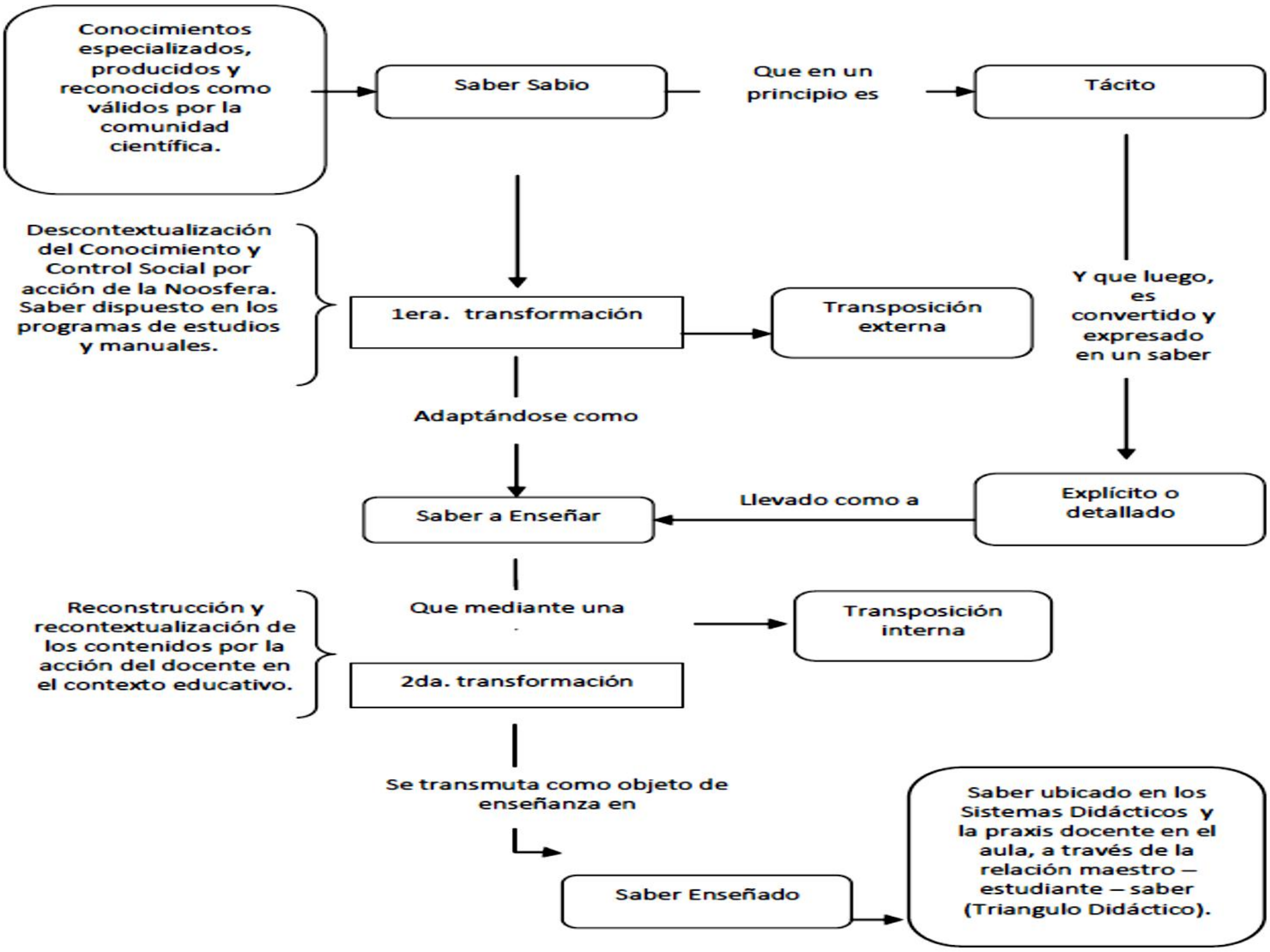
Por otro lado, la transposición didáctica busca aproximar las dos clases de saberes, el saber sabio y el saber enseñado, los cuales se encuentran distanciados, por así decirlo, ya que el saber tal como es enseñado, el saber enseñado, es necesariamente distinto del saber inicialmente designado como el que debe ser enseñado, el saber a enseñar, este distanciamiento se debe a la brecha creada en sí por el mismo sistema y a su vez por el envejecimiento de los sistemas de enseñanza, ya sea biológico o moral, por lo que dicha transposición debe mantener constante la duda sistémica o vigilancia epistemológica con respecto al objeto cuya enseñanza se proyecta, para así evitar que se origine un distanciamiento demasiado grande entre estos dos saberes, por lo que se hace imprescindible la búsqueda de la génesis y evolución de los objetos determinados a los cuales se hace referencia, esto ocurre en el proceso de reconstrucción y recontextualización al cual es sometido el saber por parte del docente en su praxis en las aulas .

En relación con lo anterior, hay que señalar que la transposición didáctica genera un tipo de saber exiliado de sus orígenes y separado de su producción histórica en la esfera del saber sabio, por lo que el saber enseñado es presentado como algo que no viene de algún tiempo ni de ningún lugar (Chevallard, 1991), sino que ya viene dado o acabado dentro del funcionamiento de la institución, debido a que el sistema didáctico es un sistema abierto destinado a ser compatible con su entorno, pero que contradictoriamente esta compatibilidad trae consigo la disminución de la conciencia del entorno por parte de los agentes que integran el sistema, ya que la conciencia didáctica es cerrada y responde subjetivamente a la autonomía relativa del sistema didáctico, es decir la forma vivida de la condición de posibilidad de enseñanza.

Por el contrario, cuando se le asigna al saber sabio el justo lugar en el proceso de transposición, esto es que el análisis de la transposición didáctica no sustituya indebidamente el análisis epistemológico, se verifica que el concepto de transposición didáctica es el que permite la articulación del análisis epistemológico con el análisis didáctico, convirtiéndose así en guía para el correcto uso de la epistemología para la didáctica. Ahora, dicho concepto existe debido a que el funcionamiento didáctico del saber es distinto del funcionamiento académico, por lo que plantean dos regímenes del saber que se interrelacionan entre sí pero que no se pueden hacer coincidir exactamente, pero donde el saber enseñado debe ser lo suficientemente cercano al saber sabio, puesto que de no ser así se produciría la desautorización por parte de los matemáticos, lo cual socavaría la legitimidad del proyecto socialmente aceptado y sostenido de su enseñanza; y a su vez lo suficientemente alejado del saber banalizado en la sociedad que es manejado de una forma tan simple e informal.

Diagrama representativo sobre el fenómeno de la Transposición Didáctica del conocimiento.

TRANSPOSICION DIDÁTICA



Fuente: Cescutti, R. (2014).

Cabe señalar, que un objeto de enseñanza existe como tal cuando su inserción en el sistema de los objetos a enseñar se presenta como útil para la simplificación del sistema didáctico, lo cual significa que un objeto de saber solo se identifica y se designa como objeto a enseñar desde el momento en que problema didáctico que ocurre en su transposición a objeto de enseñanza estuviera resuelto. Además, dentro de los objetos de saber se encuentra lo que se conoce como nociones matemáticas y las nociones paramatemáticas, donde la primeras son construidas por demostración, que poseen propiedades y ocasiones de uso por lo que son candidatos a ser objetos de enseñanza, mientras que las segundas son preconstruidas, siendo además nociones herramientas de la actividad matemática, por lo que no constituyen el objeto de una enseñanza como tal, sino que son objetos de saber auxiliares que permitan la aprensión de los objetos matemáticos.

En relación a esto último, hay que hacer el señalamiento en cuanto a la utilidad del aprendizaje matemático de contenidos curriculares en la vida cotidiana, esta es una cuestión muy cierta, muchos estudiantes manifiestan esa inquietud a sus profesores, en una primera instancia, a la hora de aprender y construir dichos contenidos, los cuales parecen extraños a cualquier correspondencia con la vida real. "Por tanto ellos *deben* saber, es justo que sepan, si su empeño, su tiempo, su energía tienen o tendrán una razón en su futuro cotidiano, si le aportarán un beneficio por lo menos a distancia del tiempo…" (D'Amore y Fandiño, 2001, p. 64). Sin embargo, el profesor ante esta inquietud responde tratando de justificar el conocimiento que está impartiendo, para así no perder la atención del estudiante, pero incurren según D'Amore y Fandiño (2001) en una respuesta falsa, puesto que:

> (…) es falsa la promesa que el aprendizaje matemático será útil en la cotidianidad de su vida futura (sabemos bien que la gran mayoría de los aprendizajes matemáticos escolares son funcionales solo al interior de la escuela) y por tanto el profesor recurre a aquella parte del contrato didáctico cuya cláusula se puede llamar: *confianzaen el maestro*. El estudiante, en la escuela reconoce la función institucional del profesor y le reconoce la tarea de elegir sobre cuales contenidos del currículo de matemáticas se debe concentrar. Pero la promesa que los logaritmos, el algoritmo de la raíz cuadrada, la solución de ecuaciones, fórmulas de prostaféresis, (…) le serán útiles en la cotidianidad de su vida es falsa, por lo menos en la gran mayoría de los casos. (p. 64)

En función de esta consideración, desde la perspectiva de D'Amore y Fandiño (2001) en la gran mayoría de los maestros y profesores del nivel que sea, se reconoce lo siguiente:

> No saben responder a la pregunta del estudiante y se refugian detrás de hipótesis educativas vagas y no probadas (banalidades, estereotipos del género: «en matemáticas se ejercita el razonamiento, se aprende a razonar…» como si en geografía, en historia, en literatura, en educación física se aprendiese a ser incoherente y no se necesitara de razones lógicas!). No tiene alternativas culturales, repite aquello que sufrió como estudiante y reproduce un modelo didáctico-cultural banal, no estando preparado para alguna otra cosa diversa. (p. 64)

Por tal motivo, la preparación profesional de los docentes de matemática debe estar orientada a reconocer dicho problema y a estar cerca del saber en diversos contextos, para así dar una respuesta satisfactoria al estudiante en cuanto a la utilidad de estos contenidos, viendo de esta manera a la Didáctica de la Matemática no como un problema de enseñanza, sino como un problema de origen epistemológico en relación al aprendizaje. De igual forma, se debe prepararlos para abordar el problema "de la integración en el currículo de matemática de hechos, casos, ejemplos de aplicación (verdadera!) de la matemática en la vida real" (D'Amore y Fandiño, 2001, p. 64). Esto es el denominado fenómeno de la *escolarización de los saberes*, entendiéndose este de acuerdo a la definición establecida por D'Amore (1999, citado por D'Amore y Fandiño, 2001), la cual se menciona a continuación:

Con el término "escolarización del saber" entiendo (…) al hecho (…) mediante el cual el alumno, en cierto momento de su vida social y escolar (…) delega a la Escuela (como institución) y al profesor (como representante de la institución) la tarea de *seleccionar para él los saberes significativos* (aquellos que lo son socialmente, por estatus reconocidos y legitimados de la noosfera), renunciando a hacerse cargo directamente de su elección sobre la base de cualquier criterio personal (…). Dado que esta escolarización trae con si el reconocimiento del profesor como depositario de los saberes que socialmente cuentan, es también obvio que se da (…) una escolarización de las relaciones interpersonales (entre alumno y profesor y entre estudiantes y compañeros) y de la relación entre alumno y saber: es esto lo que […] se llama "escolarización de las relaciones". (p.65)

Ahora bien, en la enseñanza del concepto de Límite a nivel universitario presupone que los estudiantes conocen, comprenden y manejan correctamente nociones fundamentales tales como la de número, la de infinito, la de cardinal, la de conjunto, la de punto geométrico, entre otras nociones, lo cual no es totalmente cierto. Puesto que, en la instituciones educativas no se enseñan estos tópicos de una manera profunda debido al distanciamiento originado por la transposición didáctica que genera un saber alejado de sus orígenes; ejemplo de ello, la noción de *Infinito*, que desde inicios en la etapa de bachillerato solo es asociado a un número muy grande imposible de contabilizar o reduciéndolo a un símbolo "∞" sin algún origen o evolución histórica, por lo que este hecho acarrea el surgimiento de obstáculos a la hora de adquirir un nuevo conocimiento relacionado a esta noción, imposibilitando el aprendizaje adecuado del mismo.

Dicho esto, la vigilancia epistemológica es fundamental para evitar la virtualización de los saberes o la descontextualización de los mismos, ya que el debido análisis epistemológico, en este caso la noción de Infinito, puede procurar una transposición apropiada para conceptos como el de Límite, reduciendo en la medida de lo posibles los obstáculos ya investigados por Arrigo y D`Amore (1999,2002, 2004) en relación a la noción de *Infinito*. Otro hecho que es importante recalcar, es la banalización del lenguaje y de los términos que se utilizan en la enseñanza de las matemáticas (similitudes o acepciones que emplea el docente para lograr el entendimiento en el estudiante) muchas veces estos difieren del lenguaje técnico – académico de origen, lo que trae consigo la conformación de una lógica en el sujeto a modo de red, estructurada con informaciones que son difíciles de remover o cambiar a través del trabajo didáctico del docente, lo que conlleva a la conformación de conflictos cognitivos.

d. El Enfoque Ontosemiótico (EOS).

Antes de dilucidar lo concerniente a este tópico, hay que señalar primeramente que el Enfoque Ontosemiótico (EOS) surge como una necesidad de dar respuesta a las limitaciones que manifestaba la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) en cuanto a la forma de interpretar la cognición matemática, puesto que esta solo aborda la dimensión institucional del conocimiento matemático dejando a un lado la cognición personal que posee el individuo, por lo que el EOS considera los conocimientos subjetivos y los conocimientos institucionales como procesos importantes para la cognición general incluyendo la matemática, entrelazando así el aspecto psicológico, antropológico y epistémico. Entendido esto, dicho problema se puede formular de manera siguiente:

PE (problema epistemológico): ¿Qué es un objeto matemático?; o de manera equivalente, ¿Cuál es el significado de un objeto matemático (número, derivada, media,...) en un contexto o marco institucional determinado?

Este problema epistemológico, esto es, referido al objeto matemático como entidad cultural o institucional, se complementa dialécticamente con el problema cognitivo asociado, o sea, el objeto como entidad personal o psicológica:

PC (problema cognitivo): ¿Qué significa el objeto O para un sujeto en un momento y circunstancias dadas? (Godino, 2012; p. 52)

Ahora, el EOS plantea la no disociación entre la teoría realista y la teoría pragmática del conocimiento, por lo cual alude a que el significado de un objeto no puede ser reducido a su definición, sino por el contrario, estos objetos deben ser analizados como símbolos de unidades culturales que tienen su origen a través de su aplicación en determinadas actividades de resolución de problemas, por lo que el significado se encuentra ligado a la praxis empleada. Por consiguiente, la enseñanza y el aprendizaje en un primer momento son de origen pragmático, ya que depende del contexto y aplicación, pero que a través de ciertos usos se puede redirigir esa enseñanza y aprendizaje de objetos matemáticos a usos objetivados por medio del lenguaje y el léxico institucional, planteándose así las relaciones de dependencia entre expresión y contenido, de este modo la esencia de los objetos es aceptada y no puesta a duda, pero que a su vez son resultado de la práctica. (D'Amore y Godino, 2007).

Por lo tanto, el EOS según Godino (2012):

(…) propone articular las aproximaciones epistemológica y cognitiva, al establecer como hipótesis básica que los hechos y fenómenos didácticos tienen una doble dimensión personal – institucional. La descripción y explicación de la dialéctica personal – institucional precisa realizar análisis microdidácticos, tanto de los comportamientos de los sujetos agentes como de la ecología de los significados, en los procesos de estudio matemáticos. (p. 56)

Esto se debe al problema que surge dentro de la correspondencia existente entre la representación y significación de una entidad con otra, generalmente de tipo lingüístico, en donde para el didacta es de interés "los tipos de objetos que se relacionan, los criterios de correspondencia y la finalidad con la que se establecen las relaciones" (Font, Godino y D`Amore, 2005; p.3). Específicamente, el conflicto subyace en el momento "cuando junto al lenguaje y los objetos del mundo que nos rodea se ponen en juego entidades no ostensivas que solemos designar como conceptos, nociones, ideas, abstracciones,…" (Font, Godino y D`Amore, 2005; p.3).

De esta manera, dentro de este enfoque teórico existen una serie de conceptos fundamentales que deben ser considerados para entender los procesos a los cuales es sometido el conocimiento y a la forma con que este es adquirido y manipulado por el estudiante. En este orden de ideas, se mencionan los siguientes:

- ***El significado personal e institucional de un objeto matemático***: "se define como un sistema de prácticas operativas y discursivas realizadas por una persona o en el interior de una institución para resolver un campo de problemas" (Godino y Batanero, 1994; citado por D'Amore y Godino, 2007; p. 208).
- ***Sistema de prácticas***: sean operativas, discursivas y normativas, estas son tomadas desde un enfoque pragmático y antropológico de las matemáticas, asumidas desde la perspectiva institucional y personal. Por lo tanto, la construcción del conocimiento matemático viene dada desde la actividad de resolución de problemas (Godino, 2012).
- ***La práctica matemática***: es la referida a "toda actuación o expresión –verbal, gráfica, etc.– que efectúa alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1998; citado por D'Amore y Godino, 2007; p. 208).
- ***Objeto matemático***: hace alusión a "todo lo que es indicado, señalado o nombrado cuando se constituye, comunica o aprende matemáticas" (Godino, 2002; citado por D'Amore y Godino, 2007; p. 208). Cabe señalar que es similar a la definición dada por Chevallard (1991) ya formulada anteriormente. Los objetos matemáticos son:
  - *i.* *Lenguaje*: son todas aquellas expresiones, términos o gráficos en sus diversas manifestaciones (D'Amore y Godino, 2007).
  - *ii.* *Situaciones*: son escenarios donde se expresan problemas, ejercicios o aplicaciones extra – matemática en sí misma (D'Amore y Godino, 2007).
  - *iii.* *Procedimientos*: hace referencia a lo concerniente a las operaciones, algoritmos y a las técnicas de cálculo (D'Amore y Godino, 2007).
  - *iv.* *Conceptos*: estos son los introducidos por medio de definiciones o descripciones (D'Amore y Godino, 2007).
  - *v.* *Propiedad o atributo de los objetos*: son los relacionados a los enunciados que se realizan a partir de los conceptos (D'Amore y Godino, 2007).
  - *vi.* *Argumentos* "(por ejemplo, los que se usan para validar o explicar los enunciados por deducción o de otro tipo)" (D'Amore y Godino, 2007; p.209).

Estos seis objetos vienen a ampliar el enfoque tradicionalista que se viene manifestando, en el cual solo se hace referencia a entidades conceptuales y procedimentales, tales entidades u objetos surgen puesto que los anteriores (las entidades conceptuales y procedimentales) no eran adecuados para describir en su totalidad los objetos intervinientes y emergente de la actividad matemática. En este sentido, Godino, Font, Contreras y Wilhelmi (2006) expresan:

> Las situaciones problemas son el origen o razón de ser de la actividad; el lenguaje (…) representan las restantes entidades y sirve como instrumento para la acción, mientras que los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí. Se trata de entidades funcionales y relativas a los juegos de lenguaje en que participan (marcos institucionales y contextos de uso); tienen también un carácter recursivo, en el sentido de cada objeto, dependiendo del nivel de análisis, puede estar compuesto por entidades de los restantes tipos (un argumento puede poner en juego conceptos, proposiciones o procedimientos). (p. 122)

- ***Función semiótica***: es la relacionada con "las correspondencias –ya sea relaciones de dependencia o función– entre un antecedente (expresión, significante o representante) y un consecuente (contenido, significado o representado) que establece un sujeto (persona o institución), de acuerdo con cierto criterio o código de correspondencia" (D'Amore y Godino, 2007; p. 209). Entre estas relaciones de correspondencia, es decir, las relaciones de dependencia existentes entre expresión y contenido, se manifiestan de diversas manera, estas son:
    - i. *Representacional*: cuando un objeto se ubica en lugar de otro para un determinado fin o propósito (D'Amore y Godino, 2007).
    - ii. *Instrumental*: está ligado al uso que efectúa un objeto sobre otro(s) objeto(s) como instrumento (D'Amore y Godino, 2007).
    - iii. *Estructural*: hace referencia cuando emergen nuevos objetos debido a la composición de un sistema por parte de dos o más objetos (D'Amore y Godino, 2007).
- ***Signo***: se entiende como todo aquello "que determina a alguna otra (su interpretante) para que se refiera a un objeto al cual ella misma se refiere (su objeto) de la misma manera; el interpretante se convierte a su vez en un signo, y así ad infinitum" (Pierce, 1931 – 1958; citado por D'Amore y Godino, 2007; p. 210).
- ***Configuración de objetos y procesos matemáticos***: es aquella que emergen e intervienen en la actividad matemática. Por lo que, "se asume una noción interaccionista de objeto y pragmatista del significado (contenido de funciones semióticas) articulando de manera coherente la concepción antropológica (Wittgenstein) con posiciones realistas (no platónicas) de las matemáticas" (Godino, 2012; p.55). Teniendo en cuenta, que "los diversos medios de expresión (lenguajes) desempeñan el doble papel de instrumentos del trabajo matemático y de representación de los restantes objetos matemáticos" (Godino, 2012; p.55).
- ***Configuración didáctica***: derivada de la configuración de objetos y procesos matemáticos en una determinada situación – problema, es establecida como un sistema donde se articulan los roles docentes y discentes, esta es planteada según Godino (2012) como una herramienta fundamental para el análisis de la instrucción matemática. Por otro lado, "las configuraciones didácticas y su secuencia en trayectorias didácticas tienen en cuenta las facetas epistémica (conocimientos institucionales), cognitiva (conocimientos personales), afectiva, mediacional (recursos tecnológicos y temporales), interaccional y ecológica que caracterizan los procesos de estudio matemático" (Godino, 2012; p.55).
- ***Dimensión normativa***: hace alusión al "sistema de reglas, hábitos, normas que restringen y soportan las prácticas matemáticas y didácticas, generaliza la noción de contrato didáctico y normas socio-matemáticas" (Godino, 2012; p.55).

Ahora bien, volviendo a lo concerniente a lo del objeto matemático, desde esta perspectiva, los que intervienen y surgen de las prácticas matemáticas pueden ser clasificados de acuerdos a unas dimensiones de carácter dual, esta clasificación, en palabras de (Godino 2002; citado por D'Amore y Godino, 2007), es la subsiguiente:

- *Personal – institucional*: Si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución, sus objetos emergentes se consideran *institucionales*, mientras que los sistemas son específicos de una persona, los objetos serán *personales*.
- *Ostensivos (gráficos o símbolos) – no ostensivos (entidades que se evocan al hacer matemática, y se representan en forma textual, oral, grafica o gestual).*
- *Extensivos – intensivo*: Tal dualidad atañe a la relación entre un objeto que interviene en un juego de lenguaje como un caso particular (por ejemplo la función $y = 2x + 1$) y una clase más general o abstracta (por ejemplo, la familia de funciones $y = mx + n$).
- *Elemental – sistémico*: en algunas circunstancias los objetos matemáticos intervienen como entidades unitarias –que, se supone, son conocidas previamente–, y en otras como sistemas que se deben descomponer para su estudio.
- *Expresión – contenido*: Alude al antecedente y consecuente de cualquier función semiótica. (p. 211)

Por otro lado, de acuerdo a Rubio, Font y Planas (2008), haciendo referencia a la EOS, manifiestan que en "D'Amore y Godino (2007); (…) Font y Godino (2006); Godino y Batanero (1994); Godino, Contreras y Font (2006); Godino, Font y Wilhelmi (2006) y Godino, Font, Wilhelmi y Castro (2008) proponen, cinco niveles para el análisis de procesos de estudio" (p. 160). Estos son:

1. Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas.
2. Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos.
3. Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas.
4. Identificación del sistema de normas y metanormas.
5. Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio. (p.160)

En este sentido, cabe agregar lo manifestado por Font, Planas y Godino (2009), donde ilustran lo siguiente:

> Estos niveles son el resultado de un trabajo de síntesis teórica de diferentes análisis parciales consolidados en el área de didáctica de la matemática. (…)Hasta el momento, desde el enfoque ontosemiótico se han realizado análisis didácticos a episodios de aula 3 pero no se han aplicado conjuntamente todos los niveles anteriores a un mismo proceso de instrucción. Por ejemplo, en Godino, Font y Wilhelmi (2006) se han aplicado parcialmente los niveles 1 y 2 al estudio de una lección de un libro de texto sobre los conceptos de suma y resta. En Font, Godino y Contreras (2008) se han aplicado los niveles 1 y 2 al análisis de una tarea de aula para justificar la derivada de la función $f_{(x)} = x^2$. En Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006) se ha aplicado el nivel 5 a una sesión de clase para la enseñanza de la noción de función con estudiantes de primer curso de una escuela de ingeniería. (p.3)

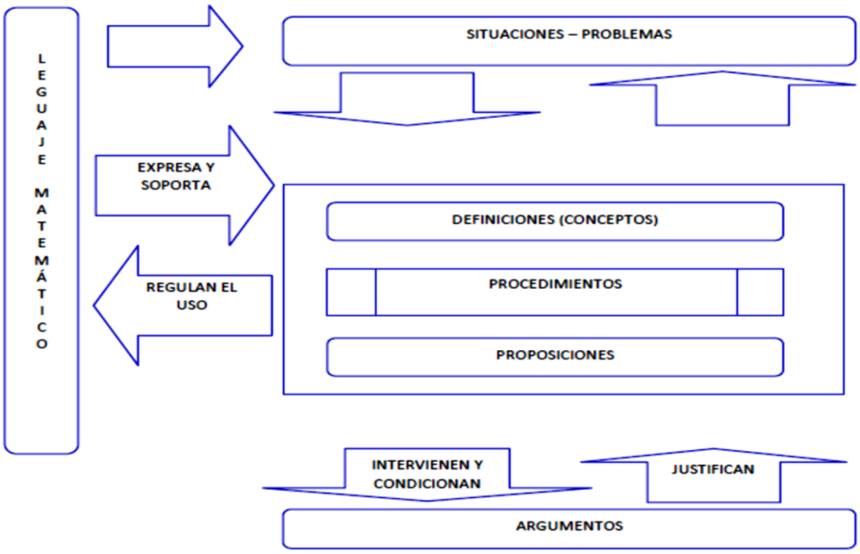
Dichos modelos están orientados a desarrollar un análisis completo que permita describir, explicar y valorar los procesos de estudio, aunque dicho análisis está condicionado al episodio de aula a considerar, puesto que a algunos no necesariamente hay que aplicarles todos los niveles, esto fue mencionado en la cita anterior. Profundizando, en cuanto a los niveles de análisis estos son explicados a continuación:

- ***Nivel 1. Identificación de prácticas matemáticas***: Consiste en "describir la secuencia de prácticas matemáticas, durante las cuales se activan elementos distintos, a saber, un agente (institución o persona) que realiza la práctica y un medio donde se realiza (en este medio puede haber otros agentes, objetos, etc.) (Rubio, Font y Planas, 2008; p.160).
- ***Nivel 2. Identificación de los objetos y procesos matemáticos***: este nivel tiene por objeto describir las prácticas matemáticas teniendo en cuenta los diferentes objetos y procesos que intervienen en la resolución de situaciones – problemas, así como también las configuraciones de objetos y procesos matemáticos (Rubio y otros, 2008). En este sentido, cabe mencionar lo manifestado por Font, Planas y Godino (2009), en relación a la identificación de los objetos matemáticos, donde explican que:

> Para realizar una práctica matemática, el agente necesita conocimientos que son básicos tanto para su realización como para la interpretación de sus resultados como satisfactorios. Si consideramos los componentes del conocimiento que es necesario que el agente tenga para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una situación problema (e.g., primero plantear y después resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas) vemos que ha de utilizar un determinado lenguaje verbal (e. g, solución, ecuación) y simbólico (e.g., x, =). Este lenguaje es la parte ostensiva de una serie de conceptos (e.g., ecuación, solución), proposiciones (e.g., si se suma el mismo término a los dos miembros de la ecuación se obtiene una ecuación equivalente) y procedimientos (e.g., resolución por sustitución, por igualación) a utilizar en la elaboración de argumentos para decidir si las acciones simples que componen la práctica, y ella misma entendida como acción compuesta, son satisfactorias. (p.7)

Ahora bien, para conocer los objetos activados, más relevantes, en la práctica matemática durante un episodio de clase, se puede utilizar el diagrama sobre la configuración de objetos, donde se detallan la manera en que se articulan lo diferentes objetos matemáticos, este es la siguiente:

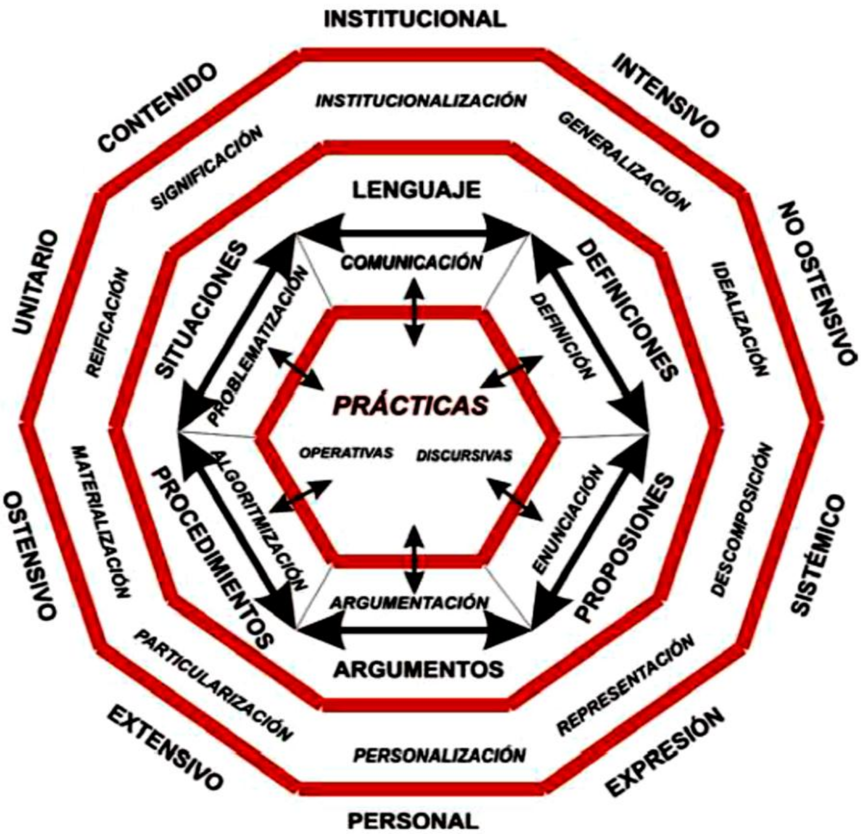
Configuración de objetos



Fuente: Font y Godino (2006, p.69)

Sin embargo, sí es necesario conocer cómo interactúan los objetos, es decir, su funcionamiento como sistema integrado desde un punto de vista temporal y dinámico, es preciso recurrir a la tipología de procesos propuestos por el EOS. Puesto que, de acuerdo a Font y otros (2009), “La actividad matemática queda modelada en términos de sistemas de prácticas operativas y discursivas. De estas prácticas emergen diferentes tipos de objetos matemáticos (lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) (…). Estos tipos de objetos pueden considerarse en base a cinco dimensiones duales” (p.9), ya explicadas anteriormente. De lo anteriormente señalado, se puede observar la interacción de los objetos y procesos matemáticos, dispuesta en la siguiente figura:

Representación ontosemiótica del conocimiento matemático.



Fuente: Font y otros (2009; p.10)

- ***Nivel 3. Descripción de interacciones en torno a conflictos***: esta se centra en las interacciones en relación a los conflictos de carácter semiótico, entendiendo este conflicto como “cualquier disparidad entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos, personas o instituciones” (Godino, Batanero y Font, 2007; citados por Font y otros, 2009; p.11).
- ***Nivel 4. Identificación de normas y metanormas***: en este nivel se debe tener en consideración lo expuesto por Font, et al. (2009), donde plantean que toda “la actividad matemática en el aula tiene una dimensión social ya que la clase es una micro-sociedad donde tiene lugar la difusión y construcción de conocimiento matemático a través de la interacción social entre alumnos y profesor” (p.11). Por lo tanto, “el aprendizaje matemático está condicionado por metaconocimientos matemáticos y didácticos, tales como las normas sociomatemáticas y las cláusulas del contrato didáctico” (Ob. Cit., p.11). De aquí, que en este nivel solo se considera como se vinculan y se soportan las prácticas matemáticas en función de las normas y metanormas que las regulan.

Resulta oportuno agregar, lo mencionado por D’Amore, Font y Godino (2007; citado por Font y otros, 2009), en donde explican que:

> (…) hay diferentes criterios de clasificación de las normas: según el momento en que intervienen (diseño curricular, planificación, implementación y evaluación), según el aspecto del proceso de instrucción a que se refieren (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional…), según su origen (disciplina, escuela, aula, sociedad…), según el tipo y grado de coerción (social y disciplinar), etc. (p.161)

Todos los niveles de análisis anteriores son en sí mismos instrumentos para la didáctica descriptiva y explicativa, puesto que permiten comprender lo que ha ocurrido en el proceso de instrucción respondiendo al ¿qué? y ¿por qué? (Rubio, y otros, 2008).

- ***Nivel 5. Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio***: Este análisis valorativo se realiza basándose “en los cuatro análisis previos y constituye una síntesis orientada a la identificación de potenciales mejoras del proceso de instrucción” (Font y otros, 2009; p.13). Por lo tanto, en concordancia con Rubio y otros (2008), se tiene que:

> (…) son necesarios, por tanto, criterios de idoneidad o adecuación que permitan valorar los procesos de instrucción efectivamente realizados y “guiar” su mejora, evaluando la pertinencia del proceso de instrucción matemática y señalando pautas para la mejora del diseño y la implementación del proceso de estudio. (p.161)

En relación a esto último, existen varios criterios propuestos para valorar la idoneidad didáctica de los procesos de instrucción matemática, siguiendo a Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006; citados por Fonty otros, 2009), estas son:

> 1. *Idoneidad epistémica*, para valorar si las matemáticas que se enseñan son unas “buenas matemáticas”.
> 2. *Idoneidad cognitiva*, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los alumnos y, después del proceso, si los aprendizajes logrados se acercan a los que se pretendían enseñar.
> 3. *Idoneidad interaccional*, para valorar si la interacción ha resuelto dudas y dificultades de los alumnos.
> 4. *Idoneidad mediacional*, para valorar la adecuación de recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción.
> 5. *Idoneidad emocional*, para valorar la implicación (interés, motivación) de los alumnos en el proceso de instrucción.
> 6. *Idoneidad ecológica*, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional, etc. (p.14)

2.2.4 Bases legales

La educación venezolana se encuentra fundamentada tanto en la Constitución de la República Bolivariana de Venezuela (1999), Ley Orgánica de Educación (2009), Ley de Universidades, la, así como también en el Reglamento del Ejercicio de la profesión Docente y la Ley Orgánica para la Protección del Niño y Adolecente (LOPNA), entre otras.

Constitución de la República Bolivariana de Venezuela (1999).

La investigación tiene su fundamente en los artículos *Nº 109* y Nº *110* de la misma, puesto que, en estos se plantean el reconocimiento de aspectos fundamentales por parte del Estado, tales como: la autonomía universitaria como principio y jerarquía que permite a los profesores, profesoras, estudiantes, egresados y egresadas de su comunidad dedicarse a la búsqueda del conocimiento a través de la investigación científica, humanística y tecnológica, para beneficio espiritual y material de la Nación. Así como también, el interés público de la ciencia, la tecnología, el conocimiento, la innovación y sus aplicaciones y los servicios de información necesarios por ser instrumentos fundamentales para el desarrollo económico, social y político del país, así como para la seguridad y soberanía nacional, entre otras cosas. Lo cual, garantiza el desarrollo de la presente investigación.

Ley Orgánica de Educación (2009).

Ahora bien, es preciso también señalar el *Artículo Nº 15, numeral 8 de los fines de la educación*, debido a que expresa el derecho a desarrollar la capacidad de abstracción y el pensamiento crítico mediante la formación en filosofía, lógica y matemáticas, con métodos innovadores que privilegien el aprendizaje desde la cotidianidad y la experiencia. Lo que implica, a este trabajo investigativo, que busca analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos, en este caso la noción de *Infinito* y todo aquello que se suscite alrededor de tal noción, como lo son los obstáculos de origen epistemológico y didáctico, así como también la formación de esquemas conceptuales.

Cabe agregar, además, los artículos *Nº 32* y *Nº 38* en los que se insta a la profundización del proceso de formación integral y permanente de ciudadanos críticos y ciudadanas críticas, reflexivos o reflexivas, sensibles y comprometidos o comprometidas, social y éticamente con el desarrollo del país, por parte de las instituciones universitarias. Asimismo, tiene como función la creación, difusión, sociabilización, producción, apropiación y conservación del conocimiento en la sociedad, así como el estímulo de la creación intelectual y cultural en todas sus formas. De igual manera, la formación permanente del docente quien actualiza y mejora el nivel de conocimientos y desempeño de los y las responsables y los y las corresponsables en la formación de ciudadanos y ciudadanas.

Reglamento del Ejercicio de la Profesión Docente (2002) y Ley de Universidades (2008).

Por otro lado, hay que mencionar el artículo *Nº 139* del *Reglamento del Ejercicio de la Profesión Docente y el articulo Nº 3 de la Ley de Universidades (2008)*, en donde se manifiesta lo relacionado a la actualización de conocimientos, la especialización de las funciones, el mejoramiento profesional y el perfeccionamiento, como carácter obligatorio y a la vez un derecho para todo el personal docente en servicio. Con el cual se fundamenta la idea de la búsqueda de conocimientos y nuevos métodos que permitan el mejoramiento de la actividad docente y del proceso de enseñanza de la matemática en mano de los educadores.

2.3 Definición de términos básicos:

Antinomia: n.f. Contradicción entre dos sistemas, o dos conceptos. 2. Filos Para Kant, contradicción inevitable resultante de las propias leyes de la razón pura. (Castell, 1985; p. 95).

Apodíctico, a: adj. Log Demostrativo, convincente, que no admite contradicción. (Castell, 1985; p. 102).

Cardinalidad: Herramienta para comparar conjuntos numerables. Dos conjuntos A y B tienen la misma cardinalidad si es posible definir una relación biyectiva de A sobre B (Revista Matemática Digital. Nº 18, abril 2009, sección currículo y matemática, disponible en www.mendomatica.mendoza.edu.ar).

Esquema conceptual: “Describe la estructura cognitiva de un individuo, asociada a un concepto matemático, y se define como el conjunto de todas las imágenes mentales (cualquier clase de representación: forma simbólica, diagrama, gráfica, etc.) del estudiante asociadas al concepto con todas las propiedades y procedimientos que lo caracterizan” (Azcárate, 1955; citado por Cuestas, 2007, p. 22).

Infinito actual: Noción de infinito que se constituye en una cantidad (quantum) en sí fija y constante que se encuentra más allá de toda magnitud finita (Cantor, 2004; p.182). Es decir, surge al considerarlo como una unidad y que lo tratamos como si fuese un elemento que surge al superar el paso al límite (Cescutti y Ortega, 2010; p. 46)

Infinito potencial: Noción de infinito que se centra en la operación reiterativa e ilimitada, es decir, en la recursividad interminable, por muy grande que sea un número natural siempre podemos concebir uno mayor, y uno mayor que este último y *así sucesivamente*, donde esta última expresión y «*así sucesivamente*» encierra la misma idea de reiteración ilimitada, al infinito. Este tipo de infinito potencial es el que sirve de base a la noción de límite del cálculo infinitesimal. (Ortiz, 1994; p.61).

Límite: Función $\boldsymbol{f}$ uniforme definida para todos los valores de $\boldsymbol{x}$ en entorno a $\boldsymbol{x = x_o}$ con posible excepción de $\boldsymbol{x = x_o}$ (o sea, en un entorno $\boldsymbol{\delta}$ reducido de $\boldsymbol{x_0}$). Se dice que el numero $\boldsymbol{l}$ es el límite de $\boldsymbol{f(x)}$ cuando **x** tiende a $\boldsymbol{x_0}$, lo que se escribe $\boldsymbol{\lim_{x \to 0} f(x) = l}$ si para todo número positivo $\boldsymbol{\varepsilon}$ (por pequeño que sea) se puede hallar un número positivo $\boldsymbol{\delta}$ (por lo general dependiente de $\boldsymbol{\varepsilon}$) tal que $|\boldsymbol{f(x) - l}| < \varepsilon$, siempre que $\boldsymbol{0} < |\boldsymbol{x - x_0}| < \delta$ (Spiegel, 1989; p.23).

Obstáculo: Término analizado por Brousseau (1983, 1986) en educación matemática, como una pieza del conocimiento que puede ser satisfactoria en un determinado momento y para ciertos problemas, pero que puede convertirse en inadecuado para el estudiante cuando intenta acceder a otras etapas del aprendizaje. “El error no es solamente efecto de la ignorancia, de la incertidumbre del azar, que son creídas en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje, más bien son efecto de un conocimiento anterior que tuvo su interés, que fue exitoso, y que ahora se revela como falso o simplemente inadecuado” (Brousseau, 1983; p. 177) (Cuestas, 2007; p. 24).

REFERENCIAS

- Arana, R. (2010). *La idea de infinito en la filosofía de Descartes*. ISSN: 1576-2270. Ontology Studies 10, p.131-142. Disponible en: www.ontologia.net/studies
- Aristóteles, (tr.1995). ***Física***. Traducción y notas Guillermo R. de Echandía Madrid - España. Editorial Gredos.
- Arrigo G. e D’Amore B. (2002). *“Lo vedo ma non ci credo…”, seconda parte*. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La Matematica e la suadidattica*. 1, p. 4 – 57.
- Arrigo, G. y D`Amore B. (1999). *“Lo veo y no lo creo”. Obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de un teorema de Cantor que involucra al infinito actual*. Educación matemática, México DF, vol. 11 (1) p. 5 – 24.
- Arrigo, G. y D`Amore B. (2004). *Otros hallazgos sobre los obstáculos en la comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor*. Educación matemática, México DF, vol. 16 (2) p. 5 – 19.
- Artigue, M. (1990). *Epistemología y didáctica*. Revista: Reserches en Didactique des Mathématiques. Vol. 10, Nº 23. Traducción Espitia, M., p. 1 – 40.
- Azcárate C. y Camacho M. (2003). *Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático*. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 2, p. 135 – 149.
- Barrantes, H. (2006). *Los obstáculos epistemológicos*. Cuadernos de Investigación y formación en Educación Matemática. Año 1, Número 2.
- Belmonte, J. (2009). *Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito en estudiantes de Educación Primaria, Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad*. Tesis para optar al Grado de Doctor. Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Salamanca.
- Belmonte, J. y Sierra, M. (2010).*Modelos intuitivos del infinito y patrones de evolución nivelar*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2011 fecha de aceptación), 14 (2), p. 139 – 171.
- Bosch, M., Espinoza, L. y Gascón, J. (2003). *El Profesor como Director de Procesos de Estudio: Análisis de Organizaciones Didácticas Espontaneas*. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 23, n° 1, p. 1 – 33.
- Boyer, Carl B. (1986). *Historia de la matemática*. Versión de Mariano Martínez Pérez. Madrid - España. Editorial Alianza.
- Brousseau, (1983). *Los Obstáculos Epistemológicos*. Argentina. Disponible: [online http://aportes.educ.ar/matematica/tipos_de_obstaculos.php?page=2] Consultado el día 20/06/12 a las 3:01 pm
- Burbage, F. y Chouchan, N. (2002). *Leibniz y el infinito*.Paris – Francia. Editorial Philosophies, 1º edición 1993. Traducción Alejandro Martín Maldonado.
- Cajori, F. (1915). *Historia de los argumentos de Zenón sobre el movimiento. Fases en el desarrollo de la teoría de límites*. Publicado en *American Mathematical Monthly* volumen XXII. Traducción Eliza Zacarías México 1987. Revista del Seminario de Enseñanza y Titulación.
- Camacho, A., y Aguirre, M. (2001). *Situacion didáctica del concepto de límite infinito. Análisis preliminar*. Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa. Vol. 4. Nº. 3, Noviembre, p. 237 – 265.
- Cantor Georg (1885). *Las diferentes posturas en relación al infinito actual*. Georg Cantor en la carta escrita a G. Enestöm, el 4 de noviembre de 1885. Carta publicada en la revista Signos Filosóficos vol. VI, número 11, enero – junio, 2004, p.175 – 185.
- Castell, H. (1985). *Diccionario Enciclopédico*. Ediciones Castell. Madrid – España.
- Cescutti, R., y Ortega, R., (2010). *Obstáculos epistemológicos asociados a la noción actual de infinito para la comprensión de la idea de Límite en los estudiantes de pregrado cursantes de la asignatura Calculo I de la Mención Matemática de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo*. Tesis de grado para optar al Título de Licenciado en Educación Mención Matemática. Bárbula – Carabobo.
- Chavarria, J. (2006). *Teoría de las situaciones didácticas*. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. Año 1. Número 2.
- Chevallard, Y. (1991). *La Transposición Didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Aique: Buenos Aires.
- Chevallard, Y. (1999). L`analyse des practiques enseignantes en théorie anthrologique du didactique. Recherches en Didactique des Matemátiques 19(2), 221 – 226.
- *Constitución de la República Bolivariana de Venezuela*(2000): Gaceta oficial de la República Bolivariana de Venezuela*;* 5.453 (Extraordinario).
- Crespo, C. (2002). *La noción de infinito a través de la historia*. En Crespo Crespo (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. (Vol 15, Tomo I, p. 529-534). México.
- Cuestas, A. (2007). *El Proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo en estudiantes de economía: análisis de una innovación didáctica*. Tesis Doctoral presentada en el Programa de Doctorado en Didáctica de las Matemáticas, Departamento de la Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales de la Universidad Autónoma de Barcelona.
- D’Amore B. (1999). *Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull’apprendimento della matematica*.*L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 22A, 3, p. 247-276. [Un ampio sunto di questo articolo è stato pubblicato in: Jannamorelli B., Strizzi A. (eds) (1999). *Allievo,Insegnante, Sapere: dagli studi teorici alla pratica didattica*. Atti del 4° Seminario Internazionale di Didattica della Matematica, Sulmona 23-24-25 aprile 1999. Sulmona: Qualevita. 85-96. Un ampio sunto di questo articolo è stato pubblicato in lingua spagnola su: *Resúmenes de la XIII ReuniónLatinoamericana de Matemática Educativa*. Universidad Autonoma de Santo Domingo, Santo Domingo, República Dominicana, 12-16 luglio 1999, 27. Traduzione completa in lingua spagnola: *Laescolarización del saber y de las relaciones: los efectos sobre el aprendizaje de las matemáticas*. *Relime* (México D.F., México). 3, 3, 2000, p. 321-338].
- D’Amore B. (2000). *La Didáctica de la Matemática a la vuelta del milenio: raíces, vínculos e intereses*. Revista Educación Matemática. Vol. 12, Nº 1; p. 39 – 50.
- D’Amore B. (2011). *La didáctica del infinito matemático*. Sunto della Conferenza generale tenuta il 9 settembre 2011 al XXIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, promosso dalle Universdità Distrital, Nacional e Pedagógica de Bogotá. In: AA. VV. (2011). Memorias del XXIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, Bogotá, 8-10 septiembre 2011. CD. ISBN: 978-958-57050-0-5; p. 21 – 29.
- D’Amore B., Arrigo G., Bonilla E., Fandiño M., Piatti A., Rodriguez J., Rojas P., Romero J. y Sbaragli S. (2006). *El “sentido del infinito”*. Epsilon. Sevilla, España Vol. 22(2), Nº 65, p. 187 – 216.
- D’Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2005). *Historia y Epistemología de la Matemática como bases éticas universales. Un homenaje a Ubiratan D’Ambrosio*. Trabajo desarrollado en el ámbito del Programa de Investigación: «*Aspectos metodológicos (teóricos y empíricos) de la formación inicial y en servicio de los docentes de matemática de todo nivel escolar*». Universidad de Bologna (Departamento de Matemática). *Acta Scientiae*. [Ulbra, Canoa, Brasile]. Vol. 7, Nº 1, p. 7-16.
- D’Amore B., Fandiño Pinilla MI. (2001). *Matemática de la cotidianidad. Paradigma*. (Maracay, Venezuela). XXII, 1, p. 59-72.
- D’Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática.* México DF: Editorial Reverté.
- D’Amore, B. y Godino, J. (2007). *El Enfoque Ontosemiótico como un desarrollo de la Teoría Antropológica en Didáctica de la Matemática.* México. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Julio, año/vol. 10, numero 002; p. 191 – 218.
- De Faria, E. (2006). *Transposición didáctica: Definición, Epistemología, objeto de estudio*. Universidad de Costa Rica, Año 1, Número 2.

- Descartes, R. (1641). *Meditaciones Metafísicas*. Traducción de José Antonio Mígues. Edición electrónica disponible en la siguiente dirección electrónica www.philosophia.cl / Escuela de Filosofía Universidad ARCIS.
- Di Tada, E. (2006). *Los números transfinitos*. Universidad de Palermo. Italia, p.101 – 156.
- Fedriani E. y Tenorio A. (2010). *Matemáticas del más allá: el infinito*. Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Marzo 2010. Número 21, p. 37 – 58.
- Fernandez, C. (2010). *Análisis epistemológico de la secuencia numérica*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Versión impresa ISSN 1665-2436, Vol.13. Nº 1, México; p. 1 – 25.
- Fernández, J. (2011). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato respecto al concepto de límite finito de una función en un punto. Estudio exploratorio*. Trabajo de investigación tutelado se ha realizado en el seno del grupo de investigación Didáctica de la Matemática. Pensamiento numérico (FQM-193) de la Universidad de Granada perteneciente al Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía.
- Font, V. & Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao MatemáticaPesquisa*, *8* (1), 67-98.
- Font, V., Godino, J. y D`Amore, B. (2005). *Enfoque Ontosemiótico de las representaciones en educación Matemática*. Versión reducida del trabajo presentado en el Grupo de Trabajo DMDC en el IX Simposio de la SEIEM, Córdoba; p. 1 – 16. Versión ampliada disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/indice/eos.htm.
- Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2009) (en prensa). *Modelo para el análisis didáctico en educación matemática*. Infancia y Aprendizaje, 33 (2) (aceptado). Documento en línea disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/modelo_anadida_25junio09.pdf
- Fuentes S., y Oktaç A. (2011). *El infinito y niñ@s talento en matemáticas: Una mirada desde APOE*. XIII CIAEM-IACME (XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática). Recife, Brasil; p. 1 – 12.
- Garbin, S. (2005b). *¿Cómo piensan los estudiantes entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajesmatemáticos*. Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, volumen 8 (2) p. 169 – 193.
- Garbin, S. y Azcárate, C. (2001). *El concepto de infinito actual. Una investiugrgación acerca de las incoherencias que se evidencian en alumnos de bachillerato*. Revista SUMA, volumen 38, p. 53 – 67.
- Garcia, F. (2003). *Aquiles, la Tortuga y el Infinito*. Revista de Filosofía. ISSN: 0034-8244.Vol. 28, Núm. 2; p. 215 – 236.
- García, M. (2005). *Lecciones Preliminares de Filosofía*. Ediciones Universales. Bogotá – Colombia.
- Gascón, J. (2002). *El Problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de la Didáctica de las Matemáticas*. Trabajo realizado en el marco del proyecto BSO2000-0049 de la DGICYT "Matemáticas y Educación Matemática. ¿Hacia una futura convergencia?" en el ámbito del Congreso de la Real Sociedad Española de Matemáticas que se celebró en Puerto de la Cruz (Tenerife) entre el 27 de Enero y el 1 de Febrero, p. 1 – 19.
- Giordano, B. (1584/1972). *Del infinito universo e mondi. Iniciación filosófica.* Traducción del italiano, prólogo y notas de Cappellentti Angel J. Buenos Aires – Argentina. Editorial Aguilar Argentina S.A.
- Godino, J. (2012). *Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática*. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (p. 49 - 68). Jaén: SEIEM
- Godino, J., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M. (2006).*Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. México, año/vol. 9, número 001, p. 117 – 150.
- Gómez, M. (2002). *Estudio teórico, desarrollo, implementación y evaluación de un entorno de enseñanza colaborativa con soporte informativo (CSCL) para matemáticas.* Tesis presentada para optar al grado de Doctor en la Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Educación. Departamento de Didáctica Organización Escolar. ISBN: 84-669-2339-X.
- González, O. (2004). *El Cálculo infinitesimal Leibniciano: Una síntesis de las perspectivas de Brunschvicg e Isciguro*.Revista Signos Filosóficos vol. VI, núm. 11, enero – junio, p. 97 – 120.
- Larios, G. (2000). *Influencia del concepto metafísico de infinito en la matemática*. Tesis de Grado para optar por el Título: Licenciado en Filosofía y Educación. Universidad Francisco Marroquin. Guatemala.
- Lavine, S. (2005). *Comprendiendo el infinito*. Editorial: Fondo de Cultura Económica. México.
- Leibniz, G.W (1992). *Nuevos ensayos sobre el entendimiento humano*. Madrid. Alianza Editorial.
- Ley de Universidades (1970). Gaceta oficial de la República Bolivariana de Venezuela, 1.429. (Extraordinario), Septiembre 08.
- *Ley Orgánica de Educación* (2009**)**. Gaceta Oficial, República Bolivariana de Venezuela Nº 5929 Extraordinario del 15 de agosto.
- Marías, J. (1971). *Introducción a la filosofía*. Madrid – España. Ediciones Castilla, S. A.
- Meliujin, S. (1960). *El problema de lo Finito y lo Infinito*. Editorial Grijalbo, S.A. México.
- Mondolfo, R. (1956). *El genio helénico*. Buenos Aires – Argentina. Editorial Columbia.
- Ortiz, J. (1994). *El concepto de infinito*. Asociación Matemática Venezolana. Boletín 1(2), p. 59 – 81.
- Panizza, M. (2003). *Conceptos básicos de la Teoría de las situaciones Didácticas*.Documento en línea disponible en:http://www.crecerysonreir.org/docs/matematicas_teorico.pdf
- Pareja, D. (2007). *Breve historia de un gran problema. La hipótesis del continuo*. Notas para una charla, presentada en el Seminario Interno de Matemáticas en la Universidad del Quindío. Marzo 6, p. 1 – 14.
- *Revista Matemática Digital*. Nº 18, abril 2009, sección currículo y matemática, disponible en www.mendomatica.mendoza.edu.ar.
- Rubio, G., Font, V. y Planas N. (2008). *Análisis Didáctico, una mirada desde el enfoque Ontosemiótico*.Documento en línea disponible en: http://pagines.uab.cat/nuria_planas/sites/pagines.uab.cat.nuria_planas/files/PERU2008.pdf
- Salat, R. (2011). *El infinito en matemática*. NÚMEROS Revista de Didáctica de las Matemáticas. ISSN: 1887 – 1984. Vol. 77, p. 77 – 85. Disponible en http://www.sinewton.org/numeros.
- Tall, D. (1986). Using the computer to represent calculus concepts. *Recueil des Textes et Comptes Rendus*, pp. 238-264. Le IVème École d'Été de Didactique des Mathématiques, Orleáns (sesión plenaria).
- Tall, D. (1995). *Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical*. Thinking. Plenary lecture, *Proceedings of PME 19*, Recife (Brasil).
- Tall, D. (2001). *Natural and Formal Infinities*.Educacional Studies in Mathematics 48 (21, 3), p. 199 – 238.
- Tall, D.O & Vinner, S. (1981). *Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity*. Educational Studies in Mathematics, 12, p. 151- 169.
- Valdivé y Garbin (2008). *Estudio de los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal*. Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, volumen 11 numero 3 p. 413 – 450.
- Valdivé, C. (2008). *Los infinitesimales en el Cálculo: Un punto de vista sistémico*. EDUCERE. Artículos arbitrados. ISSN: 1316 – 4910. Año 12, Nº 42. Julio - Agosto - Septiembre, p. 531 – 538.
- Vargas, I. (2000). *Didáctica I de la matemática*. U.M.C.E. Departamento de Matemática. España, p. 1 – 12.

Continúa en el próximo número…

INTERPRETACIONES GENERADAS EN LA PRAXEOLOGÍA DE LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS DE LAS LEYES DE INFERENCIA POR ESTUDIANTES CURSANTES DE LA ASIGNATURA LÓGICA MATEMÁTICA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN DE LA UNIVERSIDAD DE CARABOBO. (ENTRADA 6a).

Por: Dra. EINYS FERNÁNDEZ

Tomado de:

Interpretaciones generadas en la praxeología de las representaciones semióticas de las leyes de inferencia por estudiantes cursantes de la asignatura Lógica Matemática de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo. (Entrada 6a). Capítulo IV: Análisis de los datos. Pp. 63-157. Tesis de Maestría. Universidad de Carabobo. Facultad de Ciencias de la Educación. Bárbula, 2012.

Índice:

PARTE II "PRUEBA OBJETIVA CON ITEMS DE OPCIÓN MÚLTIPLE"

DIMENSIÓN: Conceptual

CRITERIO: Reconoce, Diferencia, Explica e Interpreta la Representación Mental de las Leyes de Inferencias expresadas a través de Representaciones Semióticas.

A continuación se presentan los siguientes ítems para respuestas de selección simple, seleccione la opción que usted considere correcta en función de los conocimientos que domine acerca de las leyes de Inferencias y explique desde un punto de vista social qué significado tiene para usted la opción que indico.

Ítem n° 13

ALTERNATIVA CORRECTA D

13. De las siguientes leyes de Inferencias dadas, cuál de ellas es la representación semiótica de la Ley del Modus Ponendo Ponens

a) $\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\quad -q} \\ p \end{array}$ b) $\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{\quad -q} \\ -p \end{array}$ c) $\begin{array}{l} p \\ \underline{q} \\ p \wedge q \end{array}$ d) $\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{p} \\ \quad q \end{array}$

¿Por qué? ____

TABLA Nº 15 "Distribución de Frecuencia de la diferenciación de la Ley"

Tabla nº 15-A

	Alternativas					
Opción	A	B	C	D	N.R	Total
f	26	11	0	102	23	162
%	16	6.8	0	63	14	100

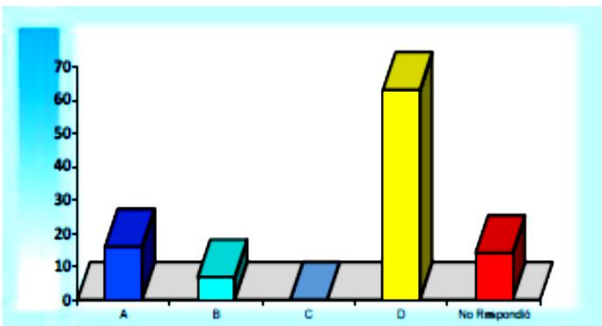
INFORMACIÓN RECOPILADA POR LA AUTORA (2012)

Tabla nº 15-B

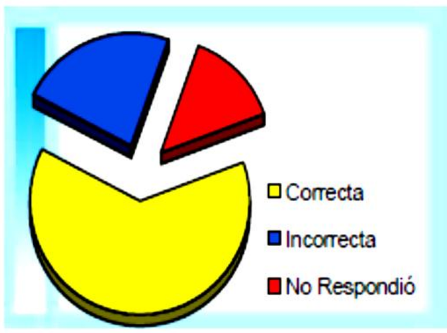
	Respuestas			
Opción	C	I	N.R	Total
f	102	37	23	162
%	63	23	14	100

INFORMACIÓN RECOPILADA POR LA AUTORA (2012)

Gráfica n° 14-A



Gráfica n° 14-B



INTERPRETACIÓN:

A través del presente ítem se pretendía verificar qué porcentaje de encuestados lograban distinguir la Ley del Modus Ponendo Ponens a través de diferentes alternativas presentadas mediante representaciones semióticas de diversas leyes, obteniendo así que el 63% de los sujetos lograron reconocerla. Sin embargo, un 23% tuvieron confusiones ya que un 16% consideró que era la opción A, otro 6,8% que era la opción B y un 14% prefirieron no dar respuesta alguna debido a las diferentes dudas que se les presentaron. Al respecto, Duval (1999) indica que toda confusión entre el objeto y su representación provoca en un plazo más o menos amplio, una pérdida de la comprensión, por lo que los conocimientos adquiridos se hacen rápidamente inutilizables por no recordarlos o porque son representaciones inertes que no sugieren ninguna transformación productora.

TABLA Nº 16 “Distribución de Interpretación de la Ley”

SUJETO Nº	DESCRIPCIÓN DE LAS EXPLICACIONES Y/O INTERPRETACIONES
1	Tengo una formula proposicional condicional, me encuentro con el antecedente y me da como resultado el consecuente
2	Tengo una formula condicional con antecedente p y consecuente q me da como resultado el consecuente
3	Porque tiene el conectivo condicional se van los antecedentes también porque son de igual signos, se va el conectivo y como respuesta da el consecuente “que es el que queda”
4	Porque se representa con la formula
5	Porque está formada por una formula condicional me encuentro con el antecedente y me da como resultado el consecuente
6	Tengo una formula condicional me encuentro con el antecedente y me da como resultado el consecuente
7	Porque tengo una formula condicional, me encuentro con el antecedente y me da como resultado el consecuente
8	Porque me encuentro con el antecedente y me resulta o me da el consecuente
9	Porque siempre se toma la segunda variable
10	Porque nos encontramos con el antecedente y nos va a dar el consecuente
11	Porque tengo una formula condicional me encuentro con el antecedente y me da como resultado el consecuente
12	Porque la ley del Modus Ponendo Ponens dice que si tengo una formula condicional que se encuentra con el antecedente me da como resultado el consecuente
13	Así la recuerdo porque a diferencia de Tolleus el resultado no cambio de positivo a negativo
14	Porque siempre busca la variante derecha
15	No se expresar gramaticalmente, conozco la ley del Modus Ponendo Ponens
16	Ley del Modus Ponendo Ponens dice que se elimina la premisa que se repita con el mismo signo y el símbolo debe ser un condicional
17	Porque la ley del Modus Ponendo Ponens indica que para extraer una variable (en el caso $p \rightarrow q$) se necesita el condicional ($\rightarrow$) y una variable positiva (p) para extraer q
18	Es una de las leyes de inferencia que se utiliza para obtener el consecuente
19	Porque el signo es el condicional y la ley del Modus Ponendo Ponens da de resultado un consecuente
20	Esta ley usando el condicional nos dice que para extraer la premisa q debemos eliminar la premisa p añadiéndola otra vez
21	Ley del Modus Ponendo Ponens está representada en la opción “d” porque nos da el resultado del consecuente
22	Porque me parece lo indicado
23	Porque están todas las variables afirmativas, pero también pueden estar todas las variables negadas
24	Al colocar antecedentes iguales, obtengo consecuente igual
25	Porque la ley de MPP dice que descartamos o eliminamos una porque si no hacemos esto por ende hacemos lo otro
26	Es un consecuente
27	Porque en un resultado la letra expresada es el consecuente
28	Porque es la ley que corresponde
29	Porque elimina el que le repite dejando el antecedente y trabaja con conjunción. Con el signo del mayor
30	Así está establecido
31	Se dice que al tener dos variables iguales con diferentes signos el resultado tiene que ser negativo siempre y cuando representado la otra variable redistinta llevara al final el signo negativo
32	Por el símbolo
33	Para usar esta ley se debe tener el símbolo (v) junto con otra premisa inferior de la misma letra de arriba
34	Porque el Modus Ponendo Ponens dice que si tu quieres el antecedente o el consecuente entonces tu puedes poner las premisas con el signo contrario y poner abajo la que desea
35	Porque se coloca igual el antecedente para obtener igual el consecuente
36	Solo sirve para conseguir e consecuente y trabaja con condicional
37	Porque la ley del Modus Ponendo Ponens es una premisa entonces $\rightarrow$ Premisa para quitar la primera premisa y quede como respuesta la segunda
38	En el modus ponendo pones se eliminan los antecedentes y queda el consecuente
39	Porque niega al consecuente para obtener el antecedente igualito
40	La ley del modus ponendo pones es utilizada para obtener la o las premisas

	→ Premisa para quitar la primera premisa y quede como respuesta la segunda
38	En el modus ponendo pones se eliminan los antecedentes y queda el consecuente
39	Porque niega al consecuente para obtener el antecedente igualito
40	La ley del modus ponendo pones es utilizada para obtener la o las premisas
41	El antecedente esta positivo y da como resultado un consecuente positivo, el MPP se representa con el condicional
42	Sería la opción "d" porque si estoy en Caracas por un ejemplo entonces vivo en Caracas omito que estoy en Caracas porque vivo en Caracas.
43	La opción "a" es de la ley del modus ponendo ponens ya que tiene el conector v, y la segunda "q" esta negada
44	Porque a partir de un condicional se coloca el elemento igual que se quiere descartar y como resultado se obtiene el elemento de antecedente como se quería con su mismo signo
45	La (a) solo sirve para conseguir el consecuente
46	Solo sirve para conseguir el consecuente
47	Esta ley se utiliza para obtener la premisa que necesita
48	Aquí se simplifica al que no necesita para obtener
49	Se coloca el antecedente igual y se obtiene el consecuente igualito
50	Porque según mis conocimientos la ley MPP indica que aplicándola su resultado va ser consecuente igual dejando al antecedente igual
51	Porque él se coloca el antecedente para conseguir el consecuente
52	Solo sirve para conseguir el contenido
53	Porque primero están los antecedente y luego el consecuente y tiene el condicional
54	Este es su símbolo (→) "condicional", aparte que este trabaja con el consecuente
55	Porque la ley del MPP nos dice que para conseguir el consecuente igualito debemos poner el antecedente igual
56	Porque el conector es condicional y el consecuente queda como resultado
57	Porque la ley del modo ponendo ponens es la única ley que permite hallar el consecuente teniendo antecedentes iguales
58	Puede obtener el consecuente igual
59	Porque sus variables son positivos y además la letra P es cancelada con su consecuente y da como resultado la variable q positivo
60	Porque la ley de Modus Ponendo Ponens nos dice que si tengo antecedentes iguales el consecuente me queda igual

INFORMACIÓN RECOPILADA POR LA AUTORA (2012) TRANSCRIPCIÓN FIEL Y EXACTA DE LA INFORMACIÓN DADA POR LOS ENCUESTADOS.

Tabla nº 16-A

	Respuestas		
Opción	E	N.E	Total
f	60	102	162
%	37	63	100

INFORMACIÓN RECOPILADA POR LA AUTORA (2012)

Gráfica n° 15

INTERPRETACIÓN:

Se puede evidenciar que el 63% de los sujetos encuestados se abstuvieron a aportar algún tipo de interpretación acerca de la Ley del Modus Ponendo Ponens, mientras que el otro 37% redactaron sus explicaciones sobre lo que ellos tienen como representación mental del Modus Ponendo Ponens.

En este orden de ideas, se presentaron diferentes descripciones incoherentes en la redacción de las ideas que manejan los estudiantes, opiniones subjetivas, razonamientos mentales incorrectos desprovistos de fundamento teórico, no asimilaron el nuevo conocimiento desde un punto de vista social, demostrando y confirmando así la carencia de un vocabulario rico y extenso para redactar y expresar sus propias ideas cognitivas de la ley (ver interpretación del sujeto nº 15); por otro lado, existe la carencia de un análisis abstracto para discernir el orden lógico de la representación semiótica de la ley del Modus Ponendo Ponens.

Además, esta última porción de la muestra revelaron tener en sus estructuras cognitivas un errado concepto semántico del objeto en estudio; otros confundieron el conector condicional con la conjunción o en su defecto con la disyunción inclusiva; también mostraron desorientaciones al momento de confundirla con las Leyes: Modus Tollendo Ponens, Modus Tollendo Tollens y Simplificación. Es importante recalcar, lo que dice Duval (1999) al expresar que no existe la noesis sin la semiosis; puesto que la primera determina a la segunda; es decir, para poder plasmar a la semiosis en un proceso de razonamiento lógico correcto, es imprescindible que los actos cognitivos que maneje el individuo sean los apropiados, de lo contrario, reflejará en la praxeología diferentes errores.

En otro orden de ideas, se encontró que los discentes denominaron a las leyes como formulas lógicas, las cuales fueron comparadas como cajas en la que se encuentras elementos y de los que obtendrán otro resultado (ver interpretación del sujeto nº 1); de lo anterior se deduce que tales personas poseen una interpretación mental de la ley en estudio pero usan palabras del lenguaje científico y común que les facilitó a los mismos comprender y explicar sus representaciones mentales.

Por su parte, se encontró en las descripciones de los estudiantes que indicaron que las Leyes de Inferencias dan resultados, más no las interpretan como aquellas equivalencias lógicas que permiten deducir otras expresiones lógicas; en suma a esto, tienen como representaciones mentales que ellos se encuentran con fórmulas proposicionales, tal cual como si se estuviera interactuando en una relación biunívoca entre dos sujetos que mantienen una relación de toma y dame, o en otro caso encuentro y dame.

En virtud de lo anterior, se dedujo que hay sujetos que no poseen un vocabulario extenso de términos que les faciliten redactar sus interpretaciones ya que se observó el uso de expresiones lingüísticas como:"*así lo recuerdo, me parece lo indicado, es un consecuente, así está establecido, por el símbolo, es lo que corresponde, siempre se busca la variante derecha, es utilizado para obtener la premisa, no se expresar gramaticalmente, se simplifica al que no se necesita, sirve para conseguir el consecuente o contenido*". Duval (1999), indica que todo procedimiento intelectual, ya se trate de un razonamiento, una explicación, una descripción, un cálculo, una resolución de problemas implican que las representaciones semióticas sean convertidas para poder ser tratadas; esta coordinación indicará las capacidades para poder escribir textos coherentes, organizados y argumentados.

Ítem n° 14	14. De las siguientes leyes de inferencias dadas, cuál de ellas es la representación semiótica de la Ley del Modus Tollendo Tollens
ALTERNATIVA CORRECTA B	a) $\dfrac{p \vee q \quad -q}{p}$ b) $\dfrac{p \rightarrow q \quad -q}{-p}$ c) $\dfrac{p \quad q}{p \wedge q}$ d) $\dfrac{p \rightarrow q \quad p}{q}$ ¿Por qué? ______________________

TABLA N° 17 "Distribución de Frecuencia de la diferenciación de la Ley"

Tabla nº 17-A

Opción	Alternativas					
	A	B	C	D	N.R	Total
f	16	105	0	18	23	162
%	9,9	65	0	11	14	100

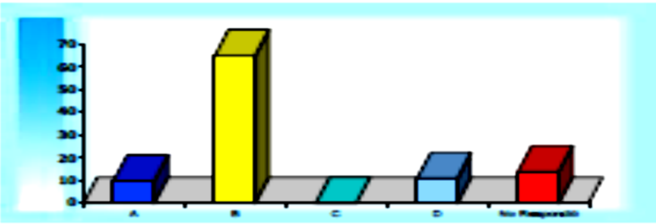
INFORMACIÓN RECOPILADA POR LA AUTORA (2012)

Tabla nº 17-B

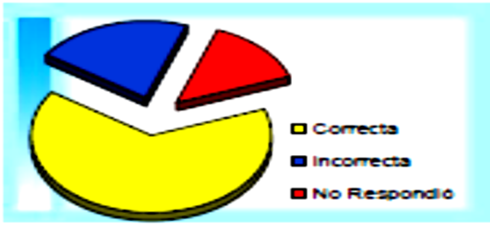
Opción	Respuestas			
	C	I	N.R	Total
f	105	34	23	162
%	65	21	14	100

INFORMACIÓN RECOPILADA POR LA AUTORA (2012)

Gráfica n° 16-A



Gráfica n° 16-B



INTERPRETACIÓN:

El 65% de los encuestados reconocieron la representación semiótica de la Ley del Modus Tollendo Tollens, otro 23% no la diferenciaron puesto que no dieron respuesta alguna y un 21% tampoco la distinguieron; ya que el 9,9% de estos últimos indicaron que la opción correcta era la A y el otro 11% restante pensó que la válida era la opción D, en tal sentido la confundieron con el Modus Tollendo Ponens y Modus Ponendo Ponens, respectivamente. En este orden de ideas, Duval (1999) indica que los aciertos o fracasos en los cuestionarios reflejan la existencia de congruencia o no de los diferentes cambios de sistemas semióticos de representación que pueda hacer el individuo durante su actividad de estudio.

TABLA Nº 18 "Distribución de Interpretación de la Ley"

SUJETO Nº	DESCRIPCIÓN DE LAS EXPLICACIONES Y/O INTERPRETACIONES
1	Tengo una formula condicional me encuentro con el consecuente negado me de cómo resultado el antecedente negado
2	" Tengo una formula condicional con el antecedente o el consecuente negado y me de como resultado el consecuente y el antecedente tal cual como esta
3	La letra "B" porque los consecuentes tienen "diferentes signos" y el conectivo del condicional entonces se eliminan los consecuentes y queda el consecuente con el signo del consecuente (negativo)
4	El Modus Tollendo Tollens se utiliza en esta fórmula y así se resuelve
5	La letra "B" porque está formada por una formula condicional, me encuentro con el consecuente negado y me da como resultado el antecedente negado

6	Tengo una formula condicional me encuentro con el antecedente o el consecuente negado y me da como resultado el consecuente o el antecedente negado
7	Porque tengo una fórmula de condicional, me encuentro con el antecedente o consecuente negado y me da como resultado el antecedente o consecuente negado
8	Porque me encuentro con el consecuente y me da el antecedente negado
9	Por que siempre se toma la primera variable con la diferencia que esta negada
10	Porque nos encontramos con el consecuente negado y nos da como resultado el antecedente negado
11	Tengo una formula condicional me encuentro con el consecuente negado y me da como resultado el antecedente negado
12	El resultado si cambia (+ → -)
13	Porque siempre busca la variante izquierda
14	Tengo una formula condicional me encuentro con el consecuente negado y me da como resultado antecedente negado
15	Así está establecido
16	Conozco la ley de Modus Tollendo Tollens
17	De igual manera por el símbolo
18	Porque el Modus Tollendo Tollens dice que se puede el opuesto antecedente
19	Para utilizar esta ley se debe tener el símbolo (→) con una premisa inferior igual a una de las de arriba pero de una forma negada si la de arriba es positiva o positiva si la superior es negada
20	Se observa dos variables una de ellas iguales pero con signo diferente, estamos buscando que la variable "p" quede positiva y por eso unimos las variables con el signo de la conjunción para así sea la ley MTT
21	Porque trabaja con "entonces" → y toma el consecuente
22	Ley que está en el libro
23	Porque el resultado expresado es el opuesto del antecedente
24	Opuesto antecedente
25	mtt dice que tiene que ser negativa las variables y el resultado principal por ende sino hacemos uno no hacemos el otro
26	Obtengo opuesto del antecedente, con opuesto de consecuente
27	Porque las variables poseen tanto afirmación como negación
28	Porque pienso que es la correcta
29	La ley del Modus Tollendo Tollens está representada en la opción "b" porque nos da como resultado el resultado opuesto de la variable buscada
30	Cuando el condicional esta ley dice que para extraer la negación de p es necesario colocar la negación de q para extraer la premisa
31	b) por qué el signo es un condicional y la ley dice que el resultado es el antecedente pero de forma opuesta
32	Es una de las leyes de inferencia que se utiliza para obtener antecedente
33	Esta ley se usa para extraer variables de forma negativa para ello se necesita una variable de signo opuesto (en el caso de p→q) de -q para extraer –p
34	La ley de Modus Tollendo Tollens establece que se elimina la premisa (letra) que se repite con diferente signo y cuyo símbolo central sea un condicional
35	Porque la ley de modus tollendo toollens dice que si tengo una formula condicional y me encuentro con el consecuente negado me da como resultado el antecedente negado
36	Porque se niega el consecuente para obtener el opuesto del antecedente
37	Se niega el antecedente o el consecuente, para que el que no se niegue quede igual y trabaja con disyunción
38	B) cambia las dos variables para que queden negativas
39	Porque se necesitan dos iguales para sacar el opuesto
40	En el modus tollendo tollens se eliminan los consecuentes y queda el antecedente negativo

41	Le da el antecedente igualito para obtener el consecuente igualito
42	Dicha ley es utilizada para encontrar el opuesto de la variable que se necesita
43	Se representa con el condicional y está el consecuente negativo y el antecedente también negativo
44	Opción "B" porque si Juan fuera mi hermano entonces viviríamos juntos pero no es mi hermano por lo tanto no vivimos juntos
45	La poción "D" es de la ley del modus tollendo tollens ya que tiene el conector →, y las "p" al estar arriba y abajo las dos positivas
46	Porque el elemento que se busca dejar solo, primeramente en el antecedente tiene un signo y en el resultado (procedente) tiene el signo contrario
47	La (a) se niega uno y el otro queda igual
48	Se niega uno y el otro queda igual
49	Esta fórmula se utiliza para buscando el opuesto de la variable que necesita eliminar en este caso q y cambio de signo la otra variable si esta positiva cambia a negativo
50	Dice que cambian los signo de negativo a positivo o positivo a negativo pero siempre el que se va a extraer es el consecuente
51	Porque al aplicar la ley MTT el resultado va ser opuesto del antecedente negado al consecuente
52	Se coloca el consecuente para conseguir el antecedente cambiándole su valoración, es decir, si esta positivo pasa a negativo
53	Se elimina los que son iguales es la (d)
54	Esta el opuesto de antecedente y la variable del condicional
55	El trabaja con el antecedente, si este es el signo "+" el resultado es "-" y viceversa
56	La ley del MTT nos dice que se consigue el opuesto del antecedente, colocando el opuesto del consecuente
57	Porque el conector es condicional y el antecedente queda como resultado
58	Porque es la ley que permite hallar el opuesto del antecedente, teniendo la negación del consecuente
59	Obtengo el opuesto del consecuente es decir puedo obtener todo lo contrario a la respuesta positiva que tengo
60	Sus variables son negativos, a pesar que su letra q es positiva para cancelarla se busca su antecedente una –q y su resultado es negativo o lo que se busca
61	Esta ley nos dice que si tengo consecuentes distintos el antecedente me queda igual solo que el signo contrario a lo que marque el antecedente

INFORMACIÓN RECOPILADA POR LA AUTORA (2012) TRANSCRIPCIÓN FIEL Y EXACTA DE LA INFORMACIÓN DADA POR LOS ENCUESTADOS.

Tabla nº 18-A

Opción	Respuestas E	N.E	Total
f	61	101	162
%	37,6	62,4	100

INFORMACIÓN RECOPILADA POR LA AUTORA (2012)

Gráfica n° 17

INTERPRETACIÓN:

Se puede evidenciar que sólo el 37,6% de la discentes encuestados aportaron sus interpretaciones acerca de la representación mental que tiene en sus estructuras cognitivas en relación al objeto de estudio de la representación semiótica denominada Modus Tollendo Tollens; por otra parte la mayoría de los individuos conformada por el 62,4% no aportaron explicaciones ni ideas referenciales que induzcan a realizar deducciones de sus escritos en referencia a tal ley en disertación, de lo cual se deriva que esté último porcentaje de la muestra no tienen cognitivamente una sincronía entre las descripciones que puedan realizar con la representación semiótica y mental del objeto en estudio.

En virtud de lo anterior, se encontró entre las interpretaciones manifestadas por los estudiantes en sus diversas ideas referenciales que tienen del objeto en estudio, la presencia de un vocabulario pobre en palabras para redactar sus explicaciones, incoherencia en la estructura gramatical, inconsistencia de teoría para fundamentar sus explicaciones, ambigüedad en los conceptos aportados reflejando que poseen una representación mental inadecuada; además, confundieron la ley del Modus Tollendo Tollens con la del Modus Ponendo Ponens y Modus Tollendo Ponens, en relación directa a esta última consideraron correctamente que con una disyuntiva se puede plantear la veracidad contraria del antecedente o consecuente, según sea el caso para así obtener el afirmativo de la otra, más sin embargo, se estaba era en presencia de seleccionar la Ley del Modus Tollendo Tollens y no la del Modus Tollendo Ponens; a su vez consideraron que la ley es útil para obtener el consecuente, mientras que otros se orientaron por los signos que poseen las variables y obviaron conectores, y viceversa.

En este orden de ideas, también se presentó que denominaron al antecedente como una variante, no realizaron completa la interpretación dejando así la idea abierta, generando dudas en la investigadora en referencia a la interrogante ¿a qué se refería el encuestado? (ver sujetos nº 38 y nº 39), consideran que el antecedente siempre quedará negativo, obviando así la posibilidad de poder suceder lo contrario; mientras que para otros la ley permite obtener el opuesto de la variable que se necesite; además, también la confundieron con el Modus Ponendo Ponens (ver sujeto nº 41).

También se evidenció que los estudiantes no tienen en cuenta el uso adecuado de los signos de puntuación para darle sentido, orden y coherencia a las representaciones mentales que pretendían reflejar, otro caso particular es que no saben diferenciar el "*porque*" que justifica del "*por qué*" de una pregunta (ver sujeto 31). Por otro lado, es importante destacar que muchos de los discentes mostraron apatía en sus escritos para argumentar sus conocimientos ya que alegaron expresiones lingüísticas tales como: "*ley que está en el libro, porque pienso que es la correcta, opuesto antecedente, se niega uno y el otro queda igual y se eliminan los que son iguales*".

En esta diversidad de interpretaciones que provienen de las representaciones mentales de los estudiantes también se evidenció la combinación errada en la redacción de las ideas (ver sujeto nº 51) y debido a esta ausencia en el dominio de la teoría se presentan ideas vagas como la reflejada por el individuo nº 53 tabulado en la tabla nº 18. En relación a esto, Duval (1999) señala que la comprensión conceptual, la diferenciación y el dominio de las diferentes formas de razonamiento, las interpretaciones de los enunciados, están íntimamente ligados a la movilización y a la articulación cuasi-inmediatas de algunos registros de representación semiótica.

Ítem n° 15	**15. De las siguientes leyes de inferencias dadas, cuál de ellas es la representación semiótica de la Ley del Dilema Constructivo**
ALTERNATIVA CORRECTA B	a) $\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q \to r} \\ p \to r \end{array}$ b) $\begin{array}{l} p \to q \\ r \to s \\ \underline{p \vee r} \\ q \vee s \end{array}$ c) $\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p \qquad} \\ \qquad q \end{array}$ d) $\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\quad -q} \\ p \end{array}$ ¿Por qué? ______________________

TABLA Nº 19 "Distribución de Frecuencia de la diferenciación de la Ley"

Tabla nº 19-A

	Alternativas					
Opción	**A**	**B**	**C**	**D**	**N.R**	**Total**
f	6	132	0	0	24	162
%	3,7	81	0	0	15	100

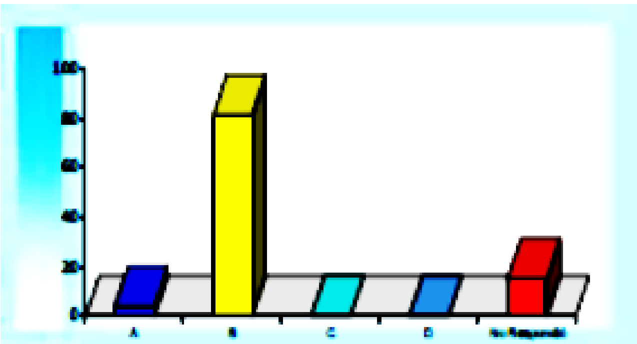
INFORMACIÓN RECOPILADA POR LA AUTORA (2012)

Tabla nº 19-B

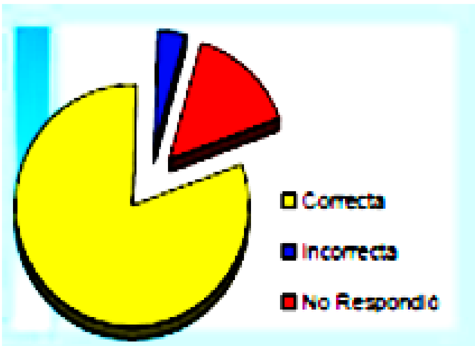
	Respuestas			
Opción	**C**	**I**	**N.R**	**Total**
F	132	6	24	162
%	81	3,7	15	100

INFORMACIÓN RECOPILADA POR LA AUTORA (2012)

Gráfica n° 18-A



Gráfica n° 18-B



INTERPRETACIÓN:

Del 100% de los encuestados en el presente ítem se encontró que el 81% distinguieron la representación semiótica de la ley de inferencia denominada Dilema Constructivo; donde también se observó que otro 3,7% de los sujetos no diferenciaron la representación, debido a que un 3,7% consideró que la opción correcta es la A, confundiéndola así con la ley de Transitividad, mientras que el 15% restante no reflejaron respuesta alguna, mostrando así un vacío de conocimientos e ideas referenciales en sus estructuras cognitivas que les permitan indicar una alternativa correcta e incorrecta. En este sentido, Duval (1999) indica que no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación.

TABLA Nº 20 "Distribución de Interpretación de la Ley"

SUJETO N°	DESCRIPCIÓN DE LAS EXPLICACIONES Y/O INTERPRETACIONES
1	Tengo dos formulas condicionales y una formula de disyunción inclusiva con la característica que es formada por los antecedentes de las formulas condicionales y me da como resultado una formula de disyunción inclusiva formada por consecuentes de los condicionales
2	Tengo 2 formulas condicionales y una de disyunción inclusiva con la característica que es el antecedente de las formulas condicionales y me da como resultado una formula de disyunción con el consecuente de las formulas condicional
3	La letra "B" porque tenemos tres premisas entonces se agarra el consecuente de las dos primeras premisas con el conectivo de la tercera premisa
4	La letra "B" porque está formada por dos formulas condicionales y una formula de disyunción inclusiva y me da como resultado una formula de disyunción inclusiva con la característica que está formada por los consecuentes de las formulas condicionales
5	Tengo dos formulas condicionales y una formula de disyunción inclusiva formada por los antecedentes de las formulas condicionales y me da como resultado una formula de disyunción inclusiva formada por los consecuentes de las formulas condicionales
6	Si se tiene dos formulas condicionales y una de disyunción inclusiva conociendo los antecedentes de las primeras formulas me da como resultado la formula de disyunción inclusiva formadas con las variables de los condicionales
7	Para sacar la tercera columna se toman las primeras variables pero en disyunción y el resultado será las segundas variables de las dos primeras columnas pero en disyunción
8	Porque una tercera formula es creada por los antecedentes de las formulas condicionales y el resultado es creado por los consecuentes de dichas formulas
9	Si tengo 2 premisas con condicional y todas son diferentes, y una premisa que trabaje con v tengo un dilema constructivo
10	Porque es la única ley a utilizar de tres variables
11	Aplicando esta ley puedo obtener un resultado obviando a la demás variables
12	Porque es la ley que tiene 2 condicional y una disyunción, y que para obtener una tercera premisa se toman los 2 antecedentes y para una conclusión final se toman los 2 consecuentes con el conector de la disyunción
13	Porque se eliminan las dos "p" antecedente y una r antecedente y otra consecuente. Y queda la q consecuente y s consecuente
14	Porque si nos dan 3 premisas, las 2 primeras con condicional y la tercera con disyunción inclusiva, de la cual la premisa tiene los dos antecedentes de las dos primeras premisas, entonces sacamos la cuarta premisa que sería con disyunción inclusiva, y quedaría como resultado las dos consecuentes de las 2 primeras
15	Para que esta pueda existir es necesario que estén los siguientes símbolos (→, →, v), se colocan con el símbolo en la tercera fila las letras que están en la primera columna y el resultado vendría siendo las dos letras que están después de los condicionales con el símbolo (v)
16	Porq' tenemos dos variables de condicional (→) y una (v)
17	Le resultado son los dos primeros consecuentes
18	Debe haber una secuencia de dos condicionales y una disyunción exclusiva; donde vamos a tener como resultado a q v s que son valores del consecuente
19	Porque para mi es como simplificar una transitividad
20	En esta ley se estrae las dos primeras del antecedente

21	Porque hace como modo de simplificación de las variables repetidas y obtiene las variables que no son comunes y queda el conector de D.I
22	El resultado son los dos primeros consecuentes
23	La (b) el resultado son los dos primero consecuente
24	Se basa es una especie de simplificación que consiste en disolver dos condicionales y una disyunción para dejar como resultado lo esperado uno de los elementos de un condicional y uno de la disyunción con su mismo signo
25	La opción "A" es de la ley dilema constructivo ya que la "q" esta, esta abajo y arriba se cancela y queda p⟶r
26	Opción B porque nos presentan 3 formas de ver distintas entonces ó es una ó es otra
27	Esta con dos condicional
28	En el dilema constructivo se eliminan los antecedentes y los consecuentes iguales
29	Es la B:
30	El resultado son los 2 primeros consecuentes y trabaja con 2 condicional y una disyunción
31	Porque la ley de dilema constructivo dice que si tengo 2 formulas condicionales y una de disyunción inclusiva formada por los antecedentes, de la dos formulas condicionales me da como resultado una formula de disyunción inclusiva formada por los consecuentes de las dos formulas condicionales
32	Es la ley que trabaja con dos (2) condicional y una (1) disyunción inclusiva. En esta ley en las dos primeras líneas se colocan las premisas en forma vertical y después en forma horizontal
33	Es la única que utiliza tres conectores
34	La (b) = da como resultados los consecuentes de la representación
35	Usando el condicional y la disyunción esta ley explica que si hay 4 premisas unidas por condicional y dos de ellas unidas por la disyunción automáticamente las otras dos también se une mediante la disyunción
36	La ley del dilema constructivo esta representada en la opción "b" porque nos da como resultado que q y s
37	Porque pienso que es la correcta
38	Ya que las cuatros primeras variables son diferentes, entonces se procede con esta ley del dilema constructivo
39	Por que el dilema constructivo es el único que trabaja con 3 premisas
40	Por que así me lo enseño la profe en el salón y así lo sé
41	Porque en su representación es la única que tiene dos condicionales y una disyunción inclusiva
42	Ley que le corresponde
43	Porque toma q v s porque son los únicos que se repiten y trabaja con la conjunción "v"
44	Como podemos observar en el ejercicios es la que tiene más variables y con ella podemos llegar a una conclusión, para así desarrollarla y tener una simplificación y aplicar las leyes que sean necesarios para obtener un resultado
45	Para usar esta ley se debe tener ⟶, ⟶, v
46	Porque así me lo enseñaron
47	Por el orden y símbolo de las premisas
48	Esa es la representación semiótica de la ley del dilema constructivo
49	Así está establecido

INFORMACIÓN RECOPILADA POR LA AUTORA (2012) TRANSCRIPCIÓN FIEL Y EXACTA DE LA INFORMACIÓN DADA POR LOS ENCUESTADOS.

Tabla nº 20-A

	Respuestas		
Opción	E	N.E	Total
f	49	113	162
%	30,2	69,8	100

INFORMACIÓN RECOPILADA POR LA AUTORA (2012)

Gráfica n° 19

INTERPRETACIÓN:

Al pedirles a la muestra encuestada que explicaran su entendimiento acerca de la representación semiótica de la Ley del Dilema Constructivo se obtuvo que sólo el 30,2% de los individuos lo hicieron, pero otro 69,8% no aportaron sus ideas acerca de la representación mental que poseen del objeto en estudio.

Entre las explicaciones que realizaron los discentes se hallaron descripciones incompletas, incoherencia en la redacción como *"puedo obtener un resultado obviando a las demás variables"*, *"porque hay dos condicionales y una disyunción inclusiva"*, no escribieron el nombre del conector sino que colocaron fue el signo de ellos, lo cual indica la inexistencia en sus estructuras mentales de dicho aspecto teórico, en otro caso particular confundieron la disyunción inclusiva con la exclusiva

Por otro lado, hubo conceptos aportados que no son claros presentando así ambigüedad e inconsistencia interna, carencia de conocimientos y dominio teórico para expresar sus ideas mentales las cuales se observaron a través de expresiones lingüísticas como las siguientes "*por el orden y símbolo de la premisa"*, *"así me lo ensenó el profe*", *"así me lo enseñaron*", *"así lo sé"*, *"es la ley que corresponcorresponde*", *"porque presentan tres formas distintas*, *"es una o es otra*".

En este orden de descripciones se tiene que otros estudiantes para identificar la ley sólo tomaron en cuenta a los conectores obviando así al antecedente y consecuente, a las premisas la denominan formulas con respecto al nombre del conector binario, consideraron que la conclusión son los consecuentes de las dos primeras premisas pero no hacen referencia al análisis de los conectores, para otros la conclusión se crean, sacan, disuelven o cancelan lo cual indica que no la comprenden como una deducción del estudio de las premisas previamente evaluadas .

Por otra parte, afirmaron que era la única ley en la que se usan tres (3) conectores y otros alegaron que son tres (3) variables no diferenciando así premisas de variables, usaron términos de otras leyes combinadas con el objeto de estudio (ver interpretaciones de los sujetos nº 19, nº 24 y nº 44) puesto que asumieron que el Dilema Constructivo era como una simplificación en una transitividad, confundieron la ley en disertación con la del Silogismo Hipotético, otros poseen en sus estructuras mentales que tal objeto en estudio se basa en eliminar antecedente y consecuente, a su vez plantearon que la ley era de acuerdo al resultado aportado más no explicaron el por qué, también se presentaron opiniones carentes de un razonamiento ya que dieron opiniones desprovistas de todo orden lógico donde se distinguen posturas subjetivas (ver sujeto nº 46).

En este sentido, Duval (1999) señala que todas las representaciones llamadas "externas" son representaciones producidas como tales por un sujeto o por un sistema en el que se encuentran la redacción de sus escritos, expresiones lingüísticas, símbolos, dibujos, entre otros, que le permiten al individuo reflejar sus ideas cognitivas y las cuales pueden efectuarse a través de la aplicación de un sistema semiótico, estas son por naturaleza denominadas representaciones semióticas; mas sin embargo, las representaciones internas son aquellas que pertenecen a un sujeto y que las mismas están en la mente del individuo, por lo que ellas sólo son comunicadas a otros a través de la producción de una representación externa.

Por otro lado, Duval (1999) plantea que tales representaciones semióticas sólo son accesibles a quienes conocen y dominan tal sistema y para que el individuo pueda comprender estos textos se deben basar en la segmentación del contenido en unidades y la recontextualización de las unidades segmentadas. Por tal razón, se refiere lo que Chevallard (1999) menciona y es que cuando toda actividad humana se describe a través de un modelo único denominado praxeología, y en la cuales se encuentra la tecnología, la cual no es más que aquel discurso racional sobre la técnica que permite justificar que es correcto el resultado y/o procedimiento, también se asume que tiene la función de exponer el por qué es correcta, de tal forma para hacerla inteligible y así asegurar que ella permite obtener lo pretendido.

REFERENCIAS:

- Chevallard, Y. (1999). ***El Análisis de las Prácticas Docentes en la Teoría Antropológica de lo Didáctico***. Vol. 19. Nº 12. pp. 221-266. Disponible: http://josedesktop.uacm.edu.mx/nolineal/libros/campomedio/El_analisis_de_las_practicas_docentes_en_la_teoria_antropologica_de_los_didactico.pdf [Consulta: 2009, Marzo 19].

- Duval, R. (1999). ***Semiosis y Pensamiento Humano***. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. Grupo de Educación Matemática. ISBN 958-8030-23-4. Traducción de Myriam Vega Restrepo. Cali-Colombia.

Continúa en el próximo número…

Las matemáticas como se pensaban en la Grecia antigua.

Los griegos vieron en esta disciplina la clave no solo para comprender el mundo, sino para alcanzar una verdad absoluta.

Versión del artículo original de ÁGATA A. TIMÓN

TOMADO DE: El País – España / Sección Café y Teoremas – 18 de abril de 2022

ESTATUA DE ARISTÓTELES EN ATENAS.CRÉDITO IMAGEN: GETTY IMAGES.

Ágata A. Timón García-Longoria es coordinadora de la Unidad de Cultura Matemática del ICMAT.

Café y Teoremas es una sección dedicada a las matemáticas y al entorno en el que se crean, coordinado por el Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMAT), en la que los investigadores y miembros del centro describen los últimos avances de esta disciplina, comparten puntos de encuentro entre las matemáticas y otras expresiones sociales y culturales y recuerdan a quienes marcaron su desarrollo y supieron transformar café en teoremas. El nombre evoca la definición del matemático húngaro Alfred Rényi: "Un matemático es una máquina que transforma café en teoremas". Edición y coordinación: Ágata A. Timón G Longoria (ICMAT).

A todos nos resultan familiares las matemáticas de la antigua Grecia. De hecho, si preguntásemos a una persona si conoce algún teorema matemático, lo más probable es que recuerde el teorema de Pitágoras. Sin embargo, lo que no mucha gente sabe es que las matemáticas griegas estaban profundamente influidas por el pensamiento mitológico, mágico y filosófico de la época.

Frente a las matemáticas desarrolladas por civilizaciones anteriores —como la fenicia o la egipcia—, los griegos vieron en esta disciplina la clave no solo para comprender el mundo, sino para alcanzar una verdad absoluta. Para ellos, las matemáticas estaban por encima de su evidente utilidad, eran una forma suprema de verdad y belleza. Esta idea aparece reflejada en los textos de Platón; para el filósofo, la geometría es "conocimiento de lo que siempre existe", y que "atraerá el alma hacia la verdad y formará mentes filosóficas que dirijan hacia arriba aquello que ahora dirigimos indebidamente hacia abajo". Este es uno de los textos recopilados en el libro *Mathematikós: Vidas y hallazgos de los matemáticos en Grecia y Roma*, publicado en 2021 por Alianza Editorial, y con los comentarios de Antoine Houlou-Garcia.

Además, los griegos realizaban consideraciones filosóficas sobre los objetos matemáticos. Debatían, por ejemplo, si el número uno era el ladrillo elemental que construye el mundo, o era el todo. En un fragmento de Las bodas de Mercurio y Filología, de Marciano Capela –también recogido en *Mathematikós*, como todos los referenciados en este artículo–, se reflexiona sobre ello: "Si la mónada constituye la forma inherente al ser primero, sea este lo que sea, y su prioridad pertenece a lo que denomina y no a lo denominado, es justo que la veneremos antes incluso que a lo que llamamos Principio. (…) es a partir de ella como se han creado los demás seres; ella sola contiene la semilla de todos los números (…) Es tanto la parte como el todo, ya que se la encuentra en cualquier cosa; no puede, en tanto que es anterior a los seres y que no va a desaparecer con su destrucción, dejar de ser eterna."

Las concepciones filosóficas que los griegos tenían de las matemáticas les hicieron negar su propia intuición. Así, aunque Jámblico ideó el cero, tal y como lo conocemos hoy en día, su propuesta cayó en el olvido, ya que era una idea que entraba en contradicción con la concepción de la realidad del momento. Aristóteles concluyó, en su texto Física: "no hay ninguna proporción entre la nada y el número (…) el vacío no puede tener proporción con lo lleno".

Sí manejaban la noción de infinito, aunque de manera diferente a la nuestra. Era una visión enumerativa, una cantidad que, aunque en cada instante es finita, crece indefinidamente. Aristóteles consideraba que "en general, lo infinito tiene tal modo porque lo que en cada caso se toma es siempre algo distinto, y lo que se toma es siempre finito, aunque siempre distinto".

Las ideas matemáticas también estaban impregnadas de significados mágicos: los números se convertían así en símbolos que representaban diferentes arquetipos: la feminidad, la masculinidad, la familia… Entre todos los números, el diez era considerado como número mágico. Los griegos sabían que era un número perfecto —es decir, es igual que la suma de sus divisores menores que él mismo— y encontraban una cualidad trascendental en su aparición recurrente en el mundo físico. En geometría, por otra parte, se consideraba que las dos formas más puras eran la línea recta y el círculo.

Las matemáticas aparecen, personificadas, en los mitos griegos. Por ejemplo, en otro fragmento de *Las bodas de Mercurio y Filología*, la Geometría nos habla de sus principios y de los de su hermana, la Aritmética, asegurando que ambos son incorpóreos. Sin embargo, los números y las líneas son "tanto corporales como incorporales, ya que lo que percibimos por la sola contemplación del espíritu es una realidad, y lo que vemos mediante los ojos es otra".

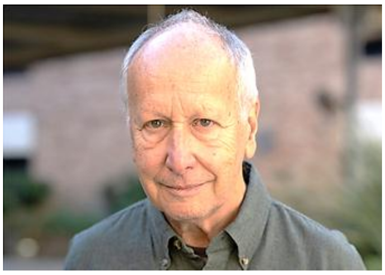
Es precisamente esta abstracción, que permite transformar un problema del mundo físico en otro referido a objetos matemáticos, lo que, según los griegos, proporciona a las matemáticas un valor superior al de las otras ciencias. En este sentido, Aristóteles afirmó: "Una ciencia como la aritmética, que no es ciencia de las propiedades en cuanto inherente a un sustrato, es más exacta y anterior a una ciencia cual la armonía, que es ciencia de propiedades inherentes a un sustrato".

GANADORES DEL PREMIO ABEL EN EL SIGLO XXI.

Año 2023: **Luis Caffarelli**

Por JUDITH DE JORGE

TOMADO DE: ABC – Madrid, 22 de marzo de 2023



EL MATEMÁTICO LUIS CAFFARELLI. CRÉDITO FOTO: N. ZUNK / U. TEXAS.

'Nobel de matemáticas' se le concedió a Luis Caffarelli por entender qué pasa en la frontera entre el agua y el hielo.

Se convierte este premio en un reconocimiento a su trabajo en el campo de las ecuaciones diferenciales, dando solución a problemas enquistados durante siglos.

El matemático argentino-estadounidense **Luis Caffarelli** (nacido en Buenos Aires el 8 de diciembre de 1948) ganó el Premio Abel 2023, considerado el 'Nobel de las matemáticas', por sus contribuciones para resolver los llamados **problemas de frontera libre**, aquellos en los que se describe la superficie de separación de un sistema dinámico que tiene dos fases, como el agua y el hielo o un frente atmosférico. El galardón, dotado con 676.500 euros, le fue anunciado el miércoles 22 de marzo de 2023 por la Academia de Ciencias y Letras de Noruega.

El premio, el mayor reconocimiento a una carrera matemática, «es muy merecido, muy justo, porque la obra de Luis Caffarelli es revolucionaria», afirmó a ABC el matemático Antonio Córdoba, catedrático de la Universidad Autónoma de Madrid, miembro del Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMAT) y colaborador de Caffarelli. «Tiene que ver con modelos matemáticos importantes para la física fundamental, y supone un gran paso adelante en problemas enquistados durante varios siglos, algunos desde la Ilustración», añadió.

Según explicó Córdoba, el matemático argentino recogió las aportaciones de la Escuela de Chicago (teoría de integrales singulares) y del estadounidense John Nash -cuya vida fue llevada al cine en 'Una mente maravillosa'- y el italiano Ennio de Giorgi (ecuaciones lineales, que describen cómo evoluciona una superficie de área mínima) para con esos mimbres dar «pasos de gigante».

Caffarelli, catedrático de la Universidad de Texas en Austin (EE.UU.), trabajó en los años 80 y 90 en la comprensión de ecuaciones diferenciales parciales para describir sistemas en los que hay una frontera que no está descrita de antemano. Un ejemplo es el estudio de la mezcla de agua y hielo, para comprender cómo es la superficie de separación entre las dos fases sólido-líquido. Otros ejemplos son un frente atmosférico, una aleación metálica o el llamado 'problema del obstáculo'. En este último una membrana elástica desciende hasta tocar un cuerpo apoyado en el interior de un recinto plano, de manera que al final del proceso la membrana queda pegada a los bordes del reciento. Habrá una zona de contacto en la que la membrana coincide con el obstáculo, mientras que fuera su forma debe satisfacer las ecuaciones de la elasticidad, ¿cómo es la curva frontera de la zona de contacto?

FRONTERA DESCONOCIDA

En todos estos casos, la frontera es desconocida y forma parte importante de la cuestión. «Aquí es donde sus contribuciones son fundamentales, marcó un antes y un después y construyó un edificio maravilloso. Entendió en profundidad la geometría de los problemas no lineales», señaló Córdoba sobre el trabajo de Caffarelli.

¿Y todo esto, para qué sirve? «Cuando en matemáticas se hace esta pregunta, hay que tener siempre mucha precaución. Normalmente, vamos unas décadas por delante de lo que luego va a ser el progreso tecnológico, como ocurrió con el ordenador de Turing. Pero, por ejemplo, describir la evolución de un frente atmosférico puede mejorar nuestras previsiones meteorológicas en el futuro, lo cual es interesante y muchas veces crucial», dijo Córdoba.

Caffarelli se ha convertido en el primer latinoamericano en recibir el Premio Abel, que se concede anualmente desde 2003 a uno o dos matemáticos. Hasta el momento, lo han obtenido 26 investigadores, entre los cuales solo hay una mujer, Karen Uhlenbeck, en 2019.

El argentino es miembro del Comité Externo de Asesoramiento Científico del ICMAT. El premio Abel se lo entregó en Oslo el rey Harald de Noruega, el 22 de marzo de 2023.

FÍSICOS NOTABLES

Ganadores del Premio Nobel en Física 2006:

John Cromwell Mather y George Fitzgerald Smoot

Versión de la Reseña Biográfica elaborada por CARLOS BENAVIDES MARTÍNEZ sobre John Cromwell Mather George Fitzgerald Smoot y George Fitzgerald Smoot. (Tomado de MCNBiografias.com).

John Cromwell Mather. Astrofísico y cosmólogo estadounidense nacido el 7 de agosto de 1946 en Roanoke, en el estado de Virginia. Premio Nobel de Física 2006 por sus investigaciones sobre los primeros instantes del Universo.

John Mather investigó la radiación de fondo de las microondas cósmicas y el origen del Universo, con ayuda del satélite COBE (Explorador del Fondo Cósmico), que la NASA lanzó al espacio en noviembre de 1989. Su colega George Smoot, doctorado también en Física en 1970 en Cambridge (Massachusetts), que trabajaba como catedrático en la Universidad de Berkeley obtuvo datos muy interesantes y centró su estudio en las mediciones de variaciones mínimas en las temperaturas de la radiación.

En 1964 estudió en el colegio Newton High School, de Newton, Nueva Jersey, en 1968 obtuvo la licenciatura de Física en el Swarthmore College. En 1974 se doctoró en Física en la Universidad de California, en Berkeley. En 1974-1976 cursó en la Universidad de Columbia, en el Instituto Goddard para estudios espaciales de la NASA, en Greenbelt. Trabajó como director de proyectos en el telescopio James Webb dirigiendo al equipo científico, también ha trabajado en equipos de trabajo y consejo para la Academia Nacional de Ciencias, para el Centro de Investigaciones Astrofísicas en la Antártida (CARA), y para el directorio del Proyecto Kepler, entre los más importantes.

Mather dirigió todo el proceso, detectó las irregularidades del Universo recién nacido, y llegó a confirmar la hipótesis de que éste se inició con una gran explosión (el Big Bang).

Sus investigaciones pusieron de manifiesto la pertinencia de la teoría del Big Bang, donde el Universo podría compararse con un cuerpo emisor de radiación y debió de alcanzar una temperatura de, al menos, 3.000 ºC en su momento inicial. Después, la radiación se debió enfriar gradualmente, a medida en que el Universo se expandía. Se considera que su temperatura se sitúa en torno a 2,7 ºK (aproximadamente -269,3 ºC) por encima del cero absoluto, lo que confirmaba la hipótesis que el Universo se habría creado hace unos 12.000 millones de años.

Mather empleó a más de 1000 personas para emprender este proyecto, que constituyó la primera misión cosmológica de la NASA, y su descubrimiento ha sido considerado uno de los hitos científicos del siglo XX. En su libro *The Very First Light*, Mather con su co-autor John Boslough relató el trabajo de su equipo para el público en general.

La radiación cósmica ya había sido descubierta en 1964 por Arno Penzias y Robert Wilson, gracias a lo cual fueron galardonados con el Premio Nobel de Física de 1978. Pero este nuevo descubrimiento realizado por John Mather y G. Smoot fue calificado por el físico británico Stephen Hawking como el más importante del siglo, tras su publicación en 1992. Mather y Smoot recibieron el Premio Nobel de Física 2006 por "*su mirada hacia la infancia del universo*" y por "*sus intentos por entender el origen de las galaxias y las estrellas*".

El descubrimiento permitió que posteriormente se realizaran observaciones más precisas de la radiación de fondo con satélites más sofisticados como el *WMAP*, telescopios terrestres y otros instrumentos. En 2007 Mather es mencionado en la popular revista *Time* como una de las 100 personas más influyentes en el mundo.

George Fitzgerald Smoot III. Astrofísico, nacido en Yukon, Florida, el 20 de febrero de 1945. Premio Nobel de Física 2006, compartido con *John Mather*, por sus investigaciones sobre los primeros instantes del Universo.

Smoot se graduó en la escuela Upper Arlington, Ohio, en 1962. Allí estudió matemáticas antes de cambiar por el Instituto de Tecnología de Massachussetts (MIT), donde obtuvo una doble titulación en Matemáticas y Física en 1966, y el doctorado en Física de Partículas en 1970. Luego se decidió por el estudio de la cosmología, estudió en el Laboratorio Nacional de Lawrence Berkeley, donde experimentó con balones estratosféricos para la posible detección de partículas de antimateria.

Trabajó, a partir de 1970, para el Lawrence Berkeley National Laboratory. Su nombre cobró prestigio en la comunidad científica internacional por su investigación sobre la radiación cósmica de fondo, remanente de la intensa temperatura producida en el estallido que dio origen al Universo, conocido como el Big Bang. Fue catedrático de la Universidad de Berkeley, también estuvo asociado al Centro de Astrofísica de Partículas y al Laboratorio de Ciencias del Espacio de la Universidad de California.

En 1989 Smoot participó, como director científico, en un proyecto de la NASA dirigido por su colega John Mather, Smoot y su equipo de la NASA enviaron en 1989 un satélite al espacio, el *COBE*, acrónimo de su nombre en inglés Cosmic Background Explorer (Explorador de Fondo Cósmico). A los pocos minutos de estar en el espacio, los sensores de abordo del *COBE* detectaron niveles de radiación cósmica, cuya existencia ya había sido descubierta en 1964 por Arno Penzias y Robert Wilson, por lo que fueron galardonados con el Premio Nobel de Física de 1978.

Durante los dos siguientes años, el equipo de Smoot centró su estudio en las mediciones de las mínimas variaciones en las temperaturas de la radiación, mientras que John Mather se responsabilizó de los análisis sobre las irregularidades o perturbaciones de fondo y de las microondas medidas por el *COBE*.

El 23 de abril de 1992 saltaron a la fama al ofrecer datos de las pequeñas variaciones en el fondo de la radiación cósmica, y la primera imagen del Universo con el aspecto que supuestamente tuvo hace millones de años, justo después del Big Bang. En la imagen se podían observar grumos de diferentes coloraciones debido a las diferencias de densidad en la radiación de fondo.

Smoot y Mather pudieron confirmar así la hipótesis de que el Universo se inició con una gran explosión, conocida como el Big Bang. Sus investigaciones pusieron de manifiesto que después del Big Bang el Universo podría considerarse como un "cuerpo emisor de radiación" que debió alcanzar una temperatura elevadísima. Luego, la radiación se fue enfriando gradualmente, en la medida en que el Universo se expandía, y la radiación de fondo puede calcularse como establecida alrededor de los 2,7 ºK (-269,3 ºC) por encima del cero absoluto.

El descubrimiento realizado por George Smoot y su colega John Mather fue calificado por el físico británico Stephen Hawking como el más importante del siglo. Las observaciones fueron la evidencia necesaria para demostrar el nacimiento del Universo. *"Si eres una persona religiosa, es como ver a Dios*", según sus palabras.

Este hallazgo permitió que posteriormente se realizaran observaciones más precisas de la radiación de fondo con satélites más sofisticados como el WMAP, telescopios terrestres, espaciales, y nuevos instrumentos de medición. Smoot ha continuado haciendo observaciones y análisis, ha sido colaborador de la 3era generación del satélite Planck, diseñador del SNAP, una sonda propuesta para mediciones de la materia oscura, y ha sido también asistente en el análisis de los datos del telescopio espacial Spitzer, a cargo de la misión de medir la radiación infrarroja de fondo.

Smoot fue autor de *Arrugas en el Tiempo*, un libro escrito en conjunto con el periodista Keay Davidson del *San Francisco Chronicle*, donde relata las peripecias sufridas por su equipo de investigación. El libro fue dado a conocer antes del anuncio formal de la NASA, por lo que el científico fue acusado por su colega Mather de haber buscado autopromoción.

John Mather, Premio Nobel de Física: “El Universo no es como lo imaginamos, es mucho más hermoso”.

El también científico responsable de la construcción y ejecución del Telescopio Espacial James Webb fue parte de la última versión de Congreso Futuro: Sin Límite Real.

Versión del artículo original de FRANCISCO CORVALÁN

TOMADO DE: La Tercera - 20 de enero de 2023

JOHN C. MATHER. FUENTE FOTO: NASA.

En 1995 recibió la titánica tarea de construir y poner en órbita el observatorio espacial que revolucionaría la astronomía del siglo XXI. El **lanzamiento del James Webb Space Telescope (JWST)** se concretó en 2021 y al año siguiente se revelaron las imágenes más detalladas hasta ahora del universo conocido**. Para John C. Mather, científico principal de este proyecto**, **las ansias de saber qué hay más allá de lo que podemos ver y qué es lo que no podemos ver, es fundamental como combustible al motor del conocimiento. “La astronomía se mueve a la velocidad de la imaginación”, dice el astrónomo.**

Como si fuera poco, en 2006 ganó el Premio Nobel de Física, al demostrar que varios tipos de partículas y radiación viajan a través del espacio ultraterrestre, incluida la radiación cósmica. En **entrevista con** Qué Pasa**, John Mather** cuenta sobre sus principales logros, **su presentación en la** última versión de Congreso Futuro, así también sobre qué tareas quedan pendiente para la astronomía del mañana.

-¿Ha estado aquí en Chile antes? ¿Cuánto de este país contribuye al estudio universal?

Sí, he estado de visita hace mucho tiempo. Llevamos a nuestro equipo del James Webb Space Telescope (JWST) a la montaña donde tienen los del VLT (Very Large Telescope). Queríamos apreciar cómo era construir algo tan grande.

Chile es un centro importante para la astronomía en el terreno. Por lo hermoso de sus sitios de observación en la zona de Atacama y en otras zonas del norte de Chile. Así que es bien reconocido como el lugar para los jóvenes y viejos astrónomos, donde se puede ver con mayor detalle el cielo.

-¿Cuánto del universo conocemos realmente y cuánto queda por conocer?

Sabemos una cantidad muy pequeña. Así que como sabes, solo podemos ver con telescopios y el resto tenemos que usar nuestra imaginación. Bueno, podemos, y solo podemos visitar personalmente planetas cerca de la Tierra, lo que significa que en este momento la Tierra, la Luna y Marte son accesibles y probablemente nada más.

FUENTE FOTO: NASA.

-¿Cómo ha sido este camino desde que surgió la idea de construir un telescopio como el JWST hasta el primer paquete de información que nos dio desde el borde del universo observable?

Empecé a trabajar en ello en 1995. Otras personas ya habían escrito un informe que decía “por favor construyéndonos este gran telescopio” y nos dijeron que sería emocionante. Todas las cosas que ahora estamos observando con el telescopio fueron imaginadas en ese entonces. Así trabajé con ingenieros y otros científicos para decidir exactamente qué hacer y cómo construirlo. Y luego, después de que se lanzó para asegurarse de que funcionaba muy bien y estamos tan emocionados de que todo lo que imaginamos se haga realidad.

SMACS 0723, IMAGEN CAPTURADA POR EL JWST. CRÉDITO IMAGEN: NASA.

-¿Qué tan importante es el JWST para la ciencia, para los investigadores o incluso para la humanidad?

Bueno, para la ciencia es pionera de una nueva herramienta. Observamos cosas que nunca pudimos ver antes, y nos hemos sorprendido científicamente, porque el universo no es como lo imaginamos exactamente y nos hemos sorprendido visualmente porque el universo es mucho más hermoso.

-¿La información dada recientemente por el JWST fue el logro más importante de la NASA en este siglo hasta ahora?

Creo que lo más importante es que demostramos que podíamos construir un observatorio increíblemente difícil y hacer que funcionara maravillosamente. Eso significa que el camino hacia el futuro de observatorios aún más poderosos está abierto. Podemos diseñar, podemos imaginar y construir las cosas más increíblemente complejas y difíciles, y funcionarán si somos capaces de hacer todos los programas de prueba que deberíamos en el terreno.

FUENTE FOTO: NASA.

-Y después de estas increíbles imágenes del Telescopio Espacial James Webb, ¿Qué es lo siguiente que explorará este observatorio?

Bueno, el observatorio en sí tiene un programa completo. Es observar cosas diferentes todos los días. Son dos o tres docenas de objetos diferentes cada día, organizados por un proceso de propuestas internacionales. Si eres astrónomo en cualquier parte del mundo, puedes enviarnos tu idea. Después de esto, hay varios observatorios que vienen, como el Observatorio Euclides que será lanzado por Europa para examinar la materia oscura y la energía oscura, para ver lo que no podamos ver. También tenemos un observatorio en línea llamado el Telescopio Vera C. Rubin. Eso está en el suelo, pero examinará todo el cielo cada tres noches y lo dirá. Y eso es en Chile.

TELESCOPIO ESPACIAL JAMES WEBB (JWST). FUENTE FOTO: NASA/AP.

-¿Cuál será el próximo proyecto de la Nasa para expandir lo que conocemos del universo?

El próximo gran proyecto de la NASA se llama telescopio Nancy Grace Roman, y se levantará alrededor de 2027 para mirar nuevamente la materia oscura y la energía oscura, o al menos para recopilar evidencia de ellos, ya que no pueden verse. Y también para estudiar una gran fracción del cielo. Buscará cosas que sean extrañas, diferentes e interesantes.

FUENTE FOTO: NASA.

-Sobre tu presentación en Congreso del Futuro ¿Qué mensaje te gustaría dejar a quienes presenciaron tu charla?

Que la gente vea que nuestros logros son eventos y que nuestras oportunidades están abiertas. Que si podemos hacer esto, entonces podemos descubrir muchas más cosas y podemos construir muchos más tipos de equipos para ir aún más lejos con nuestra imaginación. Los astrónomos viajan a la velocidad de la imaginación. Depende de los jóvenes de hoy llevar a cabo este proyecto en el futuro.

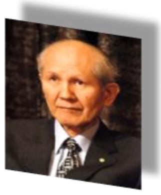
QUÍMICOS DESTACADOS

Ganadores del Premio Nobel en Química 2008:

Osamu Shimomura, Martin Chalfie y Roger Y. Tsien

Por el descubrimiento y desarrollo de la proteína verde fluorescente.

FUENTES: EcuRed - Wikipedia.



OSAMU SHIMOMURA (1928-2018)

Osamu Shimomura. Químico orgánico y biólogo marino. Nació el 27 de agosto de 1928 en Fukuchiyama y falleció el 19 de octubre de 2018 en Nagasaki; ambas localidades en Japón. Galardonado con el Premio Nobel de Química en el año 2008 por el descubrimiento y desarrollo de la proteína verde fluorescente (GFP), junto a los estadounidenses Martin Chalfie y Roger Y. Tsien.

Shimomura fue criado en Manchukuo (Manchuria, China) y Osaka, Japón, mientras que su padre sirvió como oficial en el Ejército Imperial Japonés. Más tarde, su familia se trasladó a Isahaya Nagasaki, 5 millas del epicentro del bombardeo atómico de la ciudad. Él recuerda haber oído, cuando era un joven de 16 años de edad, el avión bombardero antes de que la bomba atómica explotara. El flash de la explosión cegó a Shimomura durante unos treinta segundos, y luego fue empapado por la "lluvia negra" radiactiva producida por la bomba. Él superó grandes obstáculos en los siguientes 11 años para obtener una educación y lograr el éxito académico.

El profesor Shimomura obtuvo un Ph. D en química orgánica y llegó a ser profesor emérito de dos instituciones científicas de los Estados Unidos, el Marine Biological Laboratory (MBL) situado en Woods Hole, Massachusetts (donde trabajó desde 1980 hasta su jubilación, en 2001) y la Boston University Medical School.

El 8 de octubre del 2008 fue galardonado con el Premio Nobel de Química, junto a Martin Chalfie y Roger Tsien, por su trabajo con la proteína verde fluorescente (GFP), dentro de sus estudios de la medusa Aequorea victoria, una medusa bioluminiscente y de la proteína aequorina. El profesor Shimomura fue el primero que aisló y describió la GFP de la medusa, y descubrió que la GFP, al recibir radiación ultravioleta, emite una luz verde.

Las oportunidades educativas de Shimomura quedaron claramente limitadas por la devastación posguerra de Japón. A pesar de que más tarde recordó que no tenía interés en el tema, se matriculó en la Facultad de Ciencias Farmacéuticas de Nagasaki Medical College (ahora Escuela de Ciencias Farmacéuticas de la Universidad de Nagasaki). El campus de la Facultad de Medicina había sido totalmente destruido por la explosión de la bomba atómica, obligando a la escuela de farmacia a trasladarse a un campus temporal cerca de la casa de Shimomura. Esta proximidad es la razón fortuita por lo cual se embarcó en los estudios señalados y en la carrera que en última instancia lo condujo a recompensas inesperadas. Shimomura obtuvo una Licenciatura en Farmacia en 1951, y se quedó como asistente de laboratorio en el año 1955.

El mentor de Shimomura en Nagasaki le ayudó a encontrar un empleo como asistente del profesor Yoshimasa Hirata en la Universidad de Nagoya en 1956. Mientras trabajaba para el profesor Hirata, obtuvo una Maestría en química orgánica en 1958 y, antes de salir de Japón para una entrevista en Princeton University, un doctorado en química orgánica en 1960 en la Universidad de Nagoya.

En Nagoya, Hirata asignó a Shimomura la difícil tarea de determinar qué fue lo que hizo que los restos aplastados de un tipo de crustáceo, brillara cuando se humedecían con agua. Esta tarea llevó a Shimomura a la identificación exitosa de la proteína que causaba el fenómeno, y publicó los resultados preliminares en el boletín de la Sociedad Química de Japón, en un artículo titulado *Cristalina Luciferina Cypridina*. El artículo llamó la atención del profesor Frank Johnson en la Universidad de Princetón, y Johnson reclutó con éxito a Shimomura para trabajar con él en 1960.

Shimomura se reunió con su esposa, Akemi, en la Universidad Nagasaki , quien es también una química orgánica y realizan en conjunto actividades de investigación. Su hijo, Tsutomu Shimomura, es un experto en seguridad informática, que participó en la detención de Kevin Mitnick. Su hija, Sachi Shimomura, es Directora de Estudios de Pregrado para el Departamento de Inglés de la Universidad Commonwealth de Virginia y autor de *Cuerpos extraños y extremos visibles en la literatura*.

Además del Nobel, Shimomura recibió los siguientes honores: el Premio Pearse (2004), el Premio Emile Chamot (2005), el Premio Asahi (2006) y Orden de la Cultura, Japón (2008).

Publicó *La bioluminiscencia: los Principios de Química y Métodos* (edición revisada) (WSPC 2012).

MARTIN CHALFIE

Martin Chalfie. Nació el 15 de enero de 1947 en Chicago, Illinois, EE. UU. Científico galardonado, junto con el japonés Osamu Shimomura y el estadounidense Roger Y. Tsien, con el Premio Nobel de Química del año 2008 por el descubrimiento y desarrollo de la proteína verde fluorescente.

Chalfie se graduó en la Universidad de Harvard y es profesor de biología en la Universidad de Columbia. El laboratorio de Chalfie utiliza al nematodo Caenorhabditis elegans (C. elegans) para investigar el desarrollo y funcionamiento de las neuronas.

Ha publicado más de 200 artículos. Mientras trabajaba en el LMB en 1984 publicó un influyente artículo *«The Neural Circuit for Touch Sensitivity in C. Elegans»*, junto a John Sulston y Sydney Brenner. Chalfie fue el primero que logró introducir la GFP en otros organismos, en los cuales la proteína también emitió la fluorescencia.

Chalfie creció en Chicago, Illinois, hijo del guitarrista Chalfie Eli (1910-1996) y de la dueña de una tienda de ropa, Vivian Chalfie (de soltera Friedlen, 1913-2005). Su abuelo materno, L. Meyer Friedlen, emigró a Chicago desde Moscú muy joven; sus abuelos paternos, Benjamín y Esther Chalfie, llegaron a Cincinnati desde Brest-Litovsk.

Se matriculó en la Universidad de Harvard en 1965, con la intención de ser un gran matemático, pero se cambió a la bioquímica ya que combina sus intereses en química, matemática y biología. Él permaneció el verano después de su primer año de trabajo, en el laboratorio de Klaus Weber en Harvard, pero *"Fue muy desalentador al fallar por completo que yo decidí que no debía estar en la biología"*. Como resultado de ello, al completar el año, tomó cursos en derecho, teatro y literatura rusa.

También compitió en el equipo de natación de la Universidad de Harvard y fue nombrado capitán en su último año. En ese momento, el entrenador de natación, Bill Brooks, dijo: *"Marty hará un excelente capitán, porque tiene la admiración de todo el equipo"*. Como capitán, ganó el trofeo Harold S. Ulen, otorgado *"en un alto nivel demuestra sobre el equipo de Harvard las mejores cualidades de liderazgo, deportividad, y cooperación con el equipo según lo ejemplificado por Harold S. Ulen"*. Tras el anuncio del premio Nobel otorgado a Chalfie, uno de sus compañeros de cuarto durante sus años como estudiante observó: *"Él siempre se identificó como nadador"*.

Después de graduarse en 1969, trabajó en una variedad de ocupaciones temporales, como la venta de ropas para el negocio de fabricación de ropa de sus padres en Chicago y enseñó en la Hamden Day School Hall Country, en Hamden, Connecticut.

En el verano de 1971, su investigación en el laboratorio de José Zadunaisky en la Universidad de Yale dio lugar a su primera publicación. Con la confianza revivida, regresó a Harvard para estudios de postgrado bajo la tutoría de Robert Perlman, y obtuvo su doctorado en 1977.

Llevó a cabo su investigación postdoctoral en la LMB con Sidney Brenner y John Sulston, y los tres publicaron un artículo en 1985 sobre "El circuito neural de la sensibilidad táctil en C. elegans ". Chalfie salió de la LMB en 1982 para unirse a la Facultad de la Universidad de Columbia, en el Departamento de Ciencias Biológicas y continuó estudiando mutantes táctiles.

Se casó con Tulle Hazelrigg. Más tarde trabajaron ambos en la Facultad de la Universidad de Columbia. Ella le permitió citar su investigación inédita en su artículo en Science, *"Proteína verde fluorescente como marcador para la expresión génica"* a condición de que él hiciera el café, cocinara, y vaciara la basura todas las noches durante un mes. Chalfie y su esposa tuvieron una hija, Sarah, en julio de 1992. Chalfie fue elegido Miembro de la Academia Nacional de Ciencias en 2004.

Se durmió durante la llamada telefónica del Comité del Premio Nobel. Cuando se despertó, él sabía que el premio debía haberse anunciado ya, por lo que dijo, *"Bueno, ¿quién es el Schnook que obtuvo el premio esta vez?"* Y así abrió su laptop, llegó a la web del Premio Nobel y se enteró de que ¡él era el Schnook!

En el laboratorio, Chalfie usa el nematodo C elegans para investigar los aspectos del desarrollo de las células nerviosas y su función. La riqueza de desarrollo, información anatómica, genética y molecular disponible para el C elegans proporciona un enfoque poderoso y multifacético de estos estudios.

Ha publicado más de 200 trabajos de los cuales al menos 16 tienen más de 100 citas. Traza su trabajo sobre la proteína verde fluorescente en un seminario 1988 de Paul Brehm sobre organismos bioluminiscentes, lo que llevó a algunos experimentos cruciales en el año 1992, que se detalla en su artículo *"Proteína fluorescente verde como un marcador para la expresión génica*", que se encuentra entre los 20 artículos más citados en el campo de la Biología Molecular y Genética

PUBLICACIONES REALIZADAS:

- J. Wu, Duggan A. y M. Chalfie (2001) Inhibición del destino celular touch por EGL EGL-44 y 46-en C. elegans genes. Desarrollar 15: 789-802.
- H. y M. Du Chalfie (2001) Los genes que regulan el desarrollo de células en contacto C. Genética elegans 158: 197-207.
- Taub J., Lau, JF, Ma, C., Hahn, JH, Hoque, R., Rothblatt, J., y Chalfie M. (1999) A citosólica catalasa es necesario para extender la vida adulta-span en C. elegans daf-c y los mutantes clk-1 Naturaleza 399: 162-166. Resumen
- Duggan, A., Ma, C., y Chalfie, M. (1998) Regulación de la diferenciación táctil receptor de la C. elegans mec-3 y genes unc-86 Desarrollo125: 4107-4119. Abstract
- Hall, DH, Gu, G., Garcma Aqoveros-, J., Gong, L., Chalfie, M., y Driscoll, M. (1997) La neuropatología de la muerte celular degenerativa en C. elegans. J. Neurosci 17: 1033-1045. Abstract
- Gu, G. Caldwell, GA & Chalfie, M. (1996) Interacciones genéticas que afectan a la sensibilidad al tacto en Caenorhabditis elegans. Proc. Natl. Acad. Sci. 93:6577-6582. Abstract
- Du, H., Gu, G., William, CM & Chalfie, M. (1996) proteínas extracelulares necesarias para C. elegans mechanosensation. Neurona 16:183-194. Resumen
- García-Añoveros, J., Ma, C., y Chalfie, M. (1995) un dominio extracelular regula la actividad degenerin canal. Curr. Biol.. 5:441-448. Abstract
- Chalfie, M., Tu, Y., Euskirchen, G., Ward, WW, y Prasher, DC (1994) de la proteína verde fluorescente como un marcador para la expresión génica. Ciencia 263:802-805. Abstract
- Huang, M., y Chalfie, M. (1994) las interacciones de genes que afectan a la transducción de mechanosensory en Caenorhabditis elegans. Naturaleza 367:467-470. Abstract
- Savage, C., Xue, Y., Mitani, S., Hall, D., Zakhary, R. & Chalfie, M. (1994) Las mutaciones en el Caenorhabditis elegans beta-tubulina gen mec-7: efectos sobre el ensamblaje de los microtúbulos y la estabilidad y en la autorregulación tubulina. J. Cell. Sci. 107:2165-2175. Abstract
- Xue, D., Tu, Y. y Chalfie, M. (1993) la interacción cooperativa entre los homeoproteins C. elegans UNC-86 y MEC-3. Ciencia 261:1324-1328. Abstract
- Mitani, S., Du, H., Hall, DH, Driscoll, M., y Chalfie, M. (1993) combinatoria de control de la expresión del receptor de la neurona toque en Caenorhabditis elegans. Desarrollo 119:773-783. Abstract
- Driscoll, M. y Chalfie, M. (1991) El gen mec-4 es un miembro de una familia de Caenorhabditis elegans genes que pueden mutar para inducir degeneración neuronal. Naturaleza 349:588-593. Abstract
- Chalfie, M. y Au, M. (1989) Control genético de la diferenciación de las neuronas C. elegans receptores táctiles. Ciencia 243:1027-1033 Resumen

También publicó: *Proteína Verde Fluorescente: Propiedades, aplicaciones y protocolos* (1998, con Steven Kain)

Además, es Miembro de la Academia Nacional de Ciencias desde 2004.

Roger Y. Tsien. Nació en Nueva York, Estados Unidos, el primero de febrero de 1952, fue criado en la localidad de Livingston, en Nueva Jersey.

ROGER Y. TSIEN

Su padre fue ingeniero mecánico y sus tíos maternos ocupaban cátedras de profesores de ingeniería en el MIT.

Fue sobrino de Qian Xuesen, el creador de los misiles teledirigidos chinos.

Según su propio criterio estaba capacitado por herencia para desarrollar trabajos de ingeniería molecular.

Desde niño padecía de asma, por lo que pasaba gran parte de su tiempo en casa realizando experimentos químicos en su laboratorio del sótano.

Con solo dieciséis años fue el ganador del primer premio de la Intel Science Talent Search, competición a nivel nacional en los Estados Unidos para estudiantes de secundaria, su proyecto explicaba cómo los metales se unen al tiocianato.

Estudió en la Universidad de Harvard, obteniendo un Bachelor of Science en física y química en 1972.

Trabajó en el Laboratorio Fisiológico de la Universidad de Cambridge, Inglaterra, en 1977, y como investigador en el Gonville and Caius College hasta 1981.

Es propietario de patentes que posibilitaron la fundación de la compañía biotecnológica llamada Aurora Biosciences.

Se ha desempeñado en las siguientes instituciones: Universidad de California (Berkeley), Universidad de California (San Diego), Universidad de Harvard, Universidad de Cambridge.

Además del Nobel, obtuvo el Premio Wolf en Medicina (2004).

Actualmente, Tsien ha enfocado sus metas más recientes en la detección y tratamiento del cáncer.

Su equipo ha creado una molécula que transporta una droga química, un enlace peptídico en forma de U, que en contacto con la proteasa, la molécula suelta uno de los brazos de la U para dirigirse a otra célula cancerígena.

Sobre este proyecto ha manifestado: "Siempre quise lograr algo clínicamente relevante en mi carrera, de ser posible, y el cáncer es el desafío final".

LA TEORÍA DE LA RELATIVIDAD (Entrada 32)

La derivada covariante de un tensor (IV)

Versión de la publicación hecha por ARMANDO MARTÍNEZ TÉLLEZ **el 18 Marzo de 2009**
Documento en línea: http://teoria-de-la-relatividad.blogspot.com/2009/03/18-el-calculo-tensorial

Una vez que hemos entendido bien la naturaleza de los símbolos de Christoffel y cómo se obtienen a partir del tensor métrico **g**, el siguiente paso natural consiste en utilizarlos para obtener la derivada covariante de cualquier tensor **T**. El primer término en la derivada covariante de un tensor dado será simplemente la derivada ordinaria del tensor con respecto a la coordenada específica sobre la cual se esté evaluando el componente tensorial. Los demás términos serán los términos de "corrección" necesarios para que la derivada del tensor sea también un tensor, y cada uno de estos términos de corrección será el producto de un símbolo de Christoffel por el tensor que va apareado con dicho tensor dependiendo del tipo de tensor del que se trate, ya sea un tensor covariante (con un sub-índice), un tensor contravariante (con un súper-índice), o inclusive un tensor mixto que pueda tener varios sub-índices y súper-índices. Cada índice covariante (sub-índice) da lugar a un término de "término de corrección" que va de acuerdo con la definición de la derivada covariante de un tensor covariante, y cada índice contravariante (súper-índice) da lugar a un término de "término de corrección" que va de acuerdo con la definición de la derivada covariante de un tensor contravariante, razón por la cual resulta ventajoso aprenderse ambas fórmulas de memoria o tenerlas a la mano cuando se van a utilizar en la evaluación de la derivada covariante de un tensor mixto con varios índices. Con el objeto de que se vaya adquiriendo familiaridad en la aplicación de las fórmulas, a continuación se verán varios problemas en los cuales obtenemos la derivada covariante de varios tensores, la cual será simbolizada por la notación del semicolon. Es importante no perder la perspectiva de que en los "términos de corrección" la convención de sumación para índices repetidos se aplica en toda la extensión de la palabra, y cada término de corrección inevitablemente generará varios términos adicionales. Es aquí cuando apreciamos la ventaja simplificadora de la convención de sumación que nos permite omitir el tener que escribir los símbolos de sumatoria **Σ** que sólo agregarían más confusión a una notación de por sí extensa.

PROBLEMA: *Obtener la derivada covariante del tensor* T_{jk} *con respecto a* x^q.

En este caso, tenemos un tensor covariante de orden dos. Tendremos por lo tanto dos términos de corrección, ambos de signo negativo de acuerdo a la definición de la derivada covariante de un tensor covariante. La respuesta a este problema es la siguiente:

$$T_{jk;q} = \frac{\partial T_{jk}}{\partial x^q} - \Gamma^s_{jq} T_{sk} - \Gamma^s_{kq} T_{js}$$

PROBLEMA: *Obtener la derivada covariante del tensor* T^{jk} *con respecto a* x^q.

En este caso, tenemos un tensor *contravariante* de orden dos. Tendremos por lo tanto dos términos de corrección, ambos de signo *positivo* de acuerdo a la definición de la derivada covariante de un tensor contravariante. La respuesta a este problema es la siguiente:

$$T^{jk}_{;q} = \frac{\partial T^{jk}}{\partial x^q} + \Gamma^j_{qs} T^{sk} + \Gamma^k_{qs} T^{js}$$

PROBLEMA: *Obtener la derivada covariante del tensor* $T^j{}_k$ *con respecto a* x^q.

En este caso, tenemos un tensor *mixto* de orden dos, covariante de orden uno y contravariante de orden uno. Tendremos por lo tanto dos términos de corrección, uno con signo *positivo* y el otro con signo *negativo* de acuerdo a las definiciones de la derivada covariante de un tensor covariante y de un tensor contravariante. La respuesta a este problema es la siguiente:

$$T^j_{k;q} = \frac{\partial T^j_k}{\partial x^q} - \Gamma^s_{kq} T^j_s + \Gamma^j_{qs} T^s_k$$

PROBLEMA: *Obtener la derivada covariante del tensor* $T^j{}_{kl}$ *con respecto a* x^q.

En este caso, tenemos un tensor *mixto* de orden tres, covariante de orden dos y contravariante de orden uno. Tendremos por lo tanto *tres* términos de corrección, dos con signo *negativo* y el otro con signo *positivo* de acuerdo a las definiciones de la derivada covariante de un tensor covariante y de un tensor contravariante. La respuesta a este problema es la siguiente:

$$T^j_{kl;q} = \frac{\partial T^j_{kl}}{\partial x^q} - \Gamma^s_{kq} T^j_{sl} - \Gamma^s_{lq} T^j_{ks} + \Gamma^j_{qs} T^s_{kl}$$

PROBLEMA: *Obtener la derivada covariante del tensor* $T^{jk}{}_l$ *con respecto a* x^q.

En este caso, tenemos un tensor *mixto* de orden tres, covariante de orden uno y contravariante de orden dos. Tendremos por lo tanto *tres* términos de corrección, uno con signo *negativo* y los otros dos con signo *positivo* de acuerdo a las definiciones de la derivada covariante de un tensor covariante y de un tensor contravariante. La respuesta a este problema es la siguiente:

$$T^{jk}_{l;q} = \frac{\partial T^{jk}_l}{\partial x^q} - \Gamma^s_{lq} T^{jk}_s + \Gamma^j_{qs} T^{sk}_l + \Gamma^k_{qs} T^{js}_l$$

PROBLEMA: *Obtener la derivada covariante del tensor* $T^{jk}{}_{lm}$ *con respecto a* x^q.

En este caso, tenemos un tensor *mixto* de orden cuatro, covariante de orden dos y contravariante de orden dos. Tendremos por lo tanto *cuatro* términos de corrección, dos con signo *negativo* y los otros dos con signo *positivo* de acuerdo a las definiciones de la derivada covariante de un tensor covariante y de un tensor contravariante. La respuesta a este problema es la siguiente:

$$T^{jk}_{lm;q} = \frac{\partial T^{jk}_{lm}}{\partial x^q} - \Gamma^s_{lq} T^{jk}_{sm} - \Gamma^s_{mq} T^{jk}_{ls} + \Gamma^j_{qs} T^{sk}_{lm} + \Gamma^k_{qs} T^{js}_{lm}$$

PROBLEMA: *Obtener la derivada covariante del tensor* $T^{j}{}_{klm}$ *con respecto a* x^q.

En este caso, tenemos un tensor *mixto* de orden cuatro, covariante de orden tres y contravariante de orden uno. Tendremos por lo tanto *cuatro* términos de corrección, tres con signo *negativo* y el otro con signo *positivo* de acuerdo a las definiciones de la derivada covariante de un tensor covariante y de un tensor contravariante. La respuesta a este problema es la siguiente:

$$T^{j}_{klm;q} = \frac{\partial T^{j}_{klm}}{\partial x^q} - \Gamma^{s}_{kq} T^{j}_{slm} - \Gamma^{s}_{lq} T^{j}_{ksm} - \Gamma^{s}_{mq} T^{j}_{kls} + \Gamma^{j}_{qs} T^{s}_{klm}$$

PROBLEMA: *Obtener la derivada covariante del tensor* $T^{jkl}{}_{m}$ *con respecto a* x^q.

En este caso, tenemos un tensor *mixto* de orden cuatro, covariante de orden uno y contravariante de orden tres. Tendremos por lo tanto *cuatro* términos de corrección, tres con signo *positivo* y el otro con signo *negativo* de acuerdo a las definiciones de la derivada covariante de un tensor covariante y de un tensor contravariante. La respuesta a este problema es la siguiente:

$$T^{jkl}_{m;q} = \frac{\partial T^{jkl}_{mq}}{\partial x^q} - \Gamma^{s}_{mq} T^{jkl}_{s} + \Gamma^{j}_{qs} T^{skl}_{m} + \Gamma^{k}_{qs} T^{jsl}_{m} + \Gamma^{l}_{qs} T^{jks}_{m}$$

PROBLEMA: *Obtener la derivada covariante del tensor* $T^{jkl}{}_{mn}$ *con respecto a* x^q.

En este caso, tenemos un tensor *mixto* de orden cinco, covariante de orden dos y contravariante de orden tres. Tendremos por lo tanto *cinco* términos de corrección, tres con signo *positivo* y dos con signo *negativo* de acuerdo a las definiciones de la derivada covariante de un tensor covariante y de un tensor contravariante. La respuesta a este problema es la siguiente:

$$T^{jkl}_{mn;q} = \frac{\partial T^{jkl}_{mn}}{\partial x^q} - \Gamma^{s}_{mq} T^{jkl}_{sn} - \Gamma^{s}_{nq} T^{jkl}_{ms} + \Gamma^{j}_{qs} T^{skl}_{mn} + \Gamma^{k}_{qs} T^{jsl}_{mn} + \Gamma^{l}_{qs} T^{jks}_{mn}$$

PROBLEMA: *Obtener la derivada covariante del tensor* $T^{jk}{}_{lmn}$ *con respecto a* x^q.

En este caso, tenemos un tensor *mixto* de orden cinco, covariante de orden tres y contravariante de orden dos. Tendremos por lo tanto *cinco* términos de corrección, dos con signo *positivo* y los otros tres con signo *negativo* de acuerdo a las definiciones de la derivada covariante de un tensor covariante y de un tensor contravariante. La respuesta a este problema es la siguiente:

$$T^{jk}_{lmn;q} = \frac{\partial T^{jk}_{lmn}}{\partial x^q} - \Gamma^{s}_{lq} T^{jk}_{smn} - \Gamma^{s}_{mq} T^{jk}_{lsn} - \Gamma^{s}_{nq} T^{jk}_{lms} + \Gamma^{j}_{qs} T^{sk}_{lmn} + \Gamma^{k}_{qs} T^{js}_{lmn}$$

Una vez familiarizados con la derivación covariante de tensores, podemos investigar las similitudes que hay entre la diferenciación ordinaria y la diferenciación covariante. Y encontraremos que hay muchas similitudes.

PROBLEMA: *En el cálculo diferencial ordinario, el diferencial del producto de dos funciones u y v es igual al producto de la primera función u por la diferencial dv de la segunda más la segunda función v por la diferencial du de la primera:*

$$d(uv) = udv + vdu$$

*Esta regla es conocida como la regla de Leibniz. Demostrar que para el producto de dos tensores **T** y **S** también tenemos una regla similar.*

La demostración se puede llevar a cabo para dos tensores covariantes, o dos tensores contravariantes, o una mezcla de ambos tipos. Para una demostración lo más amplia posible que cubra a ambos tipos, nos conviene considerar a **T** y a **S** como tensores *mixtos* del mismo orden, de orden dos, lo cual cubre todas las posibilidades. No es necesario considerar tensores de orden mayor.

Si **T** y **S** son tensores mixtos de orden dos, entonces **T**= $(T^{i}{}_{j})$ y **S**= $(S^{i}{}_{j})$. El producto de dichos tensores, componente por componente, será (recuérdese la definición del producto *externo* de dos tensores):

$$\mathbf{TS} = \mathbf{U} = (T^{p}{}_{r} \cdot S^{q}{}_{s})$$

A continuación formaremos la suma del producto de la derivada covariante del tensor **T** (la cual simbolizaremos con la notación del semicolon puesto como sub-índice) por el tensor **S** y del producto del tensor **T** por la derivada covariante del tensor **S**, lo cual es el símil de la regla de Leibniz en el cálculo diferencial ordinario:

$$(T^{p}{}_{r\,;\,k}) \cdot (S^{q}{}_{s}) + (T^{p}{}_{r}) \cdot (S^{q}{}_{s\,;\,k})$$

Queremos demostrar que esto se nos reduce a la derivada covariante de algo como **U**= $(U^{pq}{}_{rs})$ (recuérdese que el producto de dos tensores mixtos de orden dos nos debe producir un tensor de orden 4, covariante de orden dos y contravariante de orden dos), o sea a:

$$U^{pq}{}_{rs\,;\,k}$$

Para formar la *suma de productos Leibniz* indicada arriba, a continuación podemos aplicar directamente la definición de la derivada covariante metiendo en el panorama a los símbolos de Christoffel, tomando en cuenta que se trata tanto de la derivada covariante del tensor **T** como de la derivada covariante del tensor **S**:

$$T^{p}_{r;k} S^{q}_{s} + T^{p}_{r} S^{q}_{s;k} = \left(\frac{\partial T^{p}_{r}}{\partial x^k} + \Gamma^{p}_{tk} T^{t}_{r} - \Gamma^{t}_{rk} T^{p}_{t}\right) S^{q}_{s} + T^{p}_{r}\left(\frac{\partial S^{q}_{s}}{\partial x^k} + \Gamma^{q}_{tk} S^{t}_{s} - \Gamma^{t}_{sk} S^{q}_{t}\right)$$

Podemos remover los paréntesis, reagrupar, y simplificar usando el hecho de que por la definición del producto externo de dos tensores:

$$(T^{t}{}_{r}) \cdot (S^{q}{}_{s}) = U^{tq}{}_{rs}$$

$$(T^{p}{}_{r}) \cdot (S^{t}{}_{s}) = U^{pt}{}_{rs}$$

$$(T^{p}{}_{t}) \cdot (S^{q}{}_{s}) = U^{pq}{}_{ts}$$

$$(T^{p}{}_{r}) \cdot (S^{q}{}_{t}) = U^{pq}{}_{rt}$$

Con todo esto tenemos entonces lo siguiente:

$$T^p_{r;k}S^q_s + T^p_r S^q_{s;k} = \left(\frac{\partial T^p_r}{\partial x^k} S^q_s + T^p_r \frac{\partial S^q_s}{\partial x^k}\right) + \Gamma^p_{tk}U^{tq}_{rs} + \Gamma^q_{tk}U^{pt}_{rs} - \Gamma^t_{rk}U^{pq}_{ts} - \Gamma^t_{sk}U^{pq}_{rt}$$

Lo que se ha puesto de color rojo entre los paréntesis es algo que puede ser simplificado, ya que es esencialmente igual a la derivada parcial ordinaria (¡no covariante!) de $U^{pq}{}_{rs}$:

$$(U^{pq}{}_{rs})_{,k} = U^{pq}{}_{rs,k} = \partial U^{pq}{}_{rs}/\partial x^k$$

Entonces lo anterior se nos convierte en:

$$\partial U^{pq}{}_{rs}/\partial x^k + \Gamma^p{}_{tk}\, U^{tq}{}_{rs} + \Gamma^q{}_{tk}\, U^{pt}{}_{rs} - \Gamma^t{}_{rk}\, U^{pq}{}_{ts} - \Gamma^i{}_{jk}\, U^{pq}{}_{rt}$$

Pero todo esto no es más que la derivada *covariante* de $U^{pq}{}_{rs}$, siendo el tensor **U** el producto directo de los tensores **S** y **T**, o sea $U^{pq}{}_{rs;k}$. Entonces:

$$U^{pq}{}_{rs;k} = (T^p{}_r \cdot S^q{}_s)_{;k} = (T^p{}_{r\,;\,k}) \cdot (S^q{}_s) + (T^p{}_r) \cdot (S^q{}_{s\,;\,k})$$

En notación de componentes, esto último es la regla de Leibniz para la derivada covariante del producto de dos tensores **T** y **S**. Simbólicamente, en una forma más compacta, podemos representar la regla de la siguiente manera:

$$[\mathbf{TS}]_{;\,k} = \mathbf{T}_{;\,k}\,\mathbf{S} + \mathbf{TS}_{;\,k}$$

La regla de Leibniz para la derivada covariante del producto de dos tensores también se representa simbólicamente de otras maneras, por ejemplo:

$$\nabla(\mathbf{T} \otimes \mathbf{S}) = (\nabla\mathbf{T}) \otimes \mathbf{S} + \mathbf{T} \otimes (\nabla\mathbf{S})$$

Desafortunadamente, este último tipo de representación no va muy de acuerdo con el uso que normalmente se le da al operador vectorial diferencial nabla ∇, y se puede prestar a confusiones, aunque tiene la ventaja de utilizar el operador "⊗" para distinguir el producto directo de los dos tensores (producto *externo*) del producto *interno* de tensores que implica una contracción al aplicarse la convención de sumación para índices repetidos. Quizá una mejor forma de representar la regla de Leibniz para derivadas covariantes consiste en tomar lo mejor de ambas simbología y escribirla del siguiente modo:

$$[\mathbf{T} \otimes \mathbf{S}]_{;\,k} = [\mathbf{T}_{;\,k} \otimes \mathbf{S}] + [\mathbf{T} \otimes \mathbf{S}_{;\,k}]$$

PROBLEMA: *Obtener la derivada covariante del siguiente producto directo de tensores:*

$$U^j{}_k\, V^{lm}{}_n$$

(1) aplicando primero al pie de la letra la definición de la derivada covariante al producto tensorial dado, y (2) aplicando la regla de Leibniz.

Si tomamos directamente el producto tensorial dado y le aplicamos la definición de la derivada covariante, tenemos lo siguiente:

$$(U^j_k V^{lm}_n)_{;q} = \frac{\partial(U^j_k V^{lm}_n)}{\partial x^q} - \Gamma^s_{kq}U^j_s V^{lm}_n - \Gamma^s_{nq}U^j_k V^{lm}_s + \Gamma^j_{qs}U^s_k V^{lm}_n + \Gamma^l_{qs}U^j_k V^{sm}_n + \Gamma^m_{qs}U^j_k V^{ls}_n$$

Simplificando (tomando la derivada parcial ordinaria del producto de $U^j{}_k$ y $V^{lm}{}_n$ reagrupando bajo paréntesis los términos comunes a cada uno de los dos tensores mixtos):

$$(U^j_k V^{lm}_n)_{;q} = \left(\frac{\partial U^j_k}{\partial x^q} - \Gamma^s_{kq}U^j_s + \Gamma^j_{qs}U^s_k\right)V^{lm}_n + U^j_k\left(\frac{\partial V^{lm}_n}{\partial x^q} - \Gamma^s_{nq}V^{lm}_s + \Gamma^l_{qs}V^{sm}_n + \Gamma^m_{qs}V^{ls}_n\right)$$

Pero el factor entre paréntesis del primer término es simplemente la derivada covariante de $U^j{}_k$ con respecto a x^q, mientras que el factor entre paréntesis del segundo término es simplemente la derivada covariante de $V^{lm}{}_n$ con respecto a x^q. Entonces:

$$(U^j{}_k\, V^{lm}{}_n)_{\,;\,q} = U^j{}_{k\,;\,q}\, V^{lm}{}_n + U^j{}_k\, V^{lm}{}_{n\,;\,q}$$

(2) La aplicación de la regla de Leibniz nos da el mismo resultado que acabamos de obtener, pero de manera mucho más rápida.

Como puede verse, la derivada covariante de un producto de tensores obedece las mismas reglas que las que se aplican a las derivadas ordinarias del cálculo infinitesimal.

PROBLEMA: *Demostrar que la derivada covariante del tensor métrico* **g** *es igual a cero*.

Aplicando rigurosamente la definición de la derivada covariante a la diferenciación covariante del tensor métrico **g** = (g_{jk}), tenemos lo siguiente:

$$g_{jk;q} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^q} - \Gamma^s_{jq}g_{sk} - \Gamma^s_{kq}g_{js}$$

Como puede verse, tanto en el segundo término como en el tercer término del lado derecho se pueden bajar los índices de los símbolos de Christoffel por la acción del tensor métrico, convirtiendo a ambos en símbolos de Christoffel de primer género:

$$g_{jk;q} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^q} - \Gamma_{jqk} - \Gamma_{kqj}$$

Pero por otro lado tenemos la identidad tensorial:

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^q} = \Gamma_{jqk} + \Gamma_{kqj}$$

Con esto el resultado se nos hace cero. *La derivada covariante del tensor métrico* **g** *es igual a cero*.

PROBLEMA: *Demostrar que la derivada del tensor métrico conjugado* $\mathbf{g}^{-1}$ *es igual a cero.*

Aplicando rigurosamente la definición de la derivada covariante a la diferenciación covariante del tensor métrico conjugado $\mathbf{g}^{-1} = (g^{jk})$, tenemos lo siguiente:

$$g^{jk}_{;q} = \frac{\partial g^{jk}}{\partial x^q} + \Gamma^j_{qs} g^{sk} + \Gamma^k_{qs} g^{js}$$

Pero aquí tenemos también otra identidad tensorial fácilmente demostrable:

$$\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^q} = -g^{sk}\Gamma^j_{qs} - g^{js}\Gamma^k_{qs} g^{js}$$

con la cual el resultado se nos hace cero. *La derivada covariante del tensor métrico conjugado* $\mathbf{g}^{-1}$ *es igual a cero.*

PROBLEMA: *Demostrar que la derivada covariante del tensor delta Kronecker es igual a cero.*

Aplicando rigurosamente la definición de la derivada covariante a la diferenciación covariante del tensor *mixto* delta Kronecker $\boldsymbol{\delta} = (\delta^j_k)$, tenemos lo siguiente:

$$\delta^j_{k;q} = \frac{\partial \delta^j_k}{\partial x^q} - \Gamma^s_{kq}\delta^j_s + \Gamma^j_{qs}\delta^s_k$$

La derivada ordinaria del tensor delta Kronecker es igual a cero porque el tensor delta Kronecker contiene únicamente términos constantes. Aplicando la propiedad del tensor delta Kronecker para el reemplazo de los índices, esto nos deja únicamente con lo siguiente:

$$\delta^j_{k;q} = -\Gamma^j_{kq} + \Gamma^j_{kq}$$

$$\delta^j_{k;q} = 0$$

Entonces *la derivada covariante del tensor delta Kronecker* $\boldsymbol{\delta}$ *es igual a cero.*

PROBLEMA: *Obtener la derivada covariante de:*

$$g_{jk}T^{km}{}_n$$

La relación dada es el producto (exterior) del tensor métrico **g** por otro tensor mixto **T**. Podemos aplicar aquí la regla de Leibniz obtenida previamente para la derivada covariante del producto de dos tensores, lo cual nos da:

$$(g_{jk}T^{km}{}_n)_{;q} = g_{jk;q}T^{km}{}_n + g_{jk}T^{km}{}_{n;q}$$

El primer término se hace cero en virtud de que por uno de los problemas resueltos previamente la derivada covariante del tensor métrico g es igual a cero, quedándonos como resultado final el siguiente:

$$(g_{jk}T^{km}{}_n)_{;q} = g_{jk}T^{km}{}_{n;q}$$

En general, al llevar a cabo una diferenciación covariante, tanto el tensor métrico **g** como el tensor métrico conjugado $\mathbf{g}^{-1}$ como el tensor delta Kronecker $\boldsymbol{\delta}$ pueden ser tratados como si fuesen constantes.

Antes de dejar este tema, veremos algo de interés relacionado con lo que hemos estado tratando y la Teoría de la Relatividad.

PROBLEMA: *Obtener los símbolos de Christoffel de primer género para el 4-espacio de la Teoría Especial de la Relatividad.*

Para el espacio-tiempo de la Teoría Especial de la Relatividad podemos utilizar como elemento de línea ds^2 el siguiente:

$$ds^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$$

que en coordenadas generalizadas haciendo:

$$(x^1, x^2, x^3, x^4) = (ct, x, y, z)$$

podemos escribir como:

$$ds^2 = (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2$$

De aquí podemos obtener directamente los elementos del tensor métrico **g** para este 4-espacio, que son:

$$g_{11} = 1$$

$$g_{22} = g_{33} = g_{44} = -1$$

$$gij = 0 \text{ para } i \neq j$$

Con esto, la evaluación de los símbolos de Christoffel de primer género es directa e inmediata, *y todos ellos son iguales a cero* porque todos los gij son constantes o son cero, como en el siguiente caso en el que i = 2, j = 2 y k = 4:

$$\Gamma_{ijk} = (-\, g_{ij,k} + g_{jk,i} + g_{ki,j})/2$$

$$\Gamma_{224} = (-\, g_{22,4} + g_{24,2} + g_{42,2})/2$$

$$\Gamma_{224} = (-\, \partial g_{22}/\partial x^4 + \partial g_{24}/\partial x^2 + \partial g_{42}/\partial x^2)/2$$

$$\Gamma_{224} = [0 + 0 + 0]/2$$

$$\Gamma_{224} = 0$$

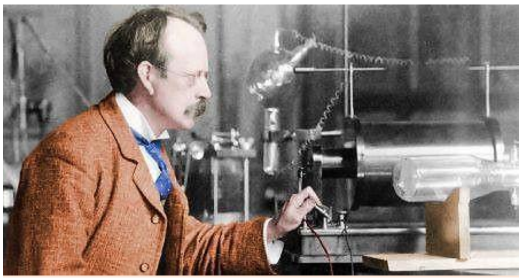
Al ser todos los símbolos de Christoffel de primer género iguales a cero, los símbolos de Christoffel de segundo género son también iguales a cero. Puesto que los símbolos de Christoffel cuando son diferentes de cero indican la posible presencia de una curvatura en el espacio bajo consideración (esto se verá posteriormente cuando tratemos el tema del *tensor de Riemann*), al ser todos cero para el intervalo relativista propio de la Teoría Especial de la Relatividad tenemos nuestra primera confirmación matemática formal de que el espacio-tiempo Lorentziano es un espacio-tiempo *plano*.

Continúa en el próximo número…

La revolución del electrón.

Versión del artículo original de JAVIER YANES - @yanes68 – para Ventana al Conocimiento

Elaborado por Materia para OpenMind



En 1897, J.J. Thomson anunció que había descubierto algo 1.000 veces más pequeño que el átomo. Era tan increíble que ni él mismo supo entenderlo bien ni tampoco siguió el camino que había abierto. Sin querer, cambió la física y la química para siempre.

Celebramos el **descubrimiento de la primera partícula subatómica: el electrón**, un logro que las enciclopedias atribuyen al inglés **Joseph John Thomson en 1897**. Aunque Thompson era ya un científico muy reputado, su anuncio fue difícil de creer, ya que entonces se pensaba que no había nada más pequeño que un átomo. Sin embargo, en poco tiempo aquel hallazgo revolucionó la comprensión científica de la materia, abrió el camino a la física de partículas y a multitud de aplicaciones en el campo de la electrónica, según cuentan los libros de texto. Pero, ¿realmente fue así?

"La palabra 'descubrir' es problemática", sugiere a OpenMind el historiador de la ciencia Jaume Navarro, autor del libro *A History of the Electron. J.J. and G.P Thomson* (Cambridge University Press, 2012). Lo cierto es que el descubrimiento del electrón podría considerarse un caso temprano de ciencia colectiva, avanzando desde enfoques diversos y a manos de distintos investigadores que, según Navarro, "tenían distintos problemas en mente".

EL DESCUBRIMIENTO DEL ELECTRÓN SE ATRIBUYE AL FÍSICO INGLÉS J.J. THOMPSON. CRÉDITO IMAGEN: DEPARTAMENTO DE ENERGÍA DE EE. UU.

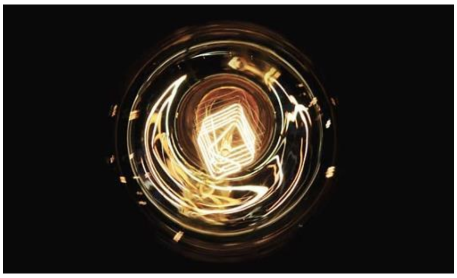
La historia del electrón y la de su presunto padre son en realidad dos líneas separadas que llegaron a encontrarse. Para reconstruirla quizá no sea necesario remontarse hasta la antigua Grecia, donde la palabra "*elektron*" designaba al ámbar, capaz de atraer objetos pequeños cuando se frotaba. Pero sí al menos hasta la idea de un fluido eléctrico, originada en el siglo XVIII y cuyo exceso o defecto Benjamin Franklin relacionó con las ideas de carga positiva o negativa.

EL ÁTOMO NO ES INDIVISIBLE

Ya en el siglo XIX, Richard Laming sugirió que el átomo no era realmente indivisible, sino que se componía de un núcleo de materia rodeado de unidades de carga eléctrica. Al mismo tiempo, **Michael Faraday** acuñaba los términos "ion", "catión" y "anión" para designar las especies químicas con carga eléctrica que en una pila viajaban de un electrodo a otro a través de un medio líquido: los cationes hacia el cátodo, los aniones al ánodo. Fue el irlandés **George Johnstone Stoney** quien en 1874 propuso que existían en el átomo unidades elementales de electricidad, para las que en 1891 inventó la palabra "electrón".

Mientras tanto, varios científicos experimentaban con los llamados tubos de Crookes, recipientes de vidrio vaciados de aire en los que una descarga eléctrica producía una fluorescencia. En 1876, el alemán **Eugen Goldstein** denominó "rayos catódicos" a esta misteriosa energía emitida por el cátodo de esos tubos. Y el químico inglés **William Crookes,** descubrió que los rayos podían desviarse con campos eléctricos y magnéticos, indicando que poseían una carga eléctrica negativa.

Así, en el último cuarto del siglo XIX ya circulaban las nociones de las partículas subatómicas y de la unidad de carga, y algunos físicos se habían acercado a la idea de que los rayos catódicos estaban compuestos por algo cargado eléctricamente. Se diría que la partícula a la que colocarle el nombre inventado por Stoney era una fruta madura a punto de caer. Y quien la recogió fue **J. J. Thomson** (1856-1940), un brillante matemático que dirigía el prestigioso Laboratorio Cavendish de la Universidad de Cambridge. Allí Thomson experimentaba con la conducción de la electricidad a través de los gases, tras haber elaborado modelos sobre **la teoría electromagnética de James Clerk Maxwell.**



EL ELECTRÓN FUE LA PRIMERA PARTÍCULA SUBATÓMICA DESCUBIERTA. CRÉDITO IMAGEN: ANASTASIA ZHENIN.

EL DESCUBRIMIENTO DE LOS "CORPÚSCULOS"

El 30 de abril de 1897, J.J. Thomson leía ante la Royal Institution un discurso en el que comunicaba sus resultados experimentales demostrando la naturaleza corpuscular de los rayos catódicos. El trabajo de Thomson revelaba que los rayos emitidos por un cátodo (o electrodo negativo) estaban compuestos por **partículas de carga negativa a las que el físico denominó "corpúsculos"**. Su masa calculada era del orden de 1.000 veces menor que la de la unidad de carga más pequeña conocida entonces, el átomo de hidrógeno ionizado (H^+).

Thomson había encontrado la primera partícula subatómica, pero en realidad no buscaba eso, sino una unidad de carga eléctrica. Según Jaume Navarro, lo que el físico perseguía era "**una comprensión de los mecanismos de interacción entre materia y electricidad**". Por todo ello, apunta Navarro, "la figura de Thomson no representa fundamentalmente al padre del electrón, sino el avance de las teorías de Maxwell y su papel en la física del cambio de siglo". En cierto modo, el electrón fue una rareza, una "anomalía en su trayectoria", en palabras del historiador. De hecho, J.J. Thomson recibió el Nobel en 1906 por su línea principal de trabajo, sus investigaciones en la conducción de la electricidad en tubos llenos de gas.

Tampoco podría decirse que los hallazgos de Thomson marcaran el año cero de la gran revolución tecnológica del siglo XX: la electrónica. Su trabajo impulsó la comprensión de la electrónica fundamental, pero si tuviera que elegirse un momento para el comienzo de la era de la electrónica, para Navarro sería **la invención del diodo en 1904 por el estadounidense Lee de Forest**; no un físico, sino un inventor "alejado de la tradición de física teórica o universitaria".

Tal vez nuestros dispositivos electrónicos actuales le deban más a Edison o a Marconi que a Thoms**on**, pero la ciencia sí le debe mucho al físico británico. Otros ocho premios Nobel como Ernest Rutherford salieron de su laboratorio **Cavendish**, y uno más de su propia casa: su hijo George Paget Thomson, premiado en 1937 por demostrar que la partícula de su padre, el electrón, era además una onda.

Buscar y manejar la felicidad.

Por: HERNANI ZAMBRANO GIMENEZ, Ph.D.
TOMADO DE: El carabobeño.com – 15 de agosto de 2021

HERNANI ZAMBRANO GIMENEZ

Egresado de Universidad Central de Venezuela. Estudios de Postgrado en la Universidad de Stanford (USA). Profesor y Ex Director de Escuela de Educación (Universidad Carabobo, Valencia, Venezuela). Ex Director Escuela de Psicología (Universidad Arturo Michelena, Valencia, Venezuela). Asesor de Empresas y Productor Radial en Universitaria 104,5 FM (Universidad Carabobo, Venezuela). Correo Electrónico: hernaniyo@outlook.com

Uno de los recursos mentales más apreciados, y por lo tanto de los que más desean administrar y manejar los seres humanos en procura de su propio beneficio, aparte de su formación, de su nivel social, de su tiempo y lugar, ¡ha sido el tema de la felicidad humana! Ha sido, además, motivo de tentación, especulaciones y esperanzas.

Cuánta felicidad hemos deseado todos, siempre, sin distinciones. Pobres y ricos se han deleitado pensando en ganar esperanzas y mejorar el futuro personal; al salir favorecido por algo que llaman felicidad, sin saber de qué se trata.

La felicidad humana no se logra por la gracia de un “golpe” de la suerte o presionar esperanzas a cumplirse a veces. La experiencia nos indica que nos acercamos a la felicidad cuando superamos pequeñas y continuas acciones inesperadas; de ir poco a poco, de todos los días; de insistir con persistencia sin flaquear. Se necesita mucha concentración, insistencia y lucha orientada hacia algunos objetivos, para lograr felicidad.

Felicidad no es, como algunos equivocados creen, una “sucesión” de regalos que nos toquen en “suerte”; tampoco es encontrarnos con lo que los especuladores denominan: logro del bienestar.

La felicidad mucho menos es toparse con un buen número de la lotería. En el mundo de la felicidad se destaca una característica persistente y muy clara: ¡Esto es, que nada es fácil, y nada nos va o nos viene, como si fuese regalado! La felicidad sólo existe en un exigente mundo de insistencia y esfuerzos.

¿Pero, qué más podemos decir sobre la felicidad?

¡Felicidad no es alcanzar un objetivo, una meta o línea de llegada, ansiada y lograda, como al estar en una veloz carrera! Felicidad es vivir intensamente en el momento fugaz y preciso de sentirnos cómodos, relajados, sin presión anímica, y vivaces, además…

Pero, aclaremos que felicidad no es la expectativa y el deseo de vivir más intenso y mejor, y estar dedicados en el asunto que uno quiere, (pero, por la imposición de otros) ¡Porque, ser feliz es que sintamos en nosotros querer, desear, y disfrutar lo que hagamos, y lo que apoyemos con nuestra voluntad, en profundo goce!

“La felicidad es un sentimiento profundo, intenso, que logramos y se instala, de pronto, en nosotros. Un sentimiento que se vive dentro de nosotros. Es siempre una condición interior, que existe dentro de nosotros, y no es exterior a nosotros; por esto mismo, la felicidad no depende de qué es lo que tenemos, sino de lo que somos en un momento”.

A la felicidad no puede vérsele ni sentírsele afuera porque es una experiencia totalmente interior, que sólo la experimenta quien la vive, quien la siente presente internamente.

Salgamos vigorosos al contacto intenso con la vida, para lograr lo que queramos; sólo así, podremos lograr instantes de felicidad. ¡Tener éxitos es lograr deseos, pero ser felices va mucho más allá, más intenso, al querer mucho lo que nos sea logrado! ¡Es amplia y muy clara esta diferencia, para comprender la felicidad!

La paciencia para lograr felicidad, aun la que se programe, puede ser difícil, de espera, de insistencia, también llena de amargura, y presionada por la ansiedad y la angustia; pero su logro relajante, dulce y placentero, es la felicidad en mayor o menor extensión, en mayor o menor goce, en largo o en breve tiempo.

El presente y destino de los seres humanos es la sumatoria de variados momentos difíciles y sufridos, pero también se configura con momentos intensos de felicidad, que toda vida los tiene; pero no así, no tan fácil, ni tampoco con largas épocas felices.

“La felicidad se bebe en copas hermosas, y se sirve en pequeños tragos”, concentrados en el sabor.

ARQUEO LITERARIO: Revisiones Críticas. (XIII).

Obra: Bohr y la Teoría Cuántica.

AUTOR: Paul Strathern (1998). Editorial: Siglo XXI. España. ISBN: 978843231869.

Presentado por: Grupo de estudios e investigación científica Max Planck Magazine.

Enviado vía Facebook por Dr. VÍCTOR HERMOSO AGUILAR

Según el gran físico teórico alemán Werner Heisenberg, «la influencia de Bohr sobre la física y los físicos de nuestro siglo ha sido mayor que la de ninguna otra persona, incluido Einstein». Y Heisenberg debía saber lo que decía, pues pasó buena parte de su vida debatiendo, y a veces discutiendo enconadamente con ambos.

El mayor logro de Bohr fue resolver el enigma de la estructura atómica mediante la aplicación de la teoría cuántica, con el resultado de grandes avances científicos y gran desconcierto entre los científicos. ¿Por qué? El caso es que nadie sabe aún qué es realmente la teoría cuántica.

El gran pianista Vladimir Horowitz dijo en una ocasión que Mozart era «demasiado fácil para los principiantes, demasiado difícil para los expertos». Lo mismo se aplica a la física cuántica según el colega y biógrafo de Bohr, Abraham Pais. Por ello, si incluso la versión simplificada contenida en este libro resultara desconcertante, al menos pueden consolarse pensando que algo es algo. Dicho de manera muy sencilla (para aquellos que encontramos demasiado difícil incluso al sencillo Mozart), la teoría cuántica postula que a nivel subatómico, las partículas no obedecen las leyes de la física clásica. De hecho, entidades tales como los electrones pueden existir como dos cosas diferentes a la vez, materia o energía, dependiendo de la forma en que se midan.

El principal problema de la teoría cuántica es que es sencillamente increíble.

No tiene nada que ver con el sentido común. Pero la ciencia del siglo XX es mucho más emocionante que el sentido común, que Einstein definió sensatamente como «la acumulación de prejuicios adquiridos hasta la edad de dieciocho años». Bohr fue director del Instituto de Física Teórica de Copenhague, desde donde prácticamente dirigió la era dorada de la física cuántica, que tuvo lugar en los años veinte e involucró a muchos de los mejores científicos jóvenes de la generación posterior a la de Einstein. Juntos y por separado, por medio de la discusión y de la brillantez individual, estos pioneros abrieron un campo cuya existencia ni se sospechaba un cuarto de siglo antes. Las consecuencias de esta época de descubrimientos han sido de diverso valor. Ahora sabemos cómo funciona nuestro mundo, desde las más minúsculas partículas subnucleares a los agujeros negros. También podemos destruirlo en un holocausto nuclear. Bohr vivió lo suficiente para contribuir a la construcción de la primera bomba atómica. Cuando se dio cuenta de lo que había hecho, pasó el resto de su vida haciendo campaña contra la bomba.

La ciencia ficción y el fin del mundo.

Por **IVÁN JAIME URANGA FAVELA**

Investigador Social y Escritor mexicano

Cada año la ciencia ficción nos sorprende con nuevas películas que abordan el fin del mundo sin que el tema se agote. Debe haber cientos de ellas, las premonitorias del fin del mundo por cambio climático son espeluznantes. Desde luego, todas cometen el error de pensar que la extinción de la especie humana es el fin del planeta.

Un día el filósofo español Juan Carlos Monedero se preguntó: ¿Por qué hay tantas películas que anticipan el fin del mundo y no existe ninguna que anticipe el fin del capitalismo?

Hay filósofos que brillan por sus respuestas, pero otros pasan a la posteridad por sus preguntas que pueden transitar siglos para ser contestadas por las mentes más brillantes. Como dice el periodista Vicente Serrano: "Esta pregunta dejó la víbora chillando". Sería bueno que pensadores del planeta entero intentaran contestarla.

Los científicos ortodoxos acudirán a leer a los clásicos para encontrar respuesta y negarán cualquier respuesta heterodoxa, como a las que a diario se me ocurren. Con prepotencia, me recomendarán leer varios libros clásicos para que deje de decir, desde su punto de vista, tonterías.

El libro de ciencia ficción más destacado escrito por Marx y Engels es el "Manifiesto del Partido Comunista publicado en 1848", al final del Capítulo II escriben las 10 metas que los proletarios alcanzarían en el futuro en los países desarrollados. Esas metas hoy las pasan de largo los marxistas de nuestros tiempos. Por otro lado, todos los demás libros escritos por ellos describen el pasado y el presente del tiempo que les tocó vivir. Obviamente, en el siglo XIX.

Quiero pensar que todos los proyectos, planes y programas se inscriben en acontecimientos del futuro. Son cosas que, aunque contengan mucho del pasado, no han ocurrido y posiblemente, nunca ocurrirán. La ciencia ficción aborda estos temas fascinantes. Recuerdo cuando los protagonistas de algunas películas se comunicaban viéndose en un monitor o hablando por teléfono desde un reloj. Puertas de apertura automática, naves voladoras individuales, etcétera. Cuando estas innovaciones tecnológicas no eran siquiera proyectos.

A finales de los años 80 yo cargaba un "celular" de dos kilos y medio que, colgado del cinturón, me bajaba los pantalones y que solo servía para llamadas de voz. Después de unas cuantas llamadas había que dejarlo horas conectado al cargador de la batería.

Podría decirse que la ciencia ficción es ciencia de lo hoy imposible, a la que deberían dedicarle mayor tiempo las futuras generaciones, para que la humanidad transite rápido la Era del Conocimiento y avance a la Era de la Creatividad o 5T. Cuando el trabajo asalariado ya sea una reminiscencia del pasado y los seres humanos, libres de tener que trabajar para vivir y se dediquen a la creatividad.

Claro, primero el bien común tendría que triunfar en la 4T y evitar la segura extinción a que llevará a la humanidad el triunfo del individualismo, la codicia y el miedo.

Ahora bien, no se atormente. No habrá películas de ciencia ficción sobre el fin del capitalismo, ya existen cientos de películas históricas. Las habrá de ficción pura como "El señor de los anillos" y "Harry Potter", tal vez en un futuro. Los que nacimos antes de los años 70, somos testigos vivientes de los dos sistemas sociales que acabaron con el sistema capitalista.

Oficialmente, el sistema capitalista liderado por Reino Unido llegó a su fin el día que John Maynard Keynes firmó el Tratado de Bretton Woods en el mes de julio de 1944. Triunfaron las tesis de Harry Dexter White y la hegemonía del mundo pasó a Estados Unidos. A partir de entonces, imperialismo estadounidense y socialismo soviético dos contrarios que convivieron en unidad y lucha, vivieron en una guerra fría amenazando con la extinción de la especie humana con sendas bombas nucleares. Instrumentos de extinción masiva qué, por cierto, no existieron en el sistema capitalista.

¿Sus maestros de historia le enseñaron esto? No. No se preocupe, también le enseñaron que los españoles gobernaban la Nueva España. Sin embargo, había un poder que: Controlaba los medios de comunicación (libros y el púlpito); impartía educación (catecismo); cobraba impuestos (diezmo e indulgencias); impartía justicia (santa inquisición) y nombraba al rey de España. ¿Quién gobernaba a la Nueva España entonces?

Vivimos un despertar, la humanidad se enfila a la 4T o Era del Conocimiento. Pregunte sobre el tema a sus maestros, oblíguelos a hacer piruetas con el pensamiento, que, por fin acepten que son defensores del capitalismo eterno, el fin de la historia y negacionistas de la dialéctica. La verdad tiene que ser dicha.

Los universos paralelos de un visionario científico llamado Philip K. Dick.

Cuando en 1957 Hugh Everett publicó su interpretación de la teoría cuántica, donde abría la posibilidad a los universos paralelos, no fue tomado en serio por el mundo científico. Pero un autor de ciencia-ficción salió en su ayuda.

Versión del artículo original de MONTERO GLEZ

TOMADO DE: El País – Sección Elhacha de piedra – 24 de octubre de 2022

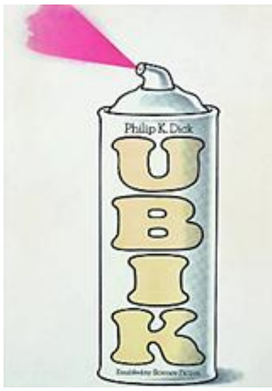
EL AUTOR ESTADOUNIDENSE PHILIP K. DICK EN MAYO DE 1977.
CRÉDITO FOTO: PHILIPPE HUPP.

Para el crítico literario norteamericano Anthony Boucher (1911-1968), la ciencia-ficción es un género que consiste en hacerse la pregunta "¿y si?" durante todo el relato. De esta manera, la ciencia-ficción queda convertida en un juego donde todo depende de que se cumpla una condición.

Cuando esto ocurre, cuando la condición se cumple, entonces se abre la posibilidad de desarrollar un nuevo escenario y, con ello, nuevos conflictos en el relato. Por lo mismo, cada vez que nos hacemos la pregunta "¿y si?" estamos en el umbral de una hipótesis tan literaria como científica: la hipótesis de los universos paralelos.

Para hacernos una idea de la relación entre el género de ciencia-ficción y la interpretación de los mundos múltiples vamos a recurrir a dos personas, la primera es un científico; la otra un escritor. El científico responde al nombre de Hugh Everett III (1930-1982) y se trata del físico que jugó con la idea de los universos paralelos a partir de una original interpretación de la mecánica cuántica. Propuso que se explicase el proceso de medición a partir de la formulación de una teoría, todo lo contrario de lo que venía siendo habitual. Hay que recordar que hasta su hipótesis fueron las mediciones las que determinaban la teoría. Las partículas cuánticas no se comportan de manera usual y, por este motivo, los fenómenos cuánticos y su dinámica atómica no se dejan medir por la mecánica de Newton aplicada al macrocosmos.

Con estas cosas, en 1957 Hugh Everett publicó en "Reviews of Modern Physics" su interpretación de la teoría cuántica; una hipótesis que rozaba lo literario y donde abría la posibilidad a los universos paralelos. Pero claro, aquello fue tomado como una frikada por el mundo científico. Así ocurrió durante más de una década. Durante este periodo de desprecio entró en escena la otra persona.



UBIK (1969), LA NOVELA DE CIENCIA FICCIÓN DE PHILIP K. DICK.

Se trata de Philip K. Dick, un escritor de aspecto desaseado y con pintas de *beatnick* que andaba por Berkeley buscando descripciones exactas de la otra realidad, es decir, la realidad que subyace bajo la apariencia de lo real.

En una de sus historias, los personajes que habitan una pequeña ciudad americana en los años cincuenta están viviendo en una especie de parque temático que se expone en un museo del siglo XXIII. Sin embargo, los habitantes de esta reconstrucción histórica no pueden ver a las personas que se acercan a mirarlos a través de un complejo sistema óptico. No saben que el mundo que los observa es el mundo del siglo XXIII. Ellos siguen en los años cincuenta del siglo XX. Por relatos así, por historias como esta, la aproximación a los universos paralelos de Everett tendrá su confirmación en Philip K. Dick.

Con todo, la obra de Philip K. Dick que más depende de la pregunta "¿y si?" es la novela titulada *El hombre en el castillo* recientemente reeditada en Minotauro. Muchas veces nos hemos hecho la pregunta: "¿Y si los Aliados hubiesen perdido la Segunda Guerra Mundial, cómo sería todo?" Pues bien, Philip K. Dick tiene la respuesta en la que puede ser su mejor novela, una historia donde traspasa el umbral de la realidad y alcanza un universo paralelo.

CAPTURA DE LA ADAPTACIÓN TELEVISIVA DE LA NOVELA 'EL HOMBRE EN EL CASTILLO'.

Esta ucronía fue publicada en 1962 y en ella nos presenta el escenario después de la Segunda Guerra Mundial, cuando los Aliados perdieron la guerra y el Eje Roma-Berlín la ganó gracias a la bomba atómica. La inversión llega hasta el mapa de Norteamérica donde los Estados Unidos quedaron divididos entre una Costa Este sujeta al poder alemán y unos Estados del Pacífico sometidos al Imperio Japonés.

Se trata de una novela que ilustra de manera original la hipótesis de Everett acerca de los universos paralelos y, sobre todo lo demás, nos enseña que tanto Everett como Philip K. Dick fueron espíritus libres, pues, en ambos casos, demostraron que la libertad no consiste en otra cosa que en la capacidad para pensar los propios límites.

Algunos elementos trascendentales en el modo de pensar la filosofía en el siglo XXI.

Byung-Chul Han: el homo digitalis es cualquier cosa menos nadie.

Texto del filósofo surcoreano Byung Chul Han, publicado por primera vez en el libro "Im Schwarm" en el año 2013.

TOMADO DE: Bloghemia / 30 de marzo de 2021

"El mundo del hombre digital muestra, además, una topología del todo distinta. Le son extraños los espacios como los estadios deportivos o los anfiteatros, es decir, los lugares de congregación de masas".

Byung-Chul Han

En la *Psicología de las masas* (1895) Gustave Le Bon, investigador de ese campo, define la modernidad como la «época de las masas». Desde su punto de vista, este fenómeno constituye uno de aquellos puntos críticos en los que el pensamiento humano está en vías de transformación. El presente, dice, es un «periodo de transición y de anarquía». La sociedad futura, en su organización, deberá contar con un nuevo poder, a saber, con el poder de las masas. Y así constata, lacónicamente: «La era en la que entramos será, verdaderamente, la era de las masas»

Le Bon cree que el orden tradicional de dominación decae. A su juicio, ahora ha alcanzado la primacía la «voz del pueblo». Las masas «fundan sindicatos, ante los cuales capitulan todos los poderes, bolsas de trabajo que, pese a las leyes económicas, tienden a regir las condiciones laborales y salariales». Los representantes en el parlamento son solo sus peones. A Le Bon la masa se le presenta como un fenómeno de las nuevas relaciones de dominio. El «derecho divino de las masas» suplantará el del rey. Para Le Bon la rebelión de las masas conduce tanto a la crisis de la soberanía como a la decadencia de la cultura. Las masas, dice Le Bon, son «destructoras de la cultura». Una cultura descansa en «condiciones totalmente inaccesibles a las masas, abandonada a sí misma».

Sin duda hoy nos encontramos en una nueva crisis, en una transición crítica, de la cual parece ser responsable otra transformación radical: la revolución digital. De nuevo, una formación de muchos asedia a las relaciones dadas de poder y de dominio. La nueva masa es el enjambre digital. Este muestra propiedades que lo distinguen radicalmente de las formaciones clásicas de los muchos, a saber, de la masa.

El enjambre digital no es ninguna masa porque no es inherente a ninguna alma, a ningún espíritu. El alma es congregadora y unificante. El enjambre digital consta de individuos aislados. La masa está estructurada por completo de manera distinta. Muestra propiedades que no pueden deducirse a partir del individuo. En ella los individuos particulares se funden en una nueva unidad, en la que ya no tienen ningún perfil propio. Una concentración casual de hombres no forma ninguna masa. Por primera vez un alma o un espíritu los fusiona en una masa cerrada, homogénea. Al enjambre digital le falta un alma o un espíritu de la masa. Los individuos que se unen en un enjambre digital no desarrollan ningún nosotros. Este no se distingue por ninguna concordancia que consolide la multitud en una masa que sea sujeto de acción. El enjambre digital, por contraposición a la masa, no es coherente en sí. No se manifiesta en una voz. Por eso es percibido como ruido.

Para McLuhan el homo electronicus es un hombre de masas:

“El hombre de masas es el morador electrónico del orbe terrestre y a la vez está unido con todos los demás hombres, como si fuera un espectador en un estadio global de deporte. Así como el espectador en un estadio deportivo es un nadie, de igual manera el ciudadano electrónico es un hombre cuya identidad privada está extinguida psíquicamente por una exigencia excesiva”.

El homo digitalis es cualquier cosa menos nadie. Él mantiene su identidad privada, aun cuando se presente como parte del enjambre. En efecto, se manifiesta de manera anónima, pero por lo regular tiene un perfil y trabaja incesantemente para optimizarlo. En lugar de ser nadie, es un alguien penetrante, que se expone y solicita la atención. En cambio, el nadie de los medios de masas no exige para sí ninguna atención. Su identidad privada está disuelta. Se disuelve en la masa. Y en esto consiste también su dicha. No puede ser anónimo porque es un nadie. Ciertamente, el homo digitalis se presenta con frecuencia de manera anónima, pero no es ningún nadie, sino que es un alguien, a saber, un alguien anónimo.

El mundo del hombre digital muestra, además, una topología del todo distinta. Le son extraños los espacios como los estadios deportivos o los anfiteatros, es decir, los lugares de congregación de masas. Los habitantes digitales de la red no se congregan. Les falta la intimidad de la congregación, que produciría un nosotros. Constituyen una concentración sin congregación, una multitud sin interioridad, un conjunto sin interioridad, sin alma o espíritu. Son ante todo Hikikomoris aislados, singularizados, que se sientan solitarios ante el display (monitor). Medios electrónicos como la radio congregan a hombres, mientras que los medios digitales los aíslan.

Los individuos digitales se configuran a veces como colectivos, por ejemplo, las multitudes inteligentes (smart mobs). Pero sus modelos colectivos de movimiento son muy fugaces e inestables, como en los rebaños constituidos por los animales. Los caracteriza la volatilidad. Además, con frecuencia actúan de manera carnavalesca, lúdica y no vinculante. En esto el enjambre digital se distingue de la masa clásica, que como la masa de trabajadores, por ejemplo, no es volátil, sino voluntaria, y no constituye masas fugaces, sino formaciones firmes. Con un alma, unida por una ideología, la masa marcha en una dirección. Por causa de la resolución y firmeza voluntaria, es susceptible de un nosotros, de la acción común, que es capaz de atacar las relaciones existentes de dominación. Por primera vez, una masa decidida a la acción común engendra poder. Masa es poder. A los enjambres digitales les falta esta decisión. Ellos no marchan. Se disuelven tan deprisa como han surgido. En virtud de esta fugacidad no desarrollan energías políticas. Las shitstorms tampoco son capaces de cuestionar las dominantes relaciones de poder. Se precipitan solo sobre personas particulares, por cuanto las comprometen o las convierten en motivo de escándalo.

Según Michael Hardt y Antonio Negri, la globalización desarrolla dos fuerzas contrapuestas. Por una parte, erige un orden capitalista de dominación descentrado, desligado del territorio, a saber, el «imperio global». Por otra parte, produce la llamada «multitud», una composición de singularidades que se comunican entre sí y actúan en común a través de la red. Se opone al imperio dentro del imperio.

Hardt y Negri construyen su modelo de teoría sobre la base de categorías históricamente superadas, tales como clases y lucha de clases. Así, ellos definen la «multitud» como una clase que es capaz de acción común.

“En una primera aproximación la multitud ha de entenderse como composición de todos aquellos que trabajan bajo el dominio del capital y, en consecuencia, potencialmente como la clase que se resiste al dominio del capital”

La violencia que surge del imperio global es interpretada como poder de explotación del otro:

“Es la multitud la fuerza productiva real de nuestro mundo social, mientras que el Imperio es un mero aparato de captura que solo vive fuera de la vitalidad de la multitud —como diría Marx, un régimen vampiro de trabajo muerto acumulado que solo sobrevive chupando la sangre de los vivos.”

Hablar de clase solo tiene sentido dentro de una pluralidad de clases. Y lo cierto es que la multitud es la única clase. Pertenecen a ella todos los que participan en el sistema capitalista. El imperio global no es ninguna clase dominante que explote a la multitud, pues hoy cada uno se explota a sí mismo, y se figura que vive en la libertad. El actual sujeto del rendimiento es actor y víctima a la vez. Sin duda Hardt y Negri no conocen esta lógica de la propia explotación, mucho más eficiente que la explotación por parte de otro. En el imperio propiamente no gobierna nadie. Él constituye el sistema capitalista mismo, que recubre a todos. Así, hoy es posible una explotación sin dominación.

Los sujetos neoliberales de la economía no constituyen ningún nosotros capaz de acción común. La creciente tendencia al egoísmo y a la atomización de la sociedad hace que se encojan de forma radical los espacios para la acción común, e impide con ello la formación de un poder contrario, que pudiera cuestionar realmente el orden capitalista. El socio deja paso al solo. Lo que caracteriza la actual constitución social no es la multitud, sino más bien la soledad (*non multitudo, sed solitudo*). Esa constitución está inmersa en una decadencia general de lo común y lo comunitario. Desaparece la solidaridad. La privatización se impone hasta en el alma. La erosión de lo comunitario hace cada vez menos probable una acción común. Hardt y Negri no se enteran de esta evolución social e invocan una revolución comunista de la multitud. Su libro termina con una transfiguración romántica del comunismo:

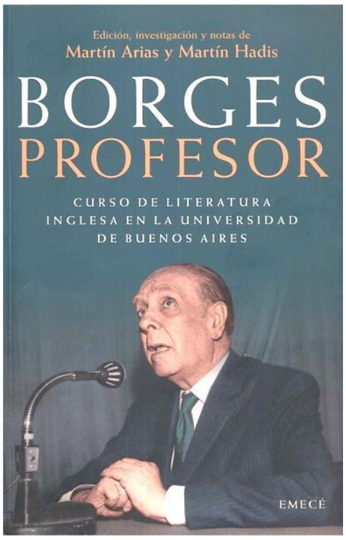
“En la posmodernidad nos hallamos en la situación de Francisco, levantando contra la miseria del poder la alegría de ser. Esta es una revolución que ningún poder logrará controlar —porque biopoder y comunismo, cooperación y revolución, permanecen juntos, en amor, simplicidad, y también inocencia. Esta es la irreprimible alegría y gozo de ser comunistas”.

15 de enero de 2024: Día del Maestro en Venezuela. Homenaje a los maestros.

¿CÓMO ERA EL "PROFE" JORGE LUIS BORGES?

Versión del artículo original de: GIANFRANCO HEREÑA RODRÍGUEZ
FUENTE: Redacción Buen Librero
Enviado vía Facebook por Dr. Víctor Hermoso Aguilar

Del Borges profesor se saben algunas cosas elementales. La principal, sin dudas, es que sus clases eran tan asediadas que quienes no podían asistir mandaban a grabarlas en cintas magnetofónicas. Cintas que luego, muy probablemente, hayan sido sobre grabadas en un descuido que la historia de la literatura parece no perdonar. Sin embargo, algunas de ellas (25) pudieron rescatarse y de ahí que ese grupo de estudiantes fuese el responsable de realizar las transcripciones que fueron la base para la confección del libro *"Borges profesor"*.



Las clases inician con la llegada a Inglaterra de los pueblos germánicos - sajones, jutos y anglos - donde aborda la cuestión de la épica y la poesía anglosajona. Le dedica a estos temas siete clases de 25, más de un cuarto del curso total. Continúa con la vida y obra de (sin repetir y sin soplar): Samuel Johnson, William Wordsworth, Samuel Coleridge, William Blake, Thomas Carlyle, Charles Dickens, Robert Browning, Dante Gabriel Rossetti, William Morris, Robert Louis Stevenson. Todo un lujo.

El libro, que por demás parece ser más que recomendable, recopila una serie de anécdotas a propósito de esta faceta del autor porteño. Una de ellas, cuenta María Esther Vázquez, que Borges estaba dando su materia cuando un muchacho irrumpió en el aula y le dijo que debía interrumpir la clase porque se iba a rendir homenaje al Che Guevara. "Ríndale homenaje después de clase", le dijo el profesor.

Altanero le replicó: "No, tiene que ser ahora y usted se va". Borges le contestó: "Yo no me voy, y si usted es tan guapo, venga a sacarme del escritorio". El muchacho: "Vamos a cortar la luz". Borges, con remate borgeano: "He tomado la precaución de ser ciego. Corte la luz, nomás".

Durante sus clases, era común que Borges solicitara a sus alumnos que prestaran su vista para leer poemas en voz alta. A medida que un alumno leía, Borges iba comentando cada estrofa. En la transcripción original, sin embargo, los poemas recitados por los alumnos habían sido eliminados por completo. Al faltar esos versos, los comentarios de Borges acerca de estrofas sucesivas aparecían apiñados unos sobre otros de modo indescifrable. Para reponer la coherencia, las estrofas recitadas por alumnos fueron buscadas consultando las fuentes. Los comentarios de Borges fueron luego intercalados en una verdadera tarea de montaje. Sin duda, un libro para seguirle el rastro.

La educación se moderniza tan lentamente que nunca dejará de estar anticuada.

Versión del artículo original de MARÍA ANTONIA CASANOVA
Profesora de la Universidad Camilo José Cela y Directora del Instituto Superior de Promoción Educativa (Madrid), Universidad Camilo José Cela

TOMADO DE: The Conversation / 26 de agosto de 2021

Se admite casi de modo unánime que las innovaciones o los simples cambios en educación resultan, quizá, excesivamente costosos, a juzgar por lo poco que se mueven las prácticas docentes en las aulas. En definitiva, por la lentitud de los procesos de asimilación de nuevas opciones didácticas –genéricamente hablando– por parte de los docentes, para actualizar sus intervenciones y ponerlas al día con lo que exige la sociedad de cada momento, ofreciendo posibilidades diversas al alumnado para su adecuada formación de cara a incorporarse a un mundo con características y requerimientos concretos.

La sociedad evoluciona rápidamente, no cabe duda, y si la educación institucional no quiere perder su papel fundamental en el desarrollo y evolución de la persona, debe ponerse en marcha a paso ligero para no perder el tren en este proceso de avance que se visualiza como esencial para el futuro de la ciudadanía en sistemas democráticos en los que la participación activa es imprescindible.

Algunos ejemplos nos pueden servir de evidencia de ese desfase temporal en la actualización escolar con el que comenzamos este texto. Veamos.

Comenius, en 1630, publica su *Didáctica magna*, en la que propone, entre otras muchas innovaciones, la enseñanza cíclica, que se incorpora a nuestro sistema educativo en enero de 1981, después de 300 años.

Podríamos quedarnos en el examen de la obra de Comenius, porque anticipa importantes avances en educación, especialmente en lo referente a la mujer, pero no es el objeto de estas líneas, aunque se recomienda la lectura de este autor.

TEORÍAS ESCUCHADAS MUCHAS VECES

Si revisamos los temas que resultaban problemáticos y de actualidad en el siglo XVII (por ejemplo), tanto en textos de pedagogos con prestigio reconocido, como en los de los “maestros del arte de escribir” (lingüistas, pero maestros, al fin), se observa que aparece la importancia de la familia en la educación, la formación de los maestros, las vacaciones escolares, el número de alumnos por aula, la educación de la mujer, el papel de la inspección… Nos suena, ¿verdad?

Parece que la discusión sobre determinadas cuestiones educativas no termina nunca. No acabamos de aprender de la ciencia y de la experiencia para llegar a resolverlas, a pesar de los muchos avances que han tenido lugar en todos los campos.

EL APRENDIZAJE POR PROYECTOS DATA DE 1918

Damos un salto hasta 1918, año en que Kilpatrick propuso formalmente el método de proyectos como metodología favorecedora del interés de los estudiantes para aprender, al promover la investigación y el trabajo en común, motores del fomento de la curiosidad de niños y jóvenes.

Al aparecer las competencias clave en nuestro sistema educativo, a partir de la LOE, muchos centros optaron por el trabajo y aprendizaje basados en proyectos. Perfecto. Lo grave es que la mayoría de docentes pensó que era un descubrimiento actual. Después de 100 años tras su invención, al fin llegó a las aulas.

LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS YA SON VIEJAS

La informática aparece, inicialmente, hace unos 80 años. No obstante, muchos colegas continúan hablando de nuevas tecnologías al referirse a su aplicación en educación. No sería importante, si no fuera verdad en algunos casos. La situación de pandemia y confinamiento puso de manifiesto la falta de actualización y alfabetización mediática de buen número de docentes, para los que, en efecto, seguían (y siguen) siendo nuevas estas tecnologías.

Si pasamos al campo de la evaluación de aprendizajes, recordemos que la evaluación continua (no los exámenes continuos) está implantada en España desde 1970, en su Ley 14/1970, de 4 de agosto, General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa. Bien, pues todavía hay que insistir en sus beneficios y en la conveniencia de su generalización, al menos en las etapas de educación obligatoria, no selectiva por principio.

El magisterio se resiste a abandonar el modelo de evaluación mediante pruebas puntuales y escritas, para pasar a la evaluación permanente de procesos, de carácter formativo, que permite tomar decisiones inmediatas para superar cualquier disfunción que pueda presentarse, favoreciendo así el aprendizaje personalizado y de éxito en la mayoría del alumnado (educación inclusiva). Han pasado 50 años sin conseguir generalizar el modelo.

La actualidad exige el trabajo en equipo, porque es imposible que una sola persona abarque los saberes que la humanidad ha acumulado y sigue haciéndolo a ritmos inigualables a los de otras épocas.

Esta situación requiere de especialización en determinados campos, pero para avanzar se hace precisa la colaboración de muchos conocimientos, es decir, de muchas personas que han debido formarse –además de los saberes específicos de su carrera profesional– en investigación, trabajo cooperativo, creatividad, pensamiento divergente y crítico, control de emociones, apertura a la innovación, etc.

EL ACCESO A LA INFORMACIÓN NO ES EL PROBLEMA

Todo debe derivar en un modelo educativo diferente al de siglos pasados en los que la transmisión de información resultaba fundamental. Hay que ser conscientes de que acceder a un conocimiento concreto, en estos momentos, implica solamente introducir la palabra precisa en un buscador informático y en segundos se dispone de millones de datos relacionados con lo solicitado. La información no es el problema de nuestra sociedad, lo es la capacidad de discernimiento referida a la enorme cantidad de información recibida.

Es hora de avanzar sin miedo, de progresar en métodos, organización, evaluación, contenidos, metas realmente significativas para el sistema que lo sean también para la población. Si no se consigue un modelo que capte el interés y despierte la curiosidad de quienes se forman en él, difícilmente resultará funcional para la vida que nos toca abordar en este tiempo cambiante, inseguro, con la incertidumbre como futuro.

Si la formación inicial del magisterio continúa llevándose a cabo con métodos tradicionales, el maestro, al llegar a su aula por primera vez, reproducirá lo que hicieron con él cuando ingresó en la escuela; es decir, cada maestro que se incorpora como nuevo docente retrocede veinte años con respecto a la fecha de su titulación. Sale de la carrera sin haber adquirido las competencias que actualmente se precisan para educar. Y así continuará si no cambian las cosas radicalmente.

SE NECESITAN COMPETENCIAS PARA EL MUNDO ACTUAL

La educación debe garantizar la adquisición de competencias que aseguren a la persona el dominio sobre la toma de decisiones que deberá realizar día a día con cierta seguridad de acierto. Para ello no es válido un sistema memorístico y rutinario, creador de sujetos sin criterios propios ni independencia de juicio, sino otro que ayude a la autonomía y a la creatividad, con las que emprender la vida mejor para cada sujeto en cada circunstancia.

¿Tardaremos muchos años en tomar las decisiones necesarias? ¿Hasta cuándo estaremos haciendo perder el tiempo a las generaciones jóvenes? ¿Todavía no sabemos lo suficiente como para poner en marcha un sistema acorde con la realidad actual?

Esperemos que en esta tercera década del siglo XXI seamos capaces de adecuar la educación a las necesidades de la persona y de la sociedad.

Artículos enviados por Dr. EDGAR REDONDO vía Facebook:

EDGAR REDONDO

Nació en Caracas, Venezuela. Actualmente residenciado en Madrid, España. Egresó como Bachiller del Liceo Carlos Soublette. Realizó estudios universitarios de Pre y Postgrado en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL), Universidad Nacional Abierta (U.N.A.), Universidad de Carabobo, Universidad de Málaga, Universidad de Córdoba, Universidad del Sur Cancún. Se ha desempeñado como docente en Universidad de Carabobo, Universidad Central de Venezuela y Universidad Nacional Abierta.

De Vuelta a la Vida.

Este corto relato es de la genial pluma de mi admirado amigo Antonio Osorio.

Como siempre nos deja una gran reflexión para nuestras vidas...

De Vuelta a la Vida

Carmen Julia había estado taciturna los últimos días, una mujer de buen ver y de mejor tamaño, de voz suave, delicada en sus gestos, una dama, pero en ella había un dejo de tristeza, había tomado una decisión; entró en su vestier, se despojó de cada una de sus prendas, quedó al desnudo frente al espejo de cuerpo entero, en su cabello, que siempre había sido oscuro con los retoques propios de la coquetería femenina, pudo ver los hilos de plata que nacían en su frente, el rostro con un atisbo de placidez, las ojeras pronunciadas y el brillo de los ojos que se iba apagando, su piel ya no era prístina, no tenía la lozanía que le había dado la naturaleza y las cremas hidratantes, debajo del mentón un pequeño colgajo, los nasogenianos pronunciados, vio una cara triste y el cuello flácido, sus brazos también flácidos, miró las pieles caídas que resbalaban por sus costados, había perdido la turgencia de sus senos, la aureola ya no era del rosa brillante que siempre había tenido, miró los pezones como tratando de mirar al suelo.

Presionó su labio inferior con los dientes, y ese gesto de no sé qué hacer, en su abdomen las estrías hacían un drapeado, unas manchas, la vejiga cayendo suavemente, y hasta sintió unas gotas de orine que fluían de manera involuntaria, las caderas se atiborraban en pequeños montículos y los muslos, aquellos sus muslos de porcelana, habían perdido carne y brillo. Miró las pequeñas líneas azules desparramándose sobre sus piernas, los pies secos, le pareció que había visto pequeñas cáscaras de piel levantada, alzó la cabeza, la movió de un lado a otro, estaba a punto de llorar, pero la decisión estaba tomada, no había vuelta atrás; alargó la mano sobre un pomo de frío mármol, miró en el fondo del espejo, una anciana cubierta de canas y de rostro consumido, apenas se notaba un toque de carmín en los labios, se iba y venía, era el envanecimiento del tiempo futuro.

Y miró la imagen más cercana, la que tenía allí a su frente, quiso destapar el pomo, apenas levantó la tapa un efluvio ácido del láudano, y al lado reposaba la taza, blanca sobre un plato del mismo color y unos pequeños arabescos que hablaban de la finura de aquel recipiente, era parte de una vajilla, la había recibido el día de su boda con Modesto, aquel hombre bueno, de cierta posición económica, pero macilento, un hombre que no tomaba decisiones, y allí habían nacido sus dos hijos mayores, era el llamado de la naturaleza y nada más.

Aún conservaba la alianza en su dedo izquierdo, con suavidad se la quitó y la colocó a un lado de aquella taza con agua humeante, no le temblaron las manos, retiró por completo la tapa de aquel pote ambarino y quiso volcar unas gotas sobre el agua que allí esperaba, y a su oído llegó una voz, “Carmen Julia, ¿qué haces?”, se hizo de una sola pieza, “¿acaso tú crees que eres la que está en ese espejo?, ¿quién te ha dicho a ti que el espejo no miente? Esa no eres tú, ese es tu pensamiento, un pensamiento producto del miedo, de los complejos, de esa angustia diaria, de la ansiedad que te aturde día a día, es la depresión que te acompaña en estos últimos tiempos, ¿acaso allí estás mirando tu corazón y tus vísceras?, ¿acaso estás observando tus sentimientos?, ¿lo que realmente eres tú?, esa belleza que siempre te ha acompañado, que ha desviado la mirada de los hombres. Pero tú en la locura quieres cometer lo más abyecto de un ser humano, romper con la realidad que te ha acompañado, ¿acaso no recuerda que tienes hijos y nietos?, ¿o es que todo se ha acabado en ti?, ¿no crees en verdad que la tristeza es una mala consejera?, mira en tu interior, mírate sana, sin dolores, sin pobreza, sin miseria, ¿por qué te empeñas en romper el tabernáculo?”.

Se hizo un silencio, miró hacia atrás, y allí vio una sombra que se desvanecía, apenas oyó una última indicación, “cubre ese espejo, coloca sobre él el velo de la esperanza, y ven a la fiesta de la vida. Allí están tus ancianos padres, se toman de las manos llenas de manchas sepias, esa es tu esencia, y verás a tu existencia en la cara de tus hijos y en los niños que corren, vuelve otra vez, tú no mereces sus lágrimas”. Y allí quedó en el lavabo trazos de un futuro incierto, la muerte sumergida en la taza de láudano.

La Ciencia es mucho más que bellas palabras….

Venga, es que la Ciencia es mucho más que bellas palabras….

"El proceso de aprendizaje es esencial para nuestras vidas. Todos los animales superiores lo buscan deliberadamente. Son curiosos y efectúan experimentaciones.

Un experimento es una especie de inofensiva carrera de pruebas de alguna acción que tendremos que ejecutar en el mundo real, y es esto tanto si es efectuada en un laboratorio por científicos o por cachorros de zorra fuera de su terreno.

El científico experimenta y el cachorro juega; ambos aprenden a corregir los errores de juicio en un terreno en que los errores son fatales. Puede que sea esto lo que les da este aire de felicidad y libertad al poner en práctica estas actividades.

Es por esto que debemos comprender que por su misma naturaleza las predicciones pueden estar a veces equivocadas. Sólo así podemos aprender en tanto que individuos y especies. La ciencia aprende del mismo modo.

Precisamente éste es el paso que dieron Galileo y Francis Bacon hace más de trescientos años, paso que dio origen a la ciencia actual. Porque hasta que pusieron en marcha la Revolución Científica, los hombres creían que sólo un profundo discernimiento intelectual podía comprender la mecánica de la Naturaleza. Galileo y Bacon añadieron a esta exigencia de la razón la nueva exigencia de los datos empíricos.

Desde entonces, la verificación de una explicación científica ha sido siempre en último término empírica: ¿concuerda con los hechos?

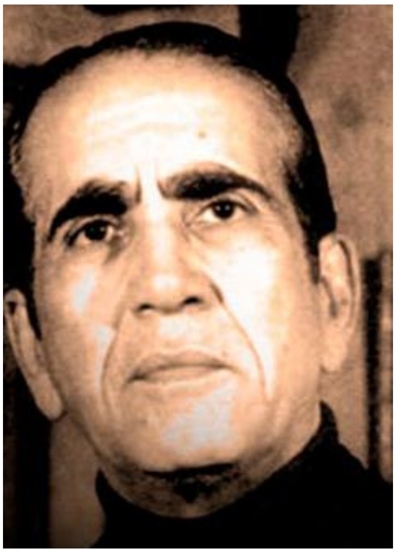
La ciencia ha sido concebida, aunque inconscientemente, como un proceso de aprendizaje, porque recurrir a la realidad empírica en la especulación es admitir la posibilidad de error. La ciencia es un mecanismo de predicción en proceso de incesante autocorrección. El camino que va de la astronomía de Ptolomeo a la de Newton y luego a la de la relatividad es precisamente una serie de estadios de aprendizaje en que cada uno de éstos corrige el pequeño pero demostrable error que se ha abierto entre la predicción y los hechos; no debemos despreciar los errores, son el humus sobre el que se desarrolla el proceso de la vida".

Extracto del libro **“El sentido común de la ciencia”**, de Jacob Bronowski

Venezuela, personajes, anécdotas e historia.

Pedro Antonio Ríos Reyna

Versión artículo original de: YENNIFER VILLA



(1905-1971)

El 6 de noviembre de 1905 nace en Colón, estado Táchira, Pedro Antonio Ríos Reyna, uno de los compositores y directores de orquesta más destacados de Venezuela.

Ríos Reyna fue miembro fundador de la Orquesta Sinfónica de Venezuela, que presidió en los períodos 1950-1959 y 1967-1971.

Murió el 13 de febrero de 1971 en Nueva York EEUU, donde había ido a asuntos relacionados con la Orquesta.

En medio de un crisol de estancias culturales emerge sobre Caracas el teatro Teresa Carreño, orgullo venezolano, majestuoso recinto pleno de recursos para satisfacer las más elevadas exigencias del arte escénico mundial.

Su origen se remonta al sueño del insigne músico Pedro Antonio Ríos Reyna, promotor de un proyecto para construir una sala de conciertos que fuese la sede de la Orquesta Sinfónica Venezuela.

En el ocaso de los años sesenta, la idea ya había cobrado el suficiente vigor para convertirse en realidad.

En homenaje a este insigne soñador y músico este recinto construye una sala con su nombre, la Sala Ríos Reyna, la cual tiene el ambiente más importante y sofisticado del complejo.

Este espacio cuenta con una capacidad de público de 2.400 personas, fue concebido como sala de usos múltiples, con volumen y acústica.

Además, la Sala Ríos Reyna tiene la capacidad variable para diversos eventos como teatro de prosa, recitales de solistas, música de cámara, conciertos, ópera, operetas, ballet clásico y cualquier otro tipo de espectáculo.

GALERÍA

Hajer Bahouri

Nació el 30 de Marzo de 1958 en Túnez, Túnez.

Hajer Bahouri estudió su licenciatura en la Universidad de Túnez, donde se especializó en matemática. Entró en la Universidad en 1977 y se graduó en 1979. Ella obtuvo el Premio del Presidente por el mejor desempeño a nivel nacional en Túnez.

Después de obtener su primer título, Bahouri fue a Francia para continuar sus estudios de matemática en París. Entró en la Universidad de París XI (París-Sud) en Orsay y, en 1980, después de un año, fue galardonada con el Diploma de Estudios Avanzados de Matemática. El Diploma de Estudios Avanzados es el Diplôme d'études approfondies, que es equivalente a una Maestría. Luego continuó sus estudios en la Université de París XI (París-Sud) emprendiendo una investigación para la obtención del Doctorado, aconsejada por Serge Alinhac.

Hablando un poco de Serge Alinhac, nació en 1948. Obtuvo su doctorado en 1975 por la Université Paris-Sud presentando la tesis *Problèmes de Propagations Hyperboliques Singuliers*. Después de enseñar en la Universidad de París VII y en la Universidad de Purdue en los Estados Unidos, obtuvo un cargo como profesor en la Université de París XI (París-Sud) en 1978. Su área matemática de interés fue las ecuaciones diferenciales parciales. Tutorada por Serge Alinhac, Bahouri obtuvo su Doctorado en 1982 presentando la tesis *Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs à symbole principal réel*. Su primer trabajo, publicado en 1983, de 27 páginas, fue *Non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs à symbole principal réel* que contiene los resultados de su tesis. La dirección que Bahouri indicó en este trabajol es Université de París XI (París-Sud). Jorge Hounie escribe en un informe sobre este trabajo:

> *Este trabajo se refiere a la no singularidad en el problema de Cauchy no característico para operadores diferenciales de segundo orden con coeficientes iguales. El autor demuestra tres teoremas dando condiciones suficientes para la no unicidad (se dice que P tiene no singularidad si hay funciones u iguales, tal que Pu+au=0, u desaparece en el lado negativo de la superficie inicial S y no desaparece sobre cualquier subconjunto abierto del lado positivo de S). Estas condiciones llevan solamente sobre la parte principal de p y están relacionados con propiedades de "pseudo convexidad" de S y en un caso de la naturaleza de los valores propios de la matriz fundamental de p en los puntos de características doble. El artículo amplía resultados debido a la Alinhac, y a Alinhac y Baouendi.*

Después de obtener su Doctorado, Bahouri fue a la École Polytechnique de Palaiseau (un suburbio al sur de París), siendo designada como investigadora en 1982. Después de dos años en la École Polytechnique, fue nombrada en 1984 como profesora asistente en la Universidad de París XI (París-Sud) y también en la Universidad de Rennes I. Su segundo trabajo *Non prolongement unique des solutions d'opérateurs "Somme de carrés"* tenía por dirección la École Polytechnique y apareció en 1986. Como el título indica, el documento muestra la falta de continuación única para los operadores de la "suma de cuadrados". Ella añade el siguiente reconocimiento a este trabajo:

> *Es a S. Alinhac a quien debo mi interés por este tema. Le agradezco mucho. También me gustaría agradecer a Jean Pierre Bourguignon por los consejos que me ha dado.*

Es de detallar que para este momento, Jean Pierre Bourguignon, un graduado de la École Polytechnique, se desempeñaba en el Centro de Mathématique el cual era administrado por la École Polytechnique y situado en las instalaciones de la École Polytechnique en Palaiseau. Él se interesaba por la geometría diferencial, las ecuaciones diferenciales y la física matemática.

En 1987 dos trabajos de Bahouri fueron impresos y ella obtuvo su Doctorado de la Université de París XI (París-Sud). Su tesis para este grado fue *Unicité, non unicité et continuité Hölder du problème de Cauchy pour des équations aux dérivées partielles: propagation du front d'onde C^p pour des équations non linéaires* y otra vez fue tutorada por Serge Alinhac. Uno de estos dos trabajos de 1987, escrito en colaboración con L. Robbiano, fue *Unicité de Cauchy pour des opérateurs faiblement hyperboliques*. En este los autores escriben:

> *Presentamos, en este trabajo, dos teoremas de la singularidad del problema de Cauchy para operadores hiperbólicos con respecto a una superficie. Desde hiperbolicidad con respecto a una superficie es una condición necesaria para el problema de Cauchy para ser bien planteado (Teorema de Lax-Mizohata), la mayor parte de los resultados sobre este tipo de operador trata tanto con la cuestión de la existencia y de la unicidad.*

Después de ocupar los cargos de profesora asistente en Francia durante cuatro años, en 1988 regresa a Túnez y fue nombrada como Profesora (de 2da clase) en la Facultad de Ciencias en Túnez, Université des Sciences, des técnicas et de Médecine de Túnez (Túnez II). En 1993 fue ascendida a Profesora (de 1ª clase) en la Facultad de Ciencias en Túnez y en 2001 fue honrada con el galardón "Médaille du Mérite" de Túnez.

En agosto de 2002 se llevó a cabo el Congreso Internacional de Matemáticos en Beijing, China, y Bahouri fue participante invitada. Su trabajo *Quasilinear wave equations and microlocal analysis*, escrito conjuntamente con Jean-Yves Chemin, fue publicado en el volumen 3 del *Acta* del Congreso.

Jean-Yves Chemin ha colaborado con Bahouri en 27 de sus 62 publicaciones.

Chemin nació en 1959 en Rouen, Francia y obtuvo su doctorado por la Universidad de París XI (París-Sud) en 1986. En ese año se unió al Centro de Mathématique que se mencionó antes al dar detalles sobre Jean Pierre Bourguignon. Obtuvo su Doctorado en 1989 presentando una tesis sobre singularidades de las *ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas no lineales*.

Bahouri continuó en la Cátedra de la Facultad de Ciencias en Túnez, pero en el periodo 2002-2004 también enseñó cursos en la École Polytechnique, en Palaiseau. En 2003 ella fue la Directora del recién creado *Laboratoire ecuaciones aux Dérivées Partielles* en la Universidad de Túnez. En 2010 ella dejó sus cargos en Túnez y regresó a Francia cuando fue nombrada como Directora de Investigación (de 1ª clase) del Centro Nacional de la recherche scientifique, siendo asignada al Laboratoire d'Analyse et Mathématiques Appliquées, Universidad Paris-Est-Créteil Val-de-Marne.

En 2016 a Bahouri se le otorgó el Premio Paul Doistau-Émile Blutet de la Academia Francesa de Ciencias. Este prestigioso premio se entrega a un matemático cada año par (con algunas excepciones de otorgamiento en años impares) desde 1958. Por ejemplo, Pierre-Louis Lions recibió el premio en 1989 y Wendelin Werner en 1999.

Por último, sobre el libro *Fourier analysis and nonlinear partial differential equations* (Análisis de Fourier y ecuaciones en derivadas parciales no lineales) el cual Bahouri escribió en colaboración con Jean-Yves Chemin y Raphaël Danchin. En el informe sobre este libro, escrito por Peter Massopust (referencia [4]), se lee:

> *Este libro tiene la intención de preparar al lector sobre cómo aplicar herramientas del análisis de Fourier para resolver directamente los problemas que surgen en la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales no lineales. Los autores tienen tres objetivos: en primer lugar, presentan una descripción detallada de las herramientas y de los métodos de análisis armónico que actualmente se utilizan para resolver ecuaciones en derivadas parciales no lineales. En segundo lugar, transmiten al lector la simplicidad de la descomposición de Littlewood-Paley, y en tercer lugar, presentan algunos ejemplos específicos de cómo se emplean tales herramientas de análisis de Fourier en situaciones concretas. Consideran, entre otros, las ecuaciones de evolución como las ecuaciones de transporte y calor, sistemas hiperbólicos simétricos lineales o cuasi-lineales, ecuaciones de ondas lineales, semi-lineales y cuasi-lineales, ecuaciones de Schrödinger semi-lineales y lineales. ...*
>
> *A través del libro, el lector se expone a discusiones detalladas, derivaciones rigurosas y a gran cantidad de herramientas analíticas de Fourier. La presentación está bien estructurada y fácil de seguir. El objetivo establecido por los autores, es decir, presentar las herramientas analíticas de Fourier de una manera tal que pueden ser aplicadas directamente a la solución de ecuaciones diferenciales no lineales, se cumple para todas las aplicaciones estudiadas. Cada capítulo concluye con una sección sobre referencias y observaciones. Aquí, el lector es introducido a la literatura que es relevante para cada capítulo y presentado con cortos comentarios históricos acerca de los métodos presentados en el capítulo. Para comodidad del lector, se da una lista de notas al final de la sección de referencias. Este es un libro de texto para estudiantes graduados o de pregrado avanzados con buena base en análisis real y funcional. Sin embargo, incluso los investigadores activos o matemáticos interesados en la aplicación de herramientas analíticas de Fourier encontrarán muy útil este libro.*

Referencias.-

Artículos:

1. Hajer Bahouri, *Université Paris-Est, Marne-La-Vallée*. http://perso-math.univ-mlv.fr/users/bahouri.hajer/
2. Hajer Bahouri: CV, *Université Paris-Est, Marne-La-Vallée*. http://perso-math.univ-mlv.fr/users/bahouri.hajer/documents/CV.pdf
3. Hajer Bahouri: List of publications, *Université Paris-Est, Marne-La-Vallée*. http://perso-math.univ-mlv.fr/users/bahouri.hajer/documents/listedepublications2014.pdf
4. P R Massopust, Review: Fourier analysis and nonlinear partial differential equations, by Hajer Bahouri, Jean-Yves Chemin and Raphaël Danchin, *Mathematical reviews* MR2768550 **(2011m:35004).**

Versión en español por R. Ascanio H. del artículo en inglés de J. J. O'Connor y E. F. Robertson sobre "Hajer Bahouri" (Marzo 2019).
Fuente: MacTutor History of Mathematics [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bahouri.html].