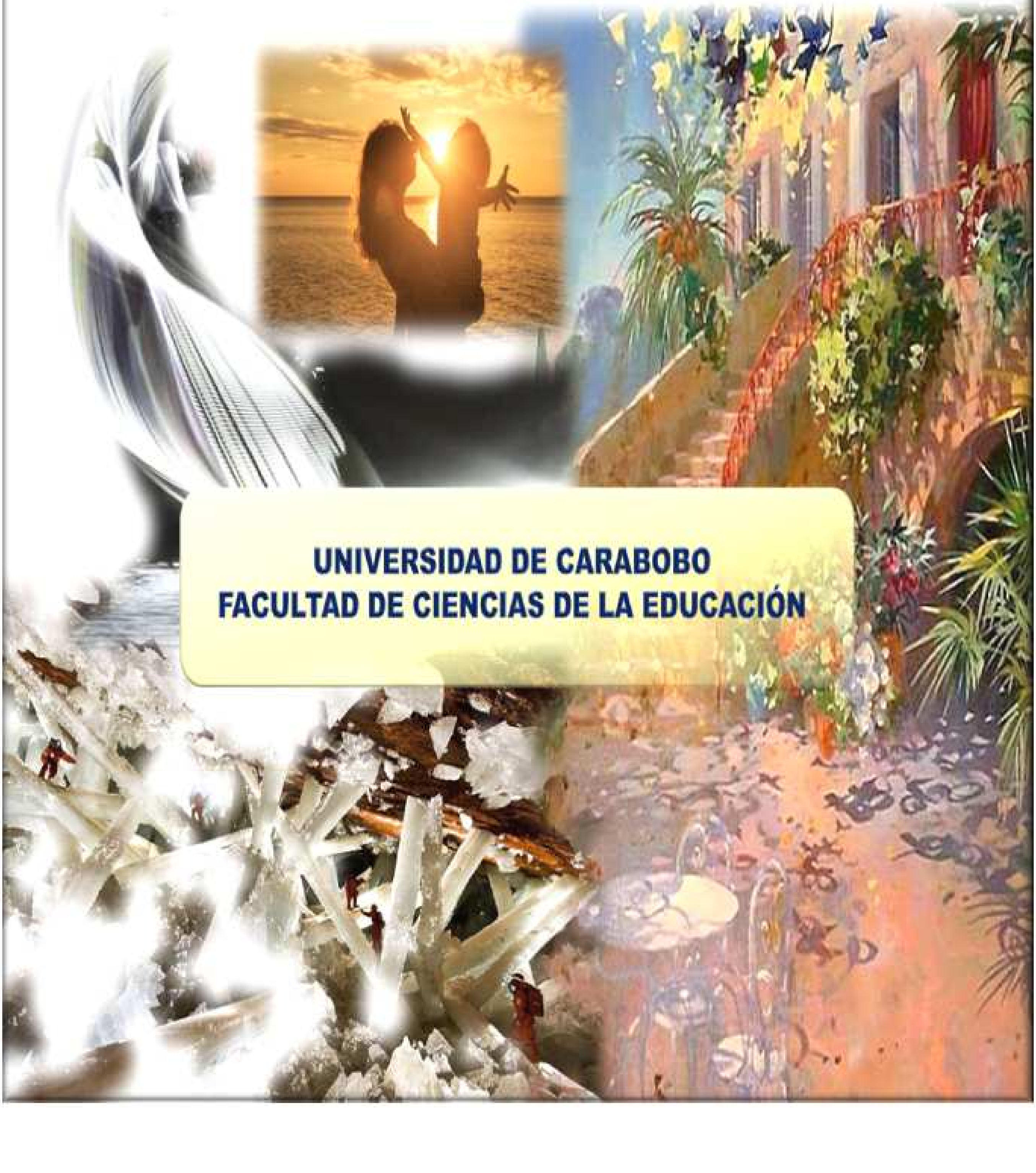
HOMOTECIA

CÁTEDRA DE CÁLCULO - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA y FÍSICA – FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN – UNIVERSIDAD DE CARABOBO

© Rafael Ascanio H. – 2009. Hecho el Depósito de Ley. Depósito Legal: PPi2012024055 – I. S. S. N.: 2244-7385

E- mail: homotecia2002@gmail.com - Nº 5 – AÑO 17 Valencia, Jueves 2 de Mayo de 2019



HOMOTECIA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y FISICA - FACE - UC

ADVENTUS NOVUS CALCULUS

CÁTEDRA DE CÁLCULO

Índice

LAS IDEAS Y OPINIONES DE LOS AUTORES DE LOS ARTÍCULOS QUE PUBLICAMOS EN HOMOTECIA SON RESPONSABILIDAD DE LOS MISMOS. SI ALGÚN LECTOR TIENE OBJECIONES SOBRE ÉSTAS, AGRADECEMOS NOS HAGA LLEGAR SUS COMENTARIOS A TRAVÉS DE NUESTRA DIRECCIÓN ELECTRÓNICA, homotecia2002@gmail.com.

Diseño de Portada y Montaje Gráfico: R. A. A. H. Tema motivo imagen de portada: Día de las Madres en Venezuela.

La mayoría de las imágenes que aparecen en esta publicación, son obtenidas de Google, Facebook y *MSN*, vía Internet.

Para el acceso a todos los números publicados de la Revista HOMOTECIA, conectarse al enlace: http:/servicio.bc.uc.edu.ve/homotecia/index.htm > Sección: MULTIDISCIPLINARIAS

Revista HOMOTECIA
© Rafael Ascanio H. – 2009
Hecho el Depósito de Ley.
Depósito Legal:
PPi2012024055
I. S. S. N.: 2244-7385

e-mail:
homotecia2002@gmail.com

Publicación Mensual
Revista de acceso libre

Publicada por:
CÁTEDRA DE CÁLCULO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DE CARABOBO

DIRECTOR–EDITOR:
Profesor Rafael Ascanio Hernández

SUB-DIRECTOR:
Profesor Próspero González Méndez

COORDINADORES DE PUBLICACIÓN:
Profesor Rafael Ascanio Hernández
Profesor Próspero González Méndez

COMISIÓN
ARCHIVO Y REGISTRO HISTÓRICO

Profesora María del Carmen Padrón
Profesora Zoraida Villegas
Profesora Ivel Páez

COMISIÓN REVISORA DE MATERIAL A PUBLICAR:

Profesora Elda Rosa Talavera de Vallejo
Profesora Omaira Naveda de Fernández
Profesor José Tadeo Morales

Nº 5 - AÑO 17 - Valencia, Jueves 2 de Mayo de 2019

EDITORIAL

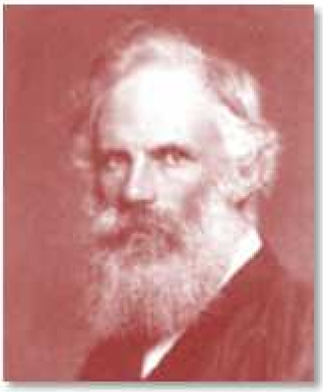
Hemos visto que en Venezuela en los últimos años, en todos los niveles del sistema educativo, se han sucedido continuas reformas educativas, evidenciadas por los constantes cambios en los currículos y específicamente en los programas de las asignaturas que son tradicionales encontrar en ellos así como el agregado de otras materias que tienen por objetivo fijar los lineamientos del proyecto político (y no ideológico) que las autoridades nacionales tratan de perpetuar en el país mediante lo que ellos han dado por llamar proceso revolucionario pero cuyas características hacen ver que el mismo no se corresponde con ninguna revolución y mucho menos involucra un ambiente socialista; solo es una manera de gobernar particular de un pequeño grupo, ya hoy convertido en una oligarquía solo pendiente de cuidar sus propios intereses y manipulando la idiosincrasia de las masas portando la careta del populismo.

¿Por qué tantas y tan seguidas reformas educativas? Hay que reconocer que en los últimos cien años, la educación venezolana fue desarrollada según lo que se esperaba en un país tercermundista (o anti-desarrollado) que económicamente era mono-dependiente sustentándose mayoritariamente en los beneficios que le proporcionaba la explotación petrolera. Así históricamente se desenvolvió algo displicente en cuanto a productividad, ciencia, tecnología, salud, alimentación, medicinas, educación y otros aspectos, ya que ante cualquier deficiencia interna usaba los réditos de la renta petrolera para *importar* lo que necesitara (fuera material, fuera de fuente intelectual).

Pero, tal como señaláramos en una editorial pasada, Venezuela ha estado sufriendo en la última década una *descapitalización intelectual y profesional*, que ha visto alejarse del país hacia otras naciones la mayoría de lo mejorcito y lo no tan mejorcito de los recursos humanos en salud, tecnología, educación y otras disciplinas que se habían podido formar dentro de nuestro siempre débil sistema educativo, porque las restricciones en cuanto al ejercicio de las profesiones y las normativas económicas que rigen los ambientes laborales y comerciales les han impedido obtener beneficios que les permitan disfrutar de la solvencia a la que deberían tener acceso y derecho correspondiéndose con sus esfuerzos académicos. Fue la solución encontrada dentro un país donde actualmente el mérito proveniente de la actividad académica y laboral pasó a lo más bajo de lo que llamaríamos un segundo plano para las condiciones que permitan a un venezolano tener éxito económico y social (devaluación de la meritocracia). La juventud venezolana actual tiene bien claro y se convenció, que para poder sobrevivir en las condiciones de la sociedad en la que participa, la formación académica ahora es considerado es el último factor social que podría ofrecerle oportunidades; así vemos como aumenta la deserción en los liceos pero aun más en las instituciones universitarias, sean públicas o privadas, y sumamente grave en el área laboral que capta nuestros intereses: *la educación*. Vemos con preocupación cómo ha disminuido significativamente el número de estudiantes en los institutos pedagógicos universitarios y en las universidades los aspirantes a ser docentes. Posiblemente esto lo motive los bajos sueldos que suelen devengar los docentes en las instituciones educativas de cualquier nivel y sector, produciendo un déficit de personal adecuadamente preparado para ejercer la docencia.

Cuando se analiza la situación del país originada por la descapitalización intelectual y profesional, muchos son de la opinión que la oligarquía gobernante del país le interesa este éxodo ya que posiblemente la mayoría de los que emigran, si no todos, son adversos, contrarios y opositores a su gobierno y les interesa que se alejen de las instituciones donde ellos ejercen influencia y ubicar ahí empleados que ellos puedan controlar. Aun así no son inconscientes de lo grave de la situación que vivimos. Las reformas educativas probablemente las realizan pensando básicamente en perpetuarse en el poder. Buscan quizás cómo llegar rápidamente a la transformación ideológica a su favor de la población del país. Pero aun se percaten de ello o no, tendrá mucho que ver con el futuro histórico social de la nación, principalmente en cuanto a productividad, ciencia, tecnología, salud, alimentación, medicinas, educación, entre otros, que con la situación temporal que vivimos

Los Grandes Matemáticos



GEORGE FRANCIS FITZGERALD
(1851 - 1901)

Nació el 3 de agosto de 1851 y murió el 22de febrero de 1901; ambos momentos en Dublin, Irlanda.

Físico. Explicó correctamente el fracaso del experimento de Michelson y Morley acerca de la velocidad de la luz en base a una contracción de longitudes experimentada por los sistemas dinámicos cuya velocidad es próxima a la de la luz, y construyó un conjunto de transformaciones de sistemas de coordenadas en los que Einstein se basó para construir su teoría de la relatividad restringida.

Recibió su educación en el *Trinity College* de Dublín, lugar en el que permaneció durante toda su vida. Partidario de realizar experimentos más que en publicar sus resultados, que a menudo prefería exponer en coloquios informales con sus alumnos y colegas, sus publicaciones son escasas, y pese a todo ejerció gran influencia sobre los hombres de ciencia de la época.

Tras el fracaso en la detección del éter que supuso el experimento de interferencia de Michelson y Morley, FitzGerald sostuvo que en el seno de un campo electromagnético los cuerpos experimentan una contracción en la dirección del movimiento cuya intensidad depende de la relación entre su velocidad y la de la luz. Esta explicación permitía, por una parte, salvar la consistencia de la teoría del éter, y por otra explicar el resultado negativo de aquel experimento. La nueva situación física exigió modificar las transformaciones dinámicas de los sistemas de coordenadas, imperantes desde que fueron postulados por Galileo. El físico holandés Lorentz llegó a unas transformaciones similares, y las hoy conocidas como transformaciones de Lorentz-FitzGerald fueron la base en la que Einstein basó, junto con la hipótesis de la constancia de la velocidad de la luz en cualquier situación dinámica, su teoría de la relatividad restringida, que supuso el abandono del éter como teoría física.

Otras investigaciones de este autor le llevaron a proponer que la cola de los cometas se compone de diminutos fragmentos de roca y que la radiación solar es la responsable de que ésta se encuentre siempre en dirección opuesta al Sol.

Autor: JJ.
FUENTE: Texto extraído de www.mcnbiografias.com

Reflexiones

"La Educación consiste en enseñar a los hombres no lo que deben pensar sino a pensar".

CALVIN COOLIDGE

Aportes al conocimiento

Elementos Básicos del Cálculo Integral (11)

Por: Prof. Rafael Ascanio Hernández - Prof. Próspero González Méndez

ÍNDICE

INTEGRAL INDEFINIDA. LAS TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN.

RESOLUCIÓN DE INTEGRALES DE FUNCIONES RACIONALES (PARTE I)

Si se tiene una función $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, en la que $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios con $g(x)\neq 0$, esta recibe el nombre de ***función racional***. Al ser $f(x)$ y $g(x)$ polinomios, los exponentes de la variable no son negativos ni fraccionarios.

***** Si el grado de $f(x)$ es menor que el de $g(x)$, $gr[f(x)]<gr[g(x)]$, $F(x)$ se le identifica como una ***función racional propia***.

***** Si el grado de $f(x)$ es mayor que el de $g(x)$, $gr[f(x)]>gr[g(x)]$, $F(x)$ se le identifica como una ***función racional impropia***.

***** Si los grados son iguales, $gr[f(x)]=gr[g(x)]$, a $F(x)$ se le identifica como una ***función racional simple***.

INTEGRACIÓN POR DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES.-

Esta técnica también es conocida como **integración por descomposición en fracciones parciales**. Se aplica específicamente cuando la función racional es propia, $gr[f(x)]<gr[g(x)]$. Cuando se dan los otros dos casos, primero se debe realizar una ***División de Polinomios***.

Para resolver integrales que tienen integrando compuestos por funciones racionales, se sustituye este tipo de funciones por una fracción simple o por una suma de fracciones simples, según los cuatro casos que se pueden presentar y que a continuación se describen.

Casos que se presentan en la integración por descomposición en fracciones simples.-

1º) Cuando el polinomio que conforma el denominador se puede descomponer como el producto de factores lineales de primer grado que no se repiten, a cada factor le corresponde una fracción simple de la siguiente manera:

$$\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}$$

Ejemplo: $\displaystyle\int\frac{2dx}{x(x-1)(x+2)}=\int\frac{Adx}{x}+\int\frac{Bdx}{x-1}+\int\frac{Cdx}{x+2}.$

Los valores de *A*, *B* y *C* pueden ser calculados por la conocida técnica de determinar su valor por ***coeficientes indeterminados.***

2º) Cuando el polinomio que conforma el denominador se puede descomponer como el producto de factores lineales de primer grado y algunos se repiten, a cada factor que se repite le corresponde una suma de fracciones simples de la siguiente manera:

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n(x-b)^m}=\frac{A_0}{(x-a)^n}+\frac{A_1}{(x-a)^{n-1}}+\cdots+\frac{A_n}{x-a}+\frac{B_0}{(x-b)^m}+\frac{B_1}{(x-b)^{m-1}}+\cdots+\frac{B_m}{x-b}$$

Ejemplo: $\displaystyle\int\frac{2dx}{x^3(x-1)^2}=\int\frac{Adx}{x^3}+\int\frac{Bdx}{x^2}+\int\frac{Cdx}{x}+\int\frac{Ddx}{(x-1)^2}+\int\frac{Edx}{x-1}$

3º) Cuando el polinomio que conforma el denominador se puede descomponer como el producto de factores cuadráticos irreducibles y distintos, a cada factor cuadrático le corresponde una fracción simple de la forma:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

Ejemplo: $\displaystyle\int\frac{3xdx}{(x^2+4)(x^2+6)}=\int\frac{(Ax+B)dx}{x^2+4}+\int\frac{(Cx+D)dx}{x^2+6}$

4º) Cuando el polinomio que conforma el denominador se puede descomponer como el producto de factores cuadráticos irreducibles y algunos se repiten, a cada uno de éstos le corresponde una suma de fracciones simples de la siguiente manera:

$$\frac{f(x)}{(ax^2+bx+c)^n}=\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Ejemplo: $\displaystyle\int\frac{(4x^2-5)dx}{(x^2+5)^3}=\int\frac{(A_3x+B_3)dx}{(x^2+5)^3}+\int\frac{(A_2x+B_2)dx}{(x^2+5)^2}+\int\frac{(A_1x+B_1)dx}{x^2+5}$

En una integral pueden aparecer estos casos combinados. Entonces, se aplican a la vez, la técnica para cada uno de los casos que se presentan.

Además, para evitar confusión cuando se tiene a C como coeficiente indeterminado, se utilizará en el caso de esta técnica a $\alpha\in\Re$ ($\Re$: Conjunto de los números reales) como constante de integración cuando se presente la resolución de ejercicios.

Ejercicios resueltos.-

1. - Hallar $\int \frac{dx}{x^2-4}$.

Solución:

Se resuelve la integral. Aplicando factorización en el denominador: $x^2-4=(x+2)(x-2)$

Luego, al estar formado por factores lineales de primer grado que no se repiten, se tiene:

$$I=\int \frac{dx}{x^2-4}=\int \frac{Adx}{x+2}+\int \frac{Bdx}{x-2}=(*)$$

$A=?\qquad B=?$

Por Coeficientes Indeterminados:

$$\frac{1}{x^2-4}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}$$
$$\frac{1}{x^2-4}=\frac{A(x-2)+B(x-2)}{x^2-4}$$
$$1=Ax-2A+Bx+2B$$
$$1=(A+B)x+2(B-A)$$
$$0\cdot x+1=(A+B)x+2(B-A)$$

Comparando coeficientes:

$i)\quad x\Rightarrow A+B=0\Rightarrow A=-B\qquad (iii)$

$ii)\quad t.i.(\text{tèrmino independiente})\Rightarrow 2(B-A)=1\Rightarrow 4B=1\Rightarrow \boxed{B=\frac{1}{4}}\quad (iv)$

Sustituyendo (iv) en (iii): $\boxed{A=-\frac{1}{4}}$

Volviendo a (*):

$$(*)=I=\int \frac{(-\frac{1}{4})dx}{x+2}+\int \frac{\frac{1}{4}dx}{x-2}=-\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+2}+\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-2}=-\frac{1}{4}Ln|x+2|+\frac{1}{4}Ln|x-2|+\alpha=$$

$$=\frac{1}{4}\left[Ln|x-2|-Ln|x+2|\right]+\alpha=\frac{1}{4}Ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+\alpha=Ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|^{\frac{1}{4}}+\alpha=Ln\left|\sqrt[4]{\frac{x-2}{x+2}}\right|+\alpha$$

2. - Obtener $\int \frac{8x+8}{x^3-4x}dx$.

Solución:

Aplicando factorización en el denominador: $x^3-4x=x(x^2-4)=x(x+2)(x-2)$

Luego, por ser función formada por factores lineales de primer grado que no se repiten:

$$I=\int \frac{8x+8}{x^3-4x}dx=\int \frac{Adx}{x}+\int \frac{Bdx}{x+2}+\int \frac{Cdx}{x-2}=(*)$$

$A=?\qquad B=?\qquad C=?$

Por Coeficientes Indeterminados:

$$\frac{8x+8}{x^3-4x}=\frac{8x+8}{x(x+2)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-2}$$
$$\frac{8x+8}{x^3-4}=\frac{A(x+2)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+2)}{x(x+2)(x-2)}$$
$$\frac{8x+8}{x^3-4}=\frac{A(x^2-4)+B(x^2-2x)+C(x^2+2x)}{x^3-4}$$
$$8x+8=Ax^2-4A+Bx^2-2Bx+Cx^2+2Cx$$
$$8x+8=(A+B+C)x^2+(-2B+2C)x-4A$$

Comparando coeficientes:

$i)\qquad x^2\Rightarrow A+B+C=0$

$ii)\qquad x\Rightarrow -2B+2C=8$

$iii)\qquad t.i.\Rightarrow -4A=8\quad\Rightarrow \boxed{A=-2}\quad (iv)$

Sustituyendo (iv) en ***i)***:

$$-2+B+C=0$$

$$\boxed{B+C=2} \quad (v)$$

Formando y resolviendo sistema de ecuaciones con *ii)* y (v):

$$\begin{cases} -2B+2C=8 \\ B+C=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2B+2C=8 \\ \underline{2B+2C=4} \end{cases}$$

$$4C=12$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{C=3} \quad (vi)$$

Sustituyendo (vi) en (v).

$$B+3=2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B=-1}$$

Luego, volviendo a (*):

$$(*)=I=\int\frac{(-2)dx}{x}+\int\frac{(-1)dx}{x+2}+\int\frac{3dx}{x-2}=-2\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x+2}+3\int\frac{dx}{x-2}=-2Ln|x|-Ln|x+2|+3Ln|x-2|+\alpha=$$

$$=-Ln\left|x^2\right|-Ln|x+2|+Ln\left|(x-2)^3\right|+\alpha=Ln\left|\frac{(x-2)^3}{x^2\cdot(x+2)}\right|+\alpha$$

3. - Hallar $\int\frac{(5x^2-3)dx}{x^3-x}$.

__**Solución**__:

Aplicando factorización en el denominador: $x^3-x=x(x^2-1)=x(x+1)(x-1)$

Luego:

$$I=\int\frac{(5x^2-3)dx}{x^3-x}=\int\frac{Adx}{x}+\int\frac{Bdx}{x+1}+\int\frac{Cdx}{x-1}=(*)$$

$$A=? \qquad B=? \qquad C=?$$

Por Coeficientes Indeterminados:

$$\frac{5x^2-3}{x^3-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}$$

$$\frac{5x^2-3}{x^3-x}=\frac{A(x+1)(x-1)+Bx(-1)+C(x+1)x}{x^3-x}$$

$$5x^2-3=A(x^2-1)+B(x^2-x)+C(x^2+x)$$

$$5x^2-3=Ax^2-A+Bx^2-Bx+Cx^2+Cx$$

$$5x^2+0\cdot x-3=(A+B+C)x^2+(C-B)x+A$$

Comparando coeficientes:

$$i)\ x^2\Rightarrow 5=A+B+C$$

$$ii)\ x\Rightarrow 0=C-B \quad \Rightarrow \quad \boxed{C=B} \quad (iv)$$

$$iii)\ t.i.\Rightarrow -3=-A \quad \Rightarrow \quad \boxed{A=3} \quad (v)$$

Sustituyendo (iv) y (v) en ***i)***:

$$5=A+B+C$$

$$5=3+B+B$$

$$5-3=2B$$

$$2=2B \quad \Rightarrow \boxed{B=1} \Rightarrow \boxed{C=1}$$

Volviendo a (*):

$$(*)=I=\int\frac{3dx}{x}+\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{dx}{x-1}=3Ln|x|+Ln|x+1|+Ln|x-1|+\alpha=Ln|x|^3+Ln|x+1|+Ln|x-1|+\alpha$$

$$=Ln\left|x^3(x+1)(x-1)\right|+\alpha=Ln\left|x^3(x^2-1)\right|+\alpha=Ln\left|x^5-x^3\right|+\alpha$$

4. – Compruebe que: $\int \frac{(5x^2-x)dx}{x^3-x} = Ln\left|(x^2-1)^2\cdot(x+1)\right|+\alpha$.

Solución:

Aplicando factorización en el denominador: $x^3-x = x(x^2-1) = x(x+1)(x-1)$

Luego: $I=\int \frac{(5x^2-x)dx}{x^3-x} = \int \frac{Adx}{x}+\int \frac{Bdx}{x+1}+\int \frac{Cdx}{x-1} = (*)$

$A=?\qquad B=?\qquad C=?$

Por Coeficientes Indeterminados:

$$\frac{5x^2-x}{x^3-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}$$

$$\frac{5x^2-x}{x^3-x}=\frac{A(x+1)(x-1)+Bx(-1)+C\,(x+1)x}{x^3-x}$$

$$5x^2-x=A(x^2-1)+B(x^2-x)+C\,(x^2+x)$$

$$5x^2-x=Ax^2-A+Bx^2-Bx+Cx^2+Cx$$

$$5x^2-x+0=(A+B+C)x^2+(C-B)x+A$$

Comparando coeficientes:

$i)\ x^2 \Rightarrow 5=A+B+C$

$ii)\ x\Rightarrow -1=C-B \quad\Rightarrow\quad \boxed{C=B-1}\quad (iv)$

$iii)\, t.i. \Rightarrow 0=-A \quad\Rightarrow\quad \boxed{A=0}\quad (v)$

Sustituyendo (iv) y (v) en (i):

$5=A+B+C$

$5=0+(B-1)+B$

$5+1=2B$

$6=2B \quad\Rightarrow \boxed{B=3} \quad\Rightarrow \boxed{C=2}$

Volviendo a (*):

$$(*)=I=\int\frac{0\cdot dx}{x}+\int\frac{3\cdot dx}{x+1}+\int\frac{2\cdot dx}{x-1}=3Ln|x+1|+2Ln|x-1|+\alpha=Ln\left|(x+1)^3\right|+Ln\,(x-1)^2+\alpha=Ln\left|(x+1)^3\cdot(x-1)^2\right|+\alpha=$$

$$=Ln\left|(x+1)\cdot(x+1)\cdot(x+1)\cdot(x-1)(x-1)\right|+\alpha=Ln\left|(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+1)\right|+\alpha=$$

$$=Ln\left|(x^2-1)\cdot(x^2-1)\cdot(x+1)\right|+\alpha=Ln\left|(x^2-1)^2\cdot(x+1)\right|+\alpha$$

5. - Hallar $\int \frac{(x^2-3x-1)dx}{x^3+x^2-2x}$.

Solución:

Aplicando factorización en el denominador: $x^3+x^2-2x=x(x^2+x-2)=x(x+2)(x-1)$

Luego: $I=\int\frac{(x^2-3x-1)dx}{x^3+x^2-2x}=\int\frac{Adx}{x}+\int\frac{Bdx}{x+2}+\int\frac{Cdx}{x-1}=(*)$

$A=?\qquad B=?\qquad C=?$

Por Coeficientes Indeterminados:

$$\frac{x^2-3x-1}{x^3+x^2-2x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-1}$$

$$\frac{x^2-3x-1}{x^3+x^2-2x}=\frac{A(x+2)(x-1)+Bx(x-1)+Cx(x+2)}{x^3+x^2-2x}$$

$$x^2-3x-1=Ax^2+Ax-2A+Bx^2-Bx+Cx^2+2Cx$$

$$x^2-3x-1=(A+B+C)x^2+(A-B+2C)x-2A$$

Comparando coeficientes:

$i)\quad x^2\Rightarrow\quad A+B+C=1$

$ii)\quad x\Rightarrow\quad A-B+2C=-3$

$iii)\quad t.i.\quad\Rightarrow\quad -2A=-1\Rightarrow\quad \boxed{A=\frac{1}{2}}\quad (iv)$

Sustituciones:

(iv) en *(i):* $B+C=\frac{1}{2} \quad (v)$

(iv) en *(ii):* $-B+2C=-\frac{7}{2} \quad (vi)$

Formando y resolviendo sistema de ecuaciones entre (v) y (vi):

$$\begin{cases} B+C=\frac{1}{2} \\ -B+2C=-\frac{7}{2} \end{cases}$$

$$3C=-3 \Rightarrow \boxed{C=-1} \ (vii)$$

Sustituyendo (vii) en (v):

$$B-1=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{B=\frac{3}{2}}$$

Entonces, volviendo a (*):

$$(*)=\int\frac{\frac{1}{2}dx}{x}+\int\frac{\frac{3}{2}dx}{x+2}+\int\frac{(-1)dx}{x-1}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x+2}-\int\frac{dx}{x-1}=\frac{1}{2}Ln|x|+\frac{3}{2}Ln|x+2|-Ln|x-1|+\alpha=$$

$$=Ln\sqrt{|x|}+Ln\sqrt{\left|(x+2)^3\right|}-Ln|x-1|+\alpha=Ln\left|\frac{\sqrt{x(x+2)^3}}{x-1}\right|+\alpha=Ln\left|\sqrt{\frac{x(x+2)^3}{(x-1)^2}}\right|+\alpha$$

6. - Obtener $\int\frac{(2x-3)dx}{x(x+3)(x-2)}$.

Solución:

Como el denominador está compuesto por factores lineales de primer grado que no se repiten, entonces la integral queda de la siguiente forma:

$$I=\int\frac{(2x-3)dx}{x(x+3)(x-2)}=\int\frac{Adx}{x+3}+\int\frac{Bdx}{x+3}+\int\frac{Cdx}{x-2}=(*)$$

$A=? \qquad B=? \qquad C=?$

Por Coeficientes Indeterminados:

$$\frac{2x-3}{x(x+3)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-2}$$

$$\frac{2x-3}{x(x+3)(x-2)}=\frac{A(x+3)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+3)}{x(x+3)(x-2)}$$

$$2x-3=A(x^2+x-6)+B(x^2-2x)+C(x^2+3x)$$

$$2x-3=Ax^2+Ax-6A+Bx^2-2Bx+Cx^2+3Cx$$

$$0\cdot x^2+2x-3=(A+B+C)x^2+(A-2B+3C)x-6A$$

Comparando coeficientes:

$i)\quad x^2 \Rightarrow A+B+C=0$

$ii)\quad x \Rightarrow A-2B+3C=0$

$iii)\quad t.i. \Rightarrow -6A=-3 \quad \Rightarrow \boxed{A=\frac{1}{2}} \quad (iv)$

Sustituyendo (iv) en i**)** y en (ii):

$i)\qquad A+B+C=0 \quad \Rightarrow \frac{1}{2}+B+C=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B+C=-\frac{1}{2}} \quad (v)$

$ii)\qquad A-2B+3C=2 \quad \Rightarrow \frac{1}{2}-2B+3C=2 \quad \Rightarrow -2B+3C=2-\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{-2B+3C=\frac{3}{2}} \quad (vi)$

Formando y resolviendo sistema de ecuaciones con (*v*) y (*vi*):

$$\begin{cases} B+C=-\frac{1}{2} \\ -2B+3C=\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2B+2C=-1 \\ \underline{-2B+3C=\frac{3}{2}} \end{cases}$$

$$5C = \tfrac{1}{2} \Rightarrow \boxed{C=\tfrac{1}{10}} \quad (vii)$$

Sustituyendo (*vii*) en (*v*):

$$B+C=-\frac{1}{2} \Rightarrow B+\frac{1}{10}=-\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{B=-\tfrac{3}{5}}$$

Volviendo a (*):

$$(*)=I=\int\frac{\frac{1}{2}dx}{x}+\int\frac{(-\frac{3}{5})dx}{x+3}+\int\frac{\frac{1}{10}dx}{x-2}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}-\frac{3}{5}\int\frac{dx}{x+3}+\frac{1}{10}\int\frac{dx}{x-2}=\frac{1}{2}Ln|x|-\frac{3}{5}Ln|x+3|+\frac{1}{10}Ln|x-2|+\alpha=$$

$$=Ln|x|^{\frac{1}{2}}-Ln|x+3|^{\frac{3}{5}}+Ln|x-2|^{\frac{1}{10}}+\alpha=Ln\left|\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt[10]{x-2}}{\sqrt[5]{(x+3)^3}}\right|+\alpha=Ln\left|\sqrt[10]{\frac{x^5(x-2)}{(x+3)^6}}\right|+\alpha$$

7. – Obtener: $\int\frac{4x^2+3x-4}{x(x-1)(x+2)}dx$.

Solución:

Como el denominador está compuesto por factores lineales de primer grado que no se repiten, entonces la integral queda de la siguiente forma:

$$I=\int\frac{4x^2+3x-4}{x(x-1)(x+2)}dx=\int\frac{Adx}{x}+\int\frac{Bdx}{x-1}+\int\frac{Cdx}{x+2}=(*)$$

$A=?\quad B=?\quad C=?$

Por Coeficientes Indeterminados:

$$\frac{4x^2+3x-4}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

$$\frac{4x^2+3x-4}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)}$$

$$4x^2+3x-4=A(x^2+x-2)+B(x^2+2x)+C(x^2-x)$$

$$4x^2+3x-4=Ax^2+Ax-2A+Bx^2+2Bx+Cx^2-Cx$$

$$4x^2+3x-4=(A+B+C)x^2+(A+2B-C)x-2A$$

Comparando coeficientes:

$i)\ x^2 \Rightarrow A+B+C=4$

$ii)\ x \Rightarrow A+2B-C=3$

$iii)\ t.i. \Rightarrow -2A=-4 \Rightarrow \boxed{A=2} \quad (iv)$

Sustituyendo *(iv)* en (i) y (ii) :

$\boxed{B+C=2} \quad (v)$

$\boxed{2B-C=1} \quad (vi)$

Formando sistema con *(v)* y *(vi)*, y resolviendo:

$$\begin{cases} B+C=2 \\ \underline{2B-C=1} \end{cases}$$

$$3B = 3 \Rightarrow \boxed{B=1} \quad (vii)$$

Sustituyendo *(vii)* en *(v)*:

$1+C=2 \Rightarrow \boxed{C=1} \quad (viii)$

Volviendo a (*):

$$(*)=I=\int\frac{2dx}{x}+\int\frac{1\cdot dx}{x-1}+\int\frac{1\cdot dx}{x+2}=2\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{x+2}=2Ln|x|+Ln|x-1|+Ln|x+2|+\alpha=Ln\,x^2+Ln|x-1|+Ln|x+2|+\alpha=$$

$$=Ln\left[x^2(x-1)(x+2)\right]+\alpha=Ln\left[x^2(x^2+x-2)\right]+\alpha=Ln(x^4+x^3-2x^2)+\alpha$$

8.- Halle: $\int \frac{5x^3 - x}{x^3 - x}dx$.

Solución:

En esta integral se observa que el grado del numerador es igual al grado del denominador, $gr\,[P(x)] = gr\,[Q(x)]$. Para poder aplicar la técnica de integración por descomposición en fracciones simples, se debe aplicar en primer lugar el algoritmo de la división de polinomios. Luego:

$$I = \int \frac{5x^3 - x}{x^3 - x}dx = \int \left(5 + \frac{4x}{x^3 - x}\right)dx = 5\int dx + \int \frac{4x}{x^3 - x}dx = 5x + \underbrace{\int \frac{4x}{x^3 - x}dx}_{(I_1)} + \alpha = (*)$$

I_1 : Se resuelve por descomposición en fracciones simples.

Aplicando factorización en el denominador:

$x^3 - x = x \cdot (x^2 - 1) = x \cdot (x+1) \cdot (x-1)$ (Factores lineales de primer grado que no se repiten).

Luego:

$$I_1 = \int \frac{4x}{x^3 - x}dx = \int \frac{4xdx}{x \cdot (x+1) \cdot (x-1} = \int \frac{Adx}{x} + \int \frac{Bdx}{x+1} + \int \frac{Cdx}{x-1} = (**)$$

$A = ?\quad B = ?\quad C = ?$

Por Coeficientes indeterminados:

$$\frac{4x}{x^3 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

$$\frac{4x}{x^3 - x} = \frac{A(x^2-1) + B(x^2 - x) + C(x^2 + x)}{x^3 - x}$$

$$4x = Ax^2 - A + Bx^2 - Bx + Cx^2 + Cx$$

$$4x = (A + B + C)x^2 + (-B + C)x - A$$

$$0 \cdot x^2 + 4x + 0 = (A + B + C)x^2 + (-B + C)x - A$$

Comparando términos:

$i)\quad x^2 \to A + B + C = 0$

$ii)\quad x \to -B + C = 4$

$iii)\ t.i. \to -A = 0 \quad \to \boxed{A = 0} \quad (iv)$

Sustituyendo *(iv)* en *(i)*:

$A + B + C = 0$

$0 + B + C = 0 \quad \to \quad \boxed{B + C = 0} \quad (v)$

Formando sistema de ecuaciones con *(ii)* y *(v)*:

$$\begin{cases} -B + C = 4 \\ \ \ B + C = 0 \end{cases}$$

$2C = 4 \quad \to \quad \boxed{C = 2} \quad (vi)$

Sustituyendo *(vi)* en *(v)*: $B + C = 0 \quad \to \quad B + 2 = 0 \quad \to \quad \boxed{B = -2}$

Volviendo a (**):

$$(**) = I_1 = \int \frac{0 \cdot dx}{x} + \int \frac{(-2) \cdot dx}{x+1} + \int \frac{2 \cdot dx}{x-1} = -2\int \frac{dx}{x+1} + 2\int \frac{dx}{x-1} = -2Ln|x+1| + 2Ln|x-1| + \alpha = -Ln\,(x+1)^2 + Ln\,(x-1)^2 + \alpha =$$

$$= Ln\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} + \alpha = Ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 + \alpha \quad \Rightarrow \quad I_1 = Ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 + \alpha$$

Volviendo a (*):

$$(*) = I = 5x + Ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 + \alpha$$

9.- Hallar $\int \frac{(5x-3)dx}{x^3-10x^2+25x}$.

Solución:

Aplicando factorización en el denominador:

$$x^3-10x^2+25x = x(x^2-10x+25) = x(x-5)^2$$

Luego, al estar formado por un factor que se repite y otro no, se tiene:

$$I=\int\frac{(5x-3)dx}{x^3-10x^2+25x}=\int\frac{(5x-3)dx}{x(x-5)^2}=\int\frac{Adx}{x}+\int\frac{Bdx}{(x-5)^2}+\int\frac{Cdx}{x-5}=(*)$$

$$A=?\qquad B=?\qquad C=?$$

Por Coeficientes Indeterminados:

$$\frac{5x-3}{x(x-5)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-5)^2}+\frac{C}{x-5}$$

$$\frac{5x-3}{x(x-5)^2}=\frac{A(x-5)^2+Bx+Cx(x-5)}{x(x-5)^2}$$

$$5x-3=A(x^2-10x+25)+Bx+C(x^2-5x)$$

$$5x-3=Ax^2-10Ax+25A+Bx+Cx^2-5Cx$$

$$0\cdot x^2+5x-3=(A+C)x^2+(-10A+B-5C)x+25A$$

Comparando coeficientes:

$i)\quad x^2\Rightarrow\ A+C=0\ \Rightarrow \boxed{A=-C}\quad (iv)$

$ii)\quad x\Rightarrow\ -10A+B-5C=5$

$iii)\quad t.i.\Rightarrow\ 25A=-3\quad\Rightarrow \boxed{A=-\frac{3}{25}}\ (v)$

Sustituyendo (v) en (iv):

$$A=-C\quad\Rightarrow\boxed{C=\frac{3}{25}}\qquad(vi)$$

Sustituyendo (v) y (vi) en (ii):

$$-10A+B-5C=5$$

$$-10\cdot\left(-\frac{3}{25}\right)+B-5\cdot\left(\frac{3}{25}\right)=5$$

$$\frac{6}{5}+B-\frac{3}{5}=5\quad\Rightarrow\quad\boxed{B=\frac{22}{5}}$$

Luego, en (*):

$$(*)=I=\int\frac{(-\frac{3}{25})dx}{x}+\int\frac{\frac{22}{5}dx}{(x-5)^2}+\int\frac{\frac{3}{25}dx}{x-5}=-\frac{3}{25}\int\frac{dx}{x}+\frac{22}{5}\int\frac{dx}{(x-5)^2}+\frac{3}{25}\int\frac{dx}{x-5}=-\frac{3}{25}Ln|x|+\frac{22}{5}\underbrace{\int(x-5)^{-2}dx}_{(I_1)}+\frac{3}{25}Ln|x-5|+\alpha=(**)$$

Cambio de variable para I_1: $x-5=u\quad\Rightarrow\quad dx=du$

Volviendo a (**):

$$(**)=I=-Ln\left|\sqrt[25]{x^3}\right|+\frac{22}{5}\int u^{-2}du+Ln\left|\sqrt[25]{(x-5)^3}\right|+C=Ln\left|\frac{\sqrt[25]{(x-5)^3}}{\sqrt[25]{x^3}}\right|-\frac{22}{5}u^{-1}+C=$$

$$=Ln\left|\sqrt[25]{\frac{(x-5)^3}{x^3}}\right|-\frac{22}{5u}+C=Ln\left|\sqrt[25]{\left(\frac{x-5}{x}\right)^3}\right|-\frac{22}{5(x-5)}+C$$

10. – Resolver $\int \frac{x^2dx}{x^3+5x^2+8x+4}$.

Solución:

Aplicando factorización en el denominador por la Regla de Ruffini:

$$x^3+5x^2+8x+4=(x+1)(x+2)(x+2)=(x+1)(x+2)^2$$

Luego, al estar formado por un factor que se repite y otro no, se tiene que:

$$I=\int \frac{x^2dx}{x^3+5x^2+8x+4}=\int \frac{Adx}{x+1}+\int \frac{Bdx}{(x+2)^2}+\int \frac{Cdx}{x+2}=(*)$$

$A=?\qquad B=?\qquad C=?$

Por Coeficientes Indeterminados:

$$\frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{C}{x+2}$$

$$\frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}=\frac{A(x+2)^2+B(x+1)+C(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)^2}$$

$$\frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}=\frac{A(x^2+4x+4)+Bx+B+C(x^2+3x+2)}{x^3+5x^2+8x+4}$$

$$x^2=Ax^2+4Ax+4A+Bx+B+Cx^2+3Cx+2C$$

$$x^2+0\cdot x+0=(A+C)x^2+(4A+B+3C)x+4A+B+2C$$

Comparando coeficientes:

$i)\quad x^2 \Rightarrow A+C=1 \Rightarrow \boxed{C=1-A}\ (iv)$

$ii)\quad x \Rightarrow 4A+B+3C=0$

$iii)\quad t.i. \Rightarrow 4A+B+2C=0$

Sustituyendo (iv) en $ii)$ y $iii)$:

$ii)\quad 4A+B+3C=0 \Rightarrow 4A+B+3(1-A)=0 \Rightarrow \boxed{A+B=-3}\ (v)$

$iii)\quad 4A+B+2C=0 \Rightarrow 4A+B+2(1-A)=0 \Rightarrow \boxed{2A+B=-2}\ (vi)$

Formando y resolviendo sistema de ecuaciones con (v) y (vi):

$$\begin{cases} A+B=-3 \\ 2A+B=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -A-B=3 \\ \underline{2A+B=-2} \end{cases}$$

$$\boxed{A=1}\ (vii)$$

Sustituyendo (vii) en (v) y (iv):

$(v):\quad A+B=-3 \Rightarrow 1+B=-3 \Rightarrow \boxed{B=-4}$

$(iv):\quad C=1-A \Rightarrow \boxed{C=0}$

Volviendo a (*):

$$(*)=I=\int \frac{1\cdot dx}{x+1}+\int \frac{(-4)\cdot dx}{(x+2)^2}+\int \frac{0.dx}{x+2}=\int \frac{dx}{x+1}-4\underbrace{\int \frac{dx}{(x+2)^2}}_{(I_1)}=(**)$$

Cambio de variable para I_1: $x+2=u \Rightarrow dx=du$

Luego, en (**):

$$(**)=I=Ln|x+1|-4\int \frac{du}{u^2}+\alpha=Ln|x+1|-4\int u^{-2}du+\alpha=Ln|x+1|+4u^{-1}+\alpha=Ln|x+1|+\frac{4}{u}+\alpha=Ln|x+1|+\frac{4}{x+2}+\alpha$$

11.- Obtenga: $\int \frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}dx$.

Solución:

Resolviendo la integral. Como $grd\left[f(x)\right] > grd\left[g(x)\right]$, se aplica previamente la división de polinomios.

$$\frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8} = x + \frac{8x+6}{x^3-6x^2+12x-8}$$

Luego, resolviendo la integral:

$$I = \int \frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}dx = \int\left(x+\frac{8x+6}{x^3-6x^2+12x-8}\right)dx = \int x\,dx + \int \frac{8x+6}{x^3-6x^2+12x-8}dx = \frac{x^2}{2}+2\int\frac{4x+3}{(x-2)^3}dx+\alpha =$$

$$= \frac{x^2}{2}+2\cdot\left[\int\frac{A\,dx}{(x-2)^3}+\int\frac{B\,dx}{(x-2)^2}+\int\frac{C\,dx}{x-2}\right]+\alpha = (*) \qquad A=?\quad B=?\quad C=?$$

Por el Método de los Coeficientes Indeterminados:

$$\frac{4x+3}{(x-2)^3} = \frac{A}{(x-2)^3}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x-2}$$

$$\frac{4x+3}{(x-2)^3} = \frac{A+B(x-2)+C(x-2)^2}{(x-2)^3}$$

$$4x+3 = A+Bx-2B+Cx^2-4Cx+4C$$

$$0\cdot x^2+4x+3 = Cx^2+(B-4C)x+(A-2B+4C)$$

Comparando coeficientes:

$$i)\ x^2 \rightarrow \boxed{C=0}$$

$$ii)\ x \rightarrow \quad B-4C=4$$

$$iii)\ t.i. \rightarrow \quad A-2B+4C=3$$

Sustituyendo *i)* en *ii)*:

$$B-4\cdot 0=4 \quad\rightarrow\quad \boxed{B=4} \qquad (iv)$$

Sustituyendo *i)* y *iv)* en *iii)*:

$$A-2\cdot4+4\cdot0=3$$

$$A-8=3 \quad\rightarrow\quad \boxed{A=11} \qquad (v)$$

Volviendo a (*):

$$(*) = I = \frac{x^2}{2}+2\cdot\left[\int\frac{11\,dx}{(x-2)^3}+\int\frac{4\,dx}{(x-2)^2}+\int\frac{0\cdot dx}{x-2}\right]+\alpha = \frac{x^2}{2}+22\int\frac{dx}{(x-2)^3}+8\int\frac{dx}{(x-2)^2}+\alpha = \frac{x^2}{2}+22\int(x-2)^{-3}dx+8\int(x-2)^{-2}dx+\alpha = (**)$$

Cambio de variable: $x-2=u \quad\rightarrow\quad dx=du$

Volviendo a (**):

$$(**) = \frac{x^2}{2}+22\int u^{-3}du+8\int u^{-2}du+C = \frac{x^2}{2}-\frac{11}{u^2}-\frac{8}{u}+C = \frac{x^2}{2}-\frac{11}{(x-2)^2}-\frac{8}{x-2}+\alpha$$

12.- Resolver: $\int \frac{(2x^2-3x-3)}{(x-1)(x^2+6x-7)}dx.$

Solución:

Aplicando factorización en el denominador: $(x-1)(x^2+6x-7) = (x-1)(x-1)(x+7) = (x-1)^2(x+7)$

Luego, al estar formado por un factor que se repite y otro no, queda:

$$I = \int\frac{(2x^2-3x-3)}{(x-1)(x^2+6x-7)}dx = \int\frac{(2x^2-3x-3)}{(x-1)^2(x+7)}dx = \int\frac{Adx}{(x-1)^2}+\int\frac{Bdx}{x-1}+\int\frac{Cdx}{x+7} = (*)$$

$$A=?\qquad B=?\qquad C=?$$

Por Coeficientes Indeterminados:

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2+6x-7)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+7}$$
$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2+6x-7)}=\frac{A(x+7)+B(x-1)(x+7)+C\,(x-1)^2}{(x-1)^2(x+7)}$$
$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2+6x-7)}=\frac{Ax+7A+B(x^2+6x-7)+C\;(x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x+7)}$$
$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2+6x-7)}=\frac{Ax+7A+Bx^2+6Bx-7B+Cx^2-2Cx+C}{(x-1)(x^2+6x-7)}$$
$$2x^2-3x-3=(B+C)x^2+(A+6B-2C)x+7A-7B+C$$

Comparando términos:

$$x^2\Rightarrow B+C=2$$
$$x\Rightarrow A+6B-2C=-3$$
$$t.i.\Rightarrow 7A-7B+C=-3$$

Resolviendo por Cramer:

$$\Delta=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&6&-2\\7&-7&1\end{vmatrix}=-64$$

$$\Delta_A=\begin{vmatrix}2&1&1\\-3&6&-2\\-3&-7&1\end{vmatrix}=32\qquad\Rightarrow A=\frac{\Delta_A}{\Delta}=\frac{32}{-64}=-\frac{1}{2}\qquad\Rightarrow\quad\boxed{A=-\frac{1}{2}}$$

$$\Delta_B=\begin{vmatrix}0&2&1\\1&-3&-2\\7&-3&1\end{vmatrix}=-12\qquad\Rightarrow B=\frac{\Delta_B}{\Delta}=\frac{-12}{-64}=\frac{3}{16}\qquad\Rightarrow\quad\boxed{B=\frac{3}{16}}$$

$$\Delta_C=\begin{vmatrix}0&1&2\\1&6&-3\\7&-7&-3\end{vmatrix}=-116\qquad\Rightarrow C=\frac{\Delta_C}{\Delta}=\frac{-116}{-64}=\frac{29}{16}\qquad\Rightarrow\quad\boxed{C=\frac{29}{16}}$$

Volviendo a (*):

$$(*)=I=\int\frac{(-\frac{1}{2})dx}{(x-1)^2}+\int\frac{\frac{3}{16}\,dx}{x-1}+\int\frac{\frac{29}{16}\,dx}{x+7}=-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{3}{16}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{29}{16}\int\frac{dx}{x+7}=-\frac{1}{2}\underbrace{\int\frac{dx}{(x-1)^2}}_{(I_2)}+\frac{3}{16}Ln\left|x-1\right|+\frac{29}{16}Ln\left|x+7\right|+\alpha=(**)$$

Cambio de variable en I_2: $u=x-1\quad\Rightarrow\quad du=dx$

Volviendo a (**):

$$(**)=-\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2}+Ln\sqrt[16]{\left|(x-1)^3\right|}+Ln\sqrt[16]{\left|(x+7)^{29}\right|}+\alpha=-\frac{1}{2}\int u^{-2}du+Ln\left[\sqrt[16]{\left|(x-1)^3\right|}\cdot\sqrt[16]{\left|(x+7)^{29}\right|}\right]+\alpha=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot(-1)\,u^{-1}+Ln\sqrt[16]{\left|(x-1)^3\cdot(x+7)^{29}\right|}+\alpha=\frac{1}{2u}+Ln\sqrt[16]{\left|(x-1)^3\cdot(x+7)^{29}\right|}+\alpha=\frac{1}{2(x-1)}+Ln\sqrt[16]{\left|(x-1)^3\cdot(x+7)^{29}\right|}+\alpha$$

13.- Calcule $\int \frac{x^3+x^2+x+3}{x^4+4x^2+3}dx$.

Solución:

Resolviendo la integral. Aplicando factorización en al denominador. Como el denominador lo conforma una expresión algebraica bicuadrática, se propone el cambio: $x^2=u$. Luego:

$$x^4+4x^2+3=\left(x^2\right)^2+4x^2+3=u^2+4u+3=(u+3)(u+1)=\left(x^2+3\right)\left(x^2+1\right)$$

De esta manera:

$$I=\int \frac{x^3+x^2+x+3}{x^4+4x^2+3}dx=\int \frac{x^3+x^2+x+3}{\left(x^2+3\right)\left(x^2+1\right)}dx=\int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+3}+\int \frac{(Cx+D)dx}{x^2+1}=(*)$$

$A=?\quad B=?\quad C=?\quad D=?$

Por Coeficientes Indeterminados:

$$\frac{x^3+x^2+x+3}{x^4+4x^2+3}=\frac{Ax+B}{x^2+3}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$\frac{x^3+x^2+x+3}{x^4+4x^2+3}=\frac{(Ax+B)\left(x^2+1\right)+(Cx+D)\left(x^2+3\right)}{\left(x^2+3\right)\left(x^2+1\right)}$$

$$\frac{x^3+x^2+x+3}{x^4+4x^2+3}=\frac{Ax^3+Ax+Bx^2+B+Cx^3+3Cx+Dx^2+3D}{x^4+4x^2+3}$$

$$x^3+x^2+x+3=(A+C)x^3+(B+D)x^2+(A+3C)x+(B+3D)$$

Comparando coeficientes:

$i)\ x^3\to A+C=1$

$ii)\ x^2\to B+D=1$

$iii)\ x\to A+3C=1$

$iv)\ t.i.\to B+3D=3$

Formando sistemas de ecuaciones *i)* con *ii)*:

$$\begin{cases}A+C=1\\A+3C=1\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}1\cdot\\-1\cdot\end{matrix}\begin{cases}A+C=1\\A+3C=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A+C=1\\-A-3C=-1\end{cases}$$

$$-2C=0$$

$$\boxed{C=0}\quad (v)$$

Sustituyendo *(v) en (i):*

$$A+0=1\ \Rightarrow\ \boxed{A=1}\quad (vi)$$

Formando sistemas de ecuaciones *ii)* con *iv)*:

$$\begin{cases}B+D=1\\B+3D=3\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}1\cdot\\-1\cdot\end{matrix}\begin{cases}B+D=1\\B+3D=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B+D=1\\-B-3D=-3\end{cases}$$

$$-2D=-2$$

$$\boxed{D=1}\quad (vii)$$

Sustituyendo *(vii) en (ii):*

$$B+1=1\ \Rightarrow\ \boxed{B=0}\quad (viii)$$

Volviendo a (*):

$$(*)=I=\int \frac{(1\cdot x+0)dx}{x^2+3}+\int \frac{(0\cdot x+1)dx}{x^2+1}=\underbrace{\int \frac{x\,dx}{x^2+3}}_{(I_1)}+\int \frac{dx}{x^2+1}=(**)$$

Cambio de variable en I_1: $x^2+3=u\ \Rightarrow\ 2x\,dx=du\ \Rightarrow\ x\,dx=\frac{du}{2}$

Volviendo a (**) para aplicar el cambio:

$$(**)=I=\int \frac{\frac{du}{2}}{u}+ArcTg\,(x)+\alpha=\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}+ArcTg\,(x)+\alpha=\frac{1}{2}Ln|u|+ArcTg\,(x)+\alpha=\boxed{Ln\left|\sqrt{x^2+3}\right|+ArcTg\,(x)+\alpha}$$

14.- Evaluar $\int \frac{4x^2+7x+15}{x(x+1)(x-3)}dx$.

Solución:

Aplicando la descomposición en fracciones simples:

$$I = \int \frac{4x^2+7x+15}{x(x+1)(x-3)}dx = \int \frac{Adx}{x} + \int \frac{Bdx}{x+1} + \int \frac{Cdx}{x-3} = (*)$$

$A = ?$ $B = ?$ $C = ?$

Por Coeficientes Indeterminados:

$$\frac{4x^2+7x+15}{x(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3}$$
$$\frac{4x^2+7x+15}{x(x+1)(x-3)} = \frac{A(x+1)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x+1)}{x(x+1)(x-3)}$$
$$4x^2+7x+15 = A(x+1)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x+1)$$

En este ejercicio es posible aplicar otra forma de calcular el valor de los coeficientes indeterminados. Es la siguiente: Considerando que debe darse la igualdad de ambos polinomios, al evaluarlos para un mismo número real, debe obtenerse iguales resultados. Se pueden utilizar las raíces del polinomio en el denominador, $Q(x) = x(x+1)(x-3)$, las cuales son: $x = 0,\ x = -1 \ \ y \ \ x = 3$.

Se procede de la siguiente manera:

Para $x = 0$:

$$4\cdot(0^2)+7\cdot(0)+15 = A(0+1)(0-3)+B\cdot 0\cdot(0-3)+C\cdot 0\cdot(0+1)$$
$$4\cdot 0+0+15 = A\cdot 1\cdot(-3)+0+0$$
$$15 = -3A \quad \Rightarrow \quad \boxed{A=-5} \quad (i)$$

Para $x = -1$:

$$4\cdot(-1)^2+7\cdot(-1)+15 = A(-1+1)(-1-3)+B\cdot(-1)\cdot(-1-3)+C\cdot(-1)\cdot(-1+1)$$
$$4\cdot 1-7+15 = A\cdot 0\cdot(-4)-B\cdot(-4)+C\cdot 0$$
$$4-7+15 = 0+4B+0$$
$$12 = 4B \quad \Rightarrow \quad \boxed{B=3} \quad (ii)$$

Para $x = 3$:

$$4\cdot(3^2)+7\cdot(3)+15 = A(3+1)(3-3)+B\cdot 3\cdot(3-3)+C\cdot 3\cdot(3+1)$$
$$4\cdot 9+21+15 = A\cdot 4\cdot 0+3B\cdot 0+12C$$
$$36+21+15 = 0+0+12C$$
$$72 = 12C \quad \Rightarrow \quad \boxed{C=6} \quad (iii)$$

Volviendo a (*):

$$(*) = I = \int \frac{(-5)\cdot dx}{x} + \int \frac{3\cdot dx}{x+1} + \int \frac{6\cdot dx}{x-3} = -5\cdot\int \frac{dx}{x} + 3\cdot\int \frac{dx}{x+1} + 6\cdot\int \frac{dx}{x+3} = -5Ln|x| + 3Ln|x+1| + 6Ln|x-3| + \alpha =$$

$$= -Ln\left|x^5\right| + Ln\left|(x+1)^3\right| + Ln\left|(x-3)^6\right| + \alpha = Ln\left|\frac{(x+1)^3\cdot(x-3)^6}{x^5}\right| + \alpha$$

15.- Evaluar $\int \frac{5x^2-33x+54}{(x-2)(x-4)^2}dx$.

Solución:

Aplicando la descomposición en fracciones simples:

$$I=\int \frac{5x^2-33x+54}{(x-2)(x-4)^2}dx=\int \frac{Adx}{x-2}+\int \frac{Bdx}{(x-4)^2}+\int \frac{Cdx}{x-4}=(*)$$

$A=?\quad B=?\quad C=?$

Por Coeficientes Indeterminados:

$$\frac{5x^2-33x+54}{(x-2)(x-4)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-4)^2}+\frac{C}{x-4}$$

$$\frac{5x^2-33x+54}{(x-2)(x-4)^2}=\frac{A(x-4)^2+B(x-2)+C(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-4)^2}$$

$$5x^2-33x+54=A(x-4)^2+B(x-2)+C(x-2)(x-4)$$

Siguiendo el mismo procedimiento para calcular los coeficientes indeterminados utilizado en el ejercicio Nº 14, se considera lo siguiente: Las raíces del polinomio denominador, $Q(x)=(x-2)(x-4)^2$, son: $x=2\quad y\quad x=4$.

Luego:

Para $x=2$:

$$5\cdot(2^2)-33\cdot(2)+54=A(2-4)^2+B(2-2)+C(2-2)(2-4)$$
$$5\cdot4-66+54=A(-2)^2+B\cdot0+C\cdot0\cdot(-2)$$
$$20-66+54=A\cdot4+0+0$$
$$8=4A\qquad\Rightarrow\qquad \boxed{A=2}\qquad (i)$$

Para $x=4$:

$$5\cdot(4^2)-33\cdot(4)+54=A(4-4)^2+B(4-2)+C(4-2)(4-4)$$
$$5\cdot16-132+54=A\cdot0-B\cdot2+C\cdot2\cdot0$$
$$80-132+54=0-2B+0$$
$$2=-2B$$
$$-2=2B\qquad\Rightarrow\qquad \boxed{B=-1}\qquad (ii)$$

Como falta determinar el valor de C y al tener solo dos raíces, es necesario utilizar otro valor para la variable que permita conseguir el coeficiente faltante. El escoger x=0, resulta de mucha utilidad porque permite mayores simplificaciones.

Para $x=0$:

$$5\cdot(0^4)-33\cdot(0)+54=A(0-4)^2+B(0-2)+C(0-2)(0-4)$$
$$5\cdot0-0+54=A\cdot(-4)^2-2B+C\cdot(-2)\cdot(-4)$$
$$0-0+54=16A-2B+8C$$
$$54=16A-2B+8C$$
$$\Rightarrow 8C=54-16A-2B$$

Utilizando los valores de A y B:

$$8C=54-16\cdot2-2\cdot(-1)$$
$$8C=54-32+2$$
$$8C=24\quad\Rightarrow\qquad \boxed{C=3}\qquad (iii)$$

Volviendo a (*):

$$(*)=I=\int\frac{2dx}{x-2}+\int\frac{(-1)\cdot dx}{(x-4)^2}+\int\frac{3dx}{(x-4)}=2\int\frac{dx}{x-2}-\int\frac{dx}{(x-4)^2}+3\int\frac{dx}{x-4}=2Ln|x-2|-\underbrace{\int(x-4)^{-2}dx}_{(I_1)}+3Ln|x-4|+\alpha=(**)$$

Cambio de variable en I_1: $\quad u=x-4\Rightarrow du=dx$

Entonces, en (**):

$$(**)=Ln(x-2)^2+\int u^{-2}du+Ln\left|(x-4)^3\right|+\alpha=Ln\left[(x-2)^2\cdot\left|(x-4)^3\right|\right]+\frac{u^{-1}}{-1}+\alpha=$$

$$=Ln\left[(x-2)^2\cdot\left|(x-4)^3\right|\right]-\frac{1}{u}+\alpha=Ln\left[(x-2)^2\cdot\left|(x-4)^3\right|\right]-\frac{1}{x-4}+\alpha$$

16.- Evaluar $\int \frac{3x^2-6x+15}{x(x+3)(x-3)}dx$.

Solución:

Resolviendo la integral: Aplicando la descomposición en fracciones simples:

$$I=\int \frac{3x^2-6x+15}{x(x+3)(x-3)}dx=3\cdot\int \frac{x^2-2x+5}{x(x+3)(x-3)}dx=3\cdot\left[\int \frac{Adx}{x}+\int \frac{Bdx}{x+3}+\int \frac{Cdx}{x-3}\right]=(*)$$

$A=?\quad B=?\quad C=?$

Por Coeficientes Indeterminados:

$$\frac{x^2-2x+5}{x(x+3)(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-3}$$

$$\frac{x^2-2x+5}{x(x+3)(x-3)}=\frac{A(x+3)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x+3)}{x(x+3)(x-3)}$$

$$x^2-2x+5=A(x+3)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x+3)$$

Aplicando el mismo procedimiento de los dos ejercicios anteriores. Al evaluar ambos polinomios para las raíces del polinomio en el denominador, se determinan los coeficientes indeterminados. Las raíces del polinomio en el denominador, $Q(x)=x(x+3)(x-3)$, son: $x=0,\ x=-3\quad y\quad x=3$.

Luego:

Para $x=0$:

$$(0^2)-2\cdot(0)+5=A\cdot(0+3)(0-3)+B\cdot 0\cdot(0-3)+C\cdot 0\cdot(0+3)$$

$$0-0+5=A\cdot 3\cdot(-3)+0+0$$

$$5=-9A\qquad\Rightarrow\qquad \boxed{A=-\frac{5}{9}}\qquad (i)$$

Para $x=-3$:

$$(-3)^2-2\cdot(-3)+5=A(-3+3)(-3-3)+B\cdot(-3)\cdot(-3-3)+C\cdot(-3)\cdot(-3+3)$$

$$9+6+5=A\cdot 0\cdot(-6)-B\cdot(-3)\cdot(-6)+C\cdot(-3)\cdot 0$$

$$20=0+18B+0$$

$$20=18B\qquad\Rightarrow\qquad \boxed{B=\frac{10}{9}}\qquad (ii)$$

Para $x=3$:

$$(3^2)-2\cdot(3)+5=A(3+3)(3-3)+B\cdot 3\cdot(3-3)+C\cdot 3\cdot(3+3)$$

$$9-6+5=A\cdot 6\cdot 0+3B\cdot 0+18C$$

$$8+15=0+0+18C$$

$$23=18C\qquad\Rightarrow\qquad \boxed{C=\frac{23}{18}}\qquad (iii)$$

Volviendo a (*):

$$(*)=I=2\cdot\left[\int \frac{\left(-\frac{5}{9}\right)\cdot dx}{x}+\int \frac{\frac{10}{9}\cdot dx}{x+3}+\int \frac{\frac{23}{18}\cdot dx}{x-3}\right]=2\cdot\left[-\frac{5}{9}\int \frac{dx}{x}+\frac{10}{9}\int \frac{dx}{x+3}+\frac{23}{18}\int \frac{dx}{x-3}\right]=-\frac{10}{9}Ln|x|+\frac{20}{9}Ln|x+3|+\frac{23}{9}Ln|x-3|+\alpha=$$

$$=-Ln\sqrt[9]{x^{10}}+Ln\sqrt[9]{(x+3)^{20}}+Ln\left|\sqrt[9]{(x-3)^{23}}\right|+\varepsilon=Ln\left|\frac{\sqrt[9]{x^{10}}\cdot\sqrt[9]{(x+3)^{20}}}{\sqrt[9]{(x-3)^{23}}}\right|+\alpha=Ln\left|\sqrt[9]{\frac{x^{10}\cdot(x+3)^{20}}{(x-3)^{23}}}\right|+\alpha$$

17.- Resolver $\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx.$

Solución:

Aplicando factorización en el denominador:

$$x^4+3x^2+2 = x^4+x^2+2x^2+2 = x^2(x^2+1)+2(x^2+1) = (x^2+2)(x^2+1)$$

Luego, al resultar un producto de factores cuadráticos irreducibles que no se repiten, queda:

$$I = \int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx = \int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+2} + \int \frac{(Cx+D)dx}{x^2+1} = (*) \qquad A=? \qquad B=? \qquad C=? \qquad D=?$$

Por Coeficientes Indeterminados:

$$\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2} = \frac{(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+2)}{x^4+3x^2+2}$$

$$x^3+x^2+x+2 = Ax^3+Ax+Bx^2+B+Cx^3+2Cx+Dx^2+2D$$

$$x^3+x^2+x+2 = (A+C)x^3+(B+D)x^2+(A+2C)x+B+2D$$

Comparando coeficientes:

$i)$ $\quad x^3 \Rightarrow A+C=1$

$ii)$ $\quad x^2 \Rightarrow B+D=1$

$iii)$ $\quad x \Rightarrow A+2C=1$

$iv)$ $\quad t.i. \Rightarrow B+2D=2$

Formando y resolviendo sistema de ecuaciones con *i)* y *iii)*:

$$\begin{cases} A+C=1 \\ A+2C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -A-C=-1 \\ \underline{A+2C=1} \end{cases}$$

$$\boxed{C=0} \quad (v)$$

Formando y resolviendo sistema de ecuaciones con *ii) y iv):*

$$\begin{cases} B+D=1 \\ B+2D=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -B-D=-1 \\ \underline{B+2D=2} \end{cases}$$

$$\boxed{D=1} \quad (vi)$$

Sustituyendo (v) en *i)*:

$$A+C=1 \Rightarrow A+0=1 \Rightarrow \boxed{A=1}$$

Sustituyendo (2) en *ii)*:

$$B+D=1 \Rightarrow B+1=1 \Rightarrow \boxed{B=0}$$

Luego, volviendo a (*):

$$(*) = I = \int \frac{(1\cdot x+0)dx}{x^2+2} + \int \frac{(0\cdot x+1)dx}{x^2+1} = \underbrace{\int \frac{xdx}{x^2+2}}_{(I_1)} + \int \frac{dx}{x^2+1} = (**)$$

Cambio de variable para I_1: $x^2+2=u \Rightarrow 2xdx=du \Rightarrow xdx=\frac{du}{2}$

Entonces, en (**):

$$(**) = I = \int \frac{\frac{du}{2}}{u} + \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} + \int \frac{dx}{x^2+1^2} = \frac{1}{2}Ln|u| + ArcTgx + \alpha = \frac{1}{2}Ln|x^2+2| + Arctgx + \alpha = Ln\left(\sqrt{x^2+2}\right) + ArcTgx + \alpha$$

18.- Determine: $\int \frac{2x^3+2x^2+3x+2}{(x^2+1)(x^2+x+1)}dx$.

Solución:

Resolviendo la integral. Como el denominador está formado por factores cuadráticos irreducibles, la integral queda de la siguiente manera:

$$I=\int \frac{2x^3+2x^2+3x+2}{(x^2+1)(x^2+x+1)}dx=\int \frac{Ax+B}{x^2+1}dx+\int \frac{Cx+D}{x^2+x+1}dx=(*) \qquad A=?\quad B=?\quad C=?\quad D=?$$

Por Coeficientes Indeterminados:

$$\frac{2x^3+2x^2+3x+2}{(x^2+1)\,(x^2+x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

$$\frac{2x^3+2x^2+3x+2}{(x^2+1)\,(x^2+x+1)}=\frac{(Ax+B)(x^2+x+1)+(Cx+D)(x^2+1)}{(x^2+1)\,(x^2+x+1)}$$

$$2x^3+2x^2+3x+2=Ax^3+Ax^2+Ax+Bx^2+Bx+B+Cx^3+Cx+Dx^2+D$$

$$2x^3+2x^2+3x+2=(A+C)\,x^3+(A+B+D)\,x^2+(A+B+C)\,x+(B+D)$$

Comparando coeficientes:

$i)\quad x^3 \Rightarrow A+C=2$

$ii)\quad x^2 \Rightarrow A+B+D=2$

$iii)\quad x \Rightarrow A+B+C=3$

$iv)\quad t.i. \Rightarrow B+D=2$

Despejando C de *(i)*: $\boxed{C=2-A}$ (v)

Despejando D de *(iv)*: $\boxed{D=2-B}$ (vi)

Sustituyendo *(v)* en *(iii)*:

$A+B+2-A=3 \Rightarrow B+2=3 \Rightarrow B=3-2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B=1}$ (vii)

Sustituyendo *(vi)* en *(ii)*:

$A+B+2-B=2 \Rightarrow A+2=2 \Rightarrow A=2-2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A=0}$ $(viii)$

Sustituyendo *(vii)* en *(vi)*:

$D=2-1=1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{D=1}$ (ix)

Sustituyendo *(viii)* en *(v)*: $C=2-0=2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C=2}$ (x)

Volviendo a (*):

$$(*)=\int \frac{0\cdot x+1}{x^2+1}dx+\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=\int \frac{dx}{x^2+1}+\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=ArcTgx+\int \frac{(2x+1)\,dx}{x^2+x+1}+\alpha=ArcTgx+\int d\left[Ln\left|x^2+x+1\right|\right]+\alpha=$$

$$=ArcTgx+Ln\left|x^2+x+1\right|+\alpha$$

19.- Obtener: $\int \frac{x^4+8x^3+33x^2+69x+74}{(x^2+4x+8)^2}dx$.

Solución:

Se resuelve la integral. Se desarrolla el producto notable presente en el denominador.

$$I=\int \frac{x^4+8x^3+33x^2+69x+74}{(x^2+4x+8)^2}dx=\int \frac{x^4+8x^3+33x^2+69x+74}{x^4+8x^3+32x^2+64x+64}dx=(*)$$

En esta integral se observa que $gr\left[P(x)\right]=gr\left[Q(x)\right]$. Al aplicar la técnica de integración por descomposición en fracciones simples, se debe aplicar en primer lugar el algoritmo de la división de polinomios:

$$(*)=I=\int\left(1+\frac{x^2+5x+10}{x^4+8x^3+32x^2+64x+64}\right)dx=\int\left[1+\frac{x^2+5x+10}{(x^2+4x+8)^2}\right]dx=\int dx+\int \frac{x^2+5x+10}{(x^2+4x+8)^2}dx=x+\underbrace{\int \frac{x^2+5x+10}{(x^2+4x+8)^2}dx}_{(I_1)}+\alpha=(**)$$

La fracción que forma el integrando de I_1 es propia y tiene por denominador una expresión algebraica que es cuadrática irreducible y que además se repite. Entonces, al volver a (**), la integral queda:

$$(**) = I = x + \int \frac{x^2+5x+10}{(x^2+4x+8)^2}\,dx + \alpha = x + \int \frac{Ax+B}{x^2+4x+8}\,dx + \int \frac{Dx+E}{(x^2+4x+8)^2}\,dx + \alpha = (***)$$

$A = ?\quad B = ?\quad D = ?\quad E = ?$

Por Coeficientes Indeterminados:

$$\frac{x^2+5x+10}{(x^2+4x+8)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+4x+8} + \frac{Dx+E}{(x^2+4x+8)^2}$$

$$\frac{x^2+5x+10}{(x^2+4x+8)^2} = \frac{(Ax+B)(x^2+4x+8)+Dx+E}{(x^2+4x+8)^2}$$

$$x^2+5x+10 = (Ax+B)(x^2+4x+8)^2 + Dx+E$$

Para calcular los valores de los coeficientes indeterminados, se puede utilizar el método aplicado en los ejercicios Nº 14, Nº 15 y Nº 16. Las raíces de x^2+4x+8 se obtienen por la Ecuación Resolvente de las Ecuaciones de 2º Grado:

Para $a=1, b=4\ y\ c=8,$ se tiene:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2-4\cdot 1\cdot 8}}{2\cdot 1} = \frac{-4\pm\sqrt{16-32}}{2} = \frac{-4\pm\sqrt{-16}}{2} = -2\pm 2i \quad \begin{cases} x_1 = -2+2i \\ x_2 = -2-2i \end{cases}$$

Las raíces son números complejos y al utilizarlas, se tiene lo siguiente:

Para $x_1 = -2+2i$:

$$(-2+2i)^2 + 5\cdot(-2+2i) + 10 = [(A\cdot(-2+2i)+B)]\cdot[(-2+2i)^2 + 4\cdot(-2+2i)+8] + D\cdot(-2+2i)+E$$
$$4-8i-4-10+10i+10 = (-2A+2Ai+B)\cdot(4-8i-4-8+8i+8) - 2D+2iD+E$$
$$2i = (-2A+2Ai+B)\cdot 0 - 2D+E+2iE$$
$$2i = (-2D+E)+2iD$$

Cuando dos números complejos son iguales, sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias también. Entonces se puede formar el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -2D+E=0 \\ D=1 \end{cases}$$

De aquí se tiene que: $\boxed{D=1}$ y $\boxed{E=2}$

Para $x_1 = -2-2i$:

$$(-2-2i)^2 + 5\cdot(-2-2i)+10 = [(A\cdot(-2-2i)+B)]\cdot[(-2-2i)^2 + 4\cdot(-2-2i)+8] + D\cdot(-2-2i)+E$$
$$4+8i+4-10-10i+10 = (-2A-2Ai+B)\cdot(4+8i+4-8-8i+8) - 2D-2iD+E$$
$$8-2i = (-2A-2Ai+B)\cdot 8 - 2D-2iD+E$$
$$8-2i = -16A-16Ai+8B-2D-2iD+E$$
$$8-2i = (-16A+8B-2D+E)+(-16A-2D)i$$

Por igualdad de números complejos, se tiene que:

$$\begin{cases} -16A+8B-2D+E=8 \\ -16A-2D=-2 \end{cases}$$

$$-16A-2\cdot 1 = -2 \Rightarrow -16A-2=-2 \Rightarrow \quad \boxed{A=0}$$

Sustituyendo el valor de *D* en la segunda ecuación:
Sustituyendo los valores de *A*, *D* y E en la primera ecuación:

$$-16\cdot 0 + 8B - 2\cdot 1 + 2 = 8 \Rightarrow 8B-2+2=8 \Rightarrow \quad \boxed{B=1}$$

Volviendo a (***):

$$(***) = I = x + \int \frac{0\cdot x+1}{x^2+4x+8}\,dx + \int \frac{1\cdot x+2}{(x^2+4x+8)^2}\,dx + \alpha = x + \underbrace{\int \frac{dx}{x^2+4x+8}}_{(I_2)} + \underbrace{\int \frac{(x+2)dx}{(x^2+4x+8)^2}}_{(I_3)} + \alpha = (****)$$

En I_2 se completa cuadrados en el denominador:

$$x^2+4x+8=(x^2+4x+4-4)+8=(x+2)^2+4$$

En I_3 se hace cambio de variable:

$$u=x^2+4x+8 \Rightarrow du=(2x+4)\,dx \Rightarrow du=2(x+2)dx \Rightarrow \frac{du}{2}=(x+2)dx$$

Volviendo a (****):

$$(****)=I=x+\int\frac{dx}{x^2+4x+8}+\int\frac{(x+2)dx}{(x^2+4x+8)^2}+\alpha=x+\int\frac{dx}{(x+2)^2+4}+\int\frac{\frac{du}{2}}{u^2}+\alpha=x+\int\frac{dx}{(x+2)^2+2^2}+\frac{1}{2}\int u^{-2}du+\alpha=$$

$$=x+\frac{1}{2}ArcTg\left(\frac{x+2}{2}\right)-\frac{1}{2u}+\alpha=x+\frac{1}{2}ArcTg\left(\frac{x+2}{2}\right)-\frac{1}{2(x^2+4x+8)}+\alpha$$

20. - Determinar $\int\frac{dx}{1+Senx-Cosx}$.

Solución:

Este ejemplo corresponde a la integral de una función racional de seno y coseno. Para este tipo de funciones, según se revisó en el artículo correspondiente, los cambios a realizar son los siguientes:

$$z=Tg\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow x=2\,ArcTg\,z \Rightarrow dx=\frac{2dz}{1+z^2} \quad ; \quad Cos\,x=\frac{1-z^2}{1+z^2} \quad \wedge \quad Sen\,x=\frac{2z}{1+z^2}$$

Luego:

$$I=\int\frac{dx}{1+Senx-Cosx}=\int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{1+\frac{2z}{1+z^2}-\frac{1-z^2}{1+z^2}}=\int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{1+z^2+2z-1+z^2}{1+z^2}}=2\int\frac{dz}{2z^2+2z}=\underbrace{\int\frac{dz}{z(z+1)}}_{(I_1)}=(*)$$

Por descomposición en fracciones simples en I_1:

$$\frac{1}{z(z+1)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z+1}$$

$$\frac{1}{z(z+1)}=\frac{A(z+1)+Bz}{z(z+1)}$$

$$1=Az+A+Bz$$
$$1=(A+B)z+A$$

$$\begin{cases}A+B=0\Rightarrow A=-B\\ A=1 \quad\Rightarrow\quad B=-1\end{cases}$$

Volviendo a (*):

$$(*)=\int\frac{Adz}{z}+\int\frac{Bdz}{z+1}=\int\frac{dz}{z}-\int\frac{dz}{z+1}=Ln|z|-Ln|z+1|+\alpha=Ln\left|\frac{z}{z+1}\right|+\alpha=Ln\left|\frac{Tg\left(\frac{x}{2}\right)}{Tg\left(\frac{x}{2}\right)+1}\right|+\alpha$$

21.- Compruebe si $\int\frac{dx}{1+x^3}=Ln\left|\sqrt[6]{\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}}\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}ArcTg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\alpha$

Solución:

Resolviendo la integral. Aplicando factorización en el denominador y aplicando descomposición en fracciones simples:

$$I=\int\frac{dx}{1+x^3}=\int\frac{dx}{(1+x)(1-x+x^2)}=\int\frac{A\,dx}{1+x}+\int\frac{(Bx+C)\,dx}{1-x+x^2}=(*)$$

$A=?\quad B=?\quad C=?$

Por Coeficientes Indeterminados:

$$\frac{1}{1+x^3}=\frac{A}{1+x}+\frac{Bx+C}{1-x+x^2}$$

$$\frac{1}{1+x^3}=\frac{A(1-x+x^2)+(Bx+C)(1+x)}{(1+x)(1-x+x^2)}$$

$$\frac{1}{1+x^3}=\frac{A-Ax+Ax^2+Bx+Bx^2+C+Cx}{1+x^3}$$

$$\frac{1}{1+x^3}=\frac{(A+B)\,x^2+(-A+B+C)\,x+(A+C)}{1+x^3}$$

$$0\cdot x^2+0\cdot x+1=(A+B)\,x^2+(-A+B+C)\,x+(A+C)$$

Comparando coeficientes:

$i)\ \ x^2\to A+B=0 \qquad \Rightarrow \quad A=-B\ \ (iv)$

$ii)\ \ x\to -A+B+C=0$

$iii)\ t.i.\to A+C=1 \qquad \Rightarrow \quad C=1-A\ \ (v)$

Sustituyendo *(iv)* y *(v)* en *(ii)*:

$$-(-B)+B+(1-A)=0$$

$$B+B+1+B=0\ \ \Rightarrow \boxed{B=-\frac{1}{3}}\ (vi)$$

Luego: $\boxed{A=\frac{1}{3}}\ (vii) \qquad \boxed{C=\frac{2}{3}}\ (viii)$

Volviendo a (*):

$$(*)=I=\int\frac{\frac{1}{3}\,dx}{1+x}+\int\frac{(-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3})\,dx}{1-x+x^2}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{1+x}-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{1-x+x^2}\,dx=\frac{1}{3}Ln\left|1+x\right|-\frac{1}{3}\int\frac{x\,dx}{1-x+x^2}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{1-x+x^2}+\alpha=$$

$$=\frac{1}{3}Ln\left|1+x\right|-\frac{1}{6}\int\frac{2x\,dx}{1-x+x^2}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{1-x+x^2}+\alpha=\frac{1}{3}Ln\left|1+x\right|-\frac{1}{6}\int\frac{(2x-1+1)\,dx}{1-x+x^2}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{1-x+x^2}+\alpha=$$

$$=\frac{1}{3}Ln\left|1+x\right|-\frac{1}{6}\int\frac{(2x-1)\,dx}{1-x+x^2}-\frac{1}{6}\int\frac{dx}{1-x+x^2}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{1-x+x^2}+\alpha=\frac{1}{3}Ln\left|1+x\right|-\frac{1}{6}\int\frac{d\left(1-x+x^2\right)}{1-x+x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1-x+x^2}+\alpha=$$

$$=\frac{1}{3}Ln\left|1+x\right|-\frac{1}{6}Ln\left|1-x+x^2\right|+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\alpha=\frac{2}{6}Ln\left|1+x\right|-\frac{1}{6}Ln\left|1-x+x^2\right|+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}ArcTg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\alpha=$$

$$=Ln\left|\sqrt[6]{\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}}\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}ArcTg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\alpha$$

L.Q.Q.C.

22.- Determine si: $\int\frac{(2+Tg\,x)\,Sec^2z}{1+Tg^3z}dz=(2+Tg\,x)\cdot\left[Ln\left|\sqrt[6]{\frac{(1+Tg\,z)^2}{1-Tg\,z+Tg^2z}}\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}ArcTg\left(\frac{2Tg\,z-1}{\sqrt{3}}\right)\right]+\alpha$

Solución:

Resolviendo la integral. El factor $2+Tg\,x$ es una constante con respecto a la variable de integración. Se extrae de la integral:

$$I=\int\frac{(2+Tg\,x)\,Sec^2z}{1+Tg^3z}\,dz=(2+Tg\,x)\int\frac{Sec^2z}{1+Tg^3z}\,dz.$$

Se procede con el siguiente cambio de variable: $u=Tg\,z\Rightarrow du=Sec^2z\,dz$

Aplicando el cambio, aplicando factorización en el denominador y trabajando por descomposición en fracciones simples:

$$I=(2+Tgx)\int\frac{du}{1+u^3}=(2+Tgx)\int\frac{du}{\left(1+u\right)\left(1-u+u^2\right)}=(2+Tgx)\cdot\left[\int\frac{A\,du}{1+u}+\int\frac{(Bu+C)\,dx}{1-u+u^2}\right]=(*)$$

$A=?\quad B=?\quad C=?$

Por Coeficientes Indeterminados:

$$\frac{1}{1+u^3}=\frac{A}{1+u}+\frac{Bu+C}{1-u+u^2}$$

$$\frac{1}{1+u^3}=\frac{A(1-u+u^2)+(Bu+C)(1+u)}{(1+u)(1-u+u^2)}$$

$$\frac{1}{1+u^3}=\frac{A-Au+Au^2+Bu+Bu^2+C+Cu}{1+u^3}$$

$$\frac{1}{1+u^3}=\frac{(A+B)u^2+(-A+B+C)u+(A+C)}{1+u^3}$$

$$0\cdot u^2+0\cdot u+1=(A+B)u^2+(-A+B+C)u+(A+C)$$

Comparando coeficientes:

$i)\ \ u^2\rightarrow A+B=0 \qquad \Rightarrow \quad A=-B\ \ (iv)$

$ii)\ u\rightarrow -A+B+C=0$

$iii)\ t.i.\rightarrow A+C=1 \qquad \Rightarrow \quad C=1-A\ \ (v)$

Sustituyendo *(iv)* y *(v)* en *(ii)*:

$-(-B)+B+(1-A)=0$

$B+B+1+B=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B=-\frac{1}{3}}\ \ (vi)$

Luego: $\boxed{A=\frac{1}{3}}\ (vii) \qquad \boxed{C=\frac{2}{3}}\quad (viii)$

Volviendo a (*):

$$(*)=I=(2+Tg\ x)\cdot\left[\int\frac{\frac{1}{3}du}{1+u}+\int\frac{(-\frac{1}{3}u+\frac{2}{3})\,du}{1-u+u^2}\right]=(2+Tg\ x)\cdot\left[\frac{1}{3}\int\frac{du}{1+u}-\frac{1}{3}\int\frac{u-2}{1-u+u^2}\,du\right]=$$

$$=(2+Tg\ x)\cdot\left[\frac{1}{3}Ln\left|1+u\right|-\frac{1}{3}\int\frac{u\,du}{1-u+u^2}+\frac{2}{3}\int\frac{du}{1-u+u^2}\right]+\alpha=(2+Tg\ x)\cdot\left[\frac{1}{3}Ln\left|1+u\right|-\frac{1}{6}\int\frac{2u\,du}{1-u+u^2}+\frac{2}{3}\int\frac{du}{1-u+u^2}\right]+\alpha=$$

$$=(2+Tg\ x)\cdot\left[\frac{1}{3}Ln\left|1+u\right|-\frac{1}{6}\int\frac{(2u-1+1)\,du}{1-u+u^2}+\frac{2}{3}\int\frac{du}{1-u+u^2}\right]+\alpha=(2+Tg\ x)\cdot\left[\frac{1}{3}Ln\left|1+u\right|-\frac{1}{6}\int\frac{(2u-1)\,du}{1-u+u^2}-\frac{1}{6}\int\frac{du}{1-u+u^2}+\frac{2}{3}\int\frac{du}{1-u+u^2}\right]+\alpha=$$

$$=(2+Tg\ x)\cdot\left[\frac{1}{3}Ln\left|1+u\right|-\frac{1}{6}\int\frac{d\left(1-u+u^2\right)}{1-u+u^2}+\frac{1}{2}\int\frac{du}{1-u+u^2}\right]+\alpha=(2+Tg\ x)\cdot\left[\frac{1}{3}Ln\left|1+u\right|-\frac{1}{6}Ln\left|1-u+u^2\right|+\frac{1}{2}\int\frac{du}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right]+\alpha=$$

$$=(2+Tg\ x)\cdot\left[\frac{2}{6}Ln\left|1+u\right|-\frac{1}{6}Ln\left|1-u+u^2\right|+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}ArcTg\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)\right]+\alpha=(2+Tg\ x)\cdot\left[Ln\left|\sqrt[6]{\frac{(1+u)^2}{1-u+u^2}}\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}ArcTg\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)\right]+\alpha=$$

$$=(2+Tg\ x)\cdot\left[Ln\left|\sqrt[6]{\frac{(1+Tg\ z)^2}{1-Tg\ z+Tg^2z}}\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}ArcTg\left(\frac{2Tg\ z-1}{\sqrt{3}}\right)\right]+\alpha$$

23.- Compruebe que: $\int\frac{\sqrt{Sen\ x}}{Cos\ x}dx=Ln\left|\sqrt{\frac{1+\sqrt{Sen\ x}}{1-\sqrt{Sen\ x}}}\right|-ArcTg\left(\sqrt{Sen\ x}\right)+\alpha$

<u>Comprobación</u>:

Resolviendo la integral: Se utiliza la identidad trigonométrica $Cos\ x=\sqrt{1-Sen^2x}$.

$$I=\int\frac{\sqrt{Sen\ x}}{Cos\ x}dx=\int\frac{\sqrt{Sen\ x}}{\sqrt{1-Sen^2x}}dx.$$

Se procede con el siguiente cambio: $Sen\ x=t^2 \Rightarrow\ x=ArcSen\left(t^2\right)\Rightarrow\ dx=\frac{2t\ dt}{\sqrt{1-t^4}}$

Aplicando el cambio, aplicando factorización en el denominador y utilizando la descomposición en fracciones simples:

$$I=\int\frac{\sqrt{t^2}}{\sqrt{1-t^4}}\cdot\frac{2t\ dt}{\sqrt{1-t^4}}dt=2\int\frac{t^2dt}{1-t^4}=2\int\frac{t^2dt}{\left(1+t^2\right)\left(1-t^2\right)}=2\int\frac{t^2dt}{\left(1+t^2\right)(1+t)(1-t)}=2\cdot\left[\int\frac{\left(At+B\right)dt}{1+t^2}+\int\frac{C\ dt}{1+t}+\int\frac{D\ dt}{1-t}\right]=(*)$$

$A=?\quad B=?\quad C=?\quad D=?$

Por Coeficientes Indeterminados:

$$\frac{t^2}{1-t^4}=\frac{At+B}{1+t^2}+\frac{C}{1+t}+\frac{D}{1-t}$$

$$\frac{t^2}{1-t^4}=\frac{(At+B)(1+t)(1-t)+C(1+t^2)(1-t)+D(1+t^2)(1+t)}{(1+t^2)(1+t)(1-t)}$$

$$\frac{t^2}{1-t^4}=\frac{(At+B)(1-t^2)+C(1-t+t^2-t^3)+D(1+t+t^2+t^3)}{1-t^4}$$

$$t^2=At-At^3+B-Bt^2+C-Ct+Ct^2-Ct^3+D+Dt+Dt^2+Dt^3$$

$$0\cdot t^3+t^2+0\cdot t+0=(-A-C+D)\cdot t^3+(-B+C+D)\cdot t^2+(A-C+D)\cdot t+(B+C+D)$$

Comparando coeficientes:

$i)\quad t^3\to -A-C+D=0$

$ii)\ t^2\to -B+C+D=1$

$iii)\ t\ \to A-C+D=0$

$iv)\ t.i.\to B+C+D=0$

Formando sistema de ecuaciones con *(i)* y *(iii)*:

$$\begin{cases}-A-C+D=0\\ A-C+D=0\end{cases}$$

$$-2C+2D=0$$

$$-C+D=0$$

$$\boxed{D=C}\qquad (v)$$

Formando sistema de ecuaciones con *(ii)* y *(iv)*:

$$\begin{cases}-B+C+D=1\\ B+C+D=0\end{cases}$$

$$2C+2D=0$$

$$\boxed{C+D=\frac{1}{2}}\qquad (vi)$$

De *(v)* y de *(vi)* se tiene que: $\boxed{C=D=\frac{1}{4}}\qquad (vii)$

Sustituyendo *(vii)* en *(iii)* y en *(iv)*, se obtiene:

$\boxed{A=0}\qquad \boxed{B=-\frac{1}{2}}$

Volviendo a (*):

$$(*)=2\left[\int\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)dt}{1+t^2}+\int\frac{\frac{1}{4}\,dt}{1+t}+\int\frac{\frac{1}{4}\,dt}{1-t}\right]=2\left[-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{1+t}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{1-t}\right]=2\left[-\frac{1}{2}ArcTg\,(t)+\frac{1}{4}Ln|1+t|-\frac{1}{4}Ln|1-t|\right]+\alpha=$$

$$=-ArcTg\,(t)+\frac{1}{2}Ln|1+t|-\frac{1}{2}Ln|1-t|+\alpha=Ln\left|\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\right|-ArcTg\,(t)+\alpha=Ln\left|\sqrt{\frac{1+\sqrt{Sen\,x}}{1-\sqrt{Sen\,x}}}\right|-ArcTg\left(\sqrt{Sen\,x}\right)+\alpha$$

L. Q. Q. C.

24.- Compruebe que: $\int\left(\frac{4x^2+7x+25}{x^3-2x^2-3x}\right)dx=Ln\left|\sqrt[6]{\frac{(x+1)^{33}\cdot(x-3)^{41}}{x^{50}}}\right|+C$ con $x>3$.

<u>Comprobando</u>:

Resolviendo la integral. Aplicando factorización en el denominador y aplicando descomposición en fracciones simples:

$$I=\int\left(\frac{4x^2+7x+25}{x^3-2x^2-3x}\right)dx=\int\frac{4x^2+7x+25}{x\cdot(x^2-2x-3)}dx=\int\frac{4x^2+7x+25}{x\cdot(x-3)\cdot(x+1)}dx=\int\frac{Adx}{x}+\int\frac{Bdx}{x-3}+\int\frac{Cdx}{x+1}=(*)$$

$A=?\ \ B=?\ \ C=?$

Por Coeficientes Indeterminados:

$$\frac{4x^2+7x+25}{x^3-2x^2-3x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x+1}$$

$$\frac{4x^2+7x+25}{x^3-2x^2-3x}=\frac{A\cdot(x-3)\cdot(x+1)+B\cdot x\cdot(x+1)+C\cdot x\cdot(x-3)}{x\cdot(x-3)\cdot(x+1)}$$

$$\frac{4x^2+7x+25}{x^3-2x^2-3x}=\frac{A\cdot(x^2-2x-3)+B\cdot(x^2+x)+C\cdot(x^2-3x)}{x^3-2x^2-3x}$$

$$4x^2+7x+25=Ax^2-2Ax-3A+Bx^2+Bx+Cx^2-3Cx$$

$$4x^2+7x+25=(A+B+C)\cdot x^2+(B-2A-3C)\cdot x-3A$$

Comparando coeficientes:

$x^2: \; A+B+C=4$

$x: \; B-2A-3C=7$

$t.i.: \; -3A=25$

Luego:

$$\begin{cases} A=-\dfrac{25}{3} \\ B=\dfrac{41}{6} \\ C=\dfrac{11}{2} \end{cases}$$

Volviendo a (*):

$$(*)=I=\int\frac{\left(-\frac{25}{3}\right)dx}{x}+\int\frac{\frac{41}{6}\,dx}{x-3}+\int\frac{\frac{11}{2}\,dx}{x+1}=-\tfrac{25}{3}\int\frac{dx}{x}+\tfrac{41}{6}\int\frac{dx}{x-3}+\tfrac{11}{2}\int\frac{dx}{x+1}=$$

$$=-\tfrac{25}{3}\cdot Ln|x|+\tfrac{41}{6}\cdot Ln|x-3|+\tfrac{11}{2}Ln|x+1|+\alpha=-\tfrac{50}{6}\cdot Ln|x|+\tfrac{41}{6}\cdot Ln|x-3|+\tfrac{33}{6}Ln|x+1|+\alpha=$$

$$=-\tfrac{1}{6}\cdot Ln\left|x^{50}\right|+\tfrac{1}{6}\cdot Ln\left|(x-3)^{41}\right|+\tfrac{1}{6}Ln\left|(x+1)^{33}\right|+\alpha=\tfrac{1}{6}\cdot Ln\left|\frac{(x+1)^{33}\cdot(x-3)^{41}}{x^{50}}\right|+\alpha=$$

$$=Ln\left|\sqrt[6]{\frac{(x+1)^{33}\cdot(x-3)^{41}}{x^{50}}}\right|+\alpha$$

25.- Verifique si $\int\frac{x^4\,dx}{x^4+2x^2+1}=x-\frac{3}{2}ArcTg\,(x)+\frac{x}{2\left(x^2+1\right)}+\alpha$.

Verificación:

Resolviendo la integral. Como $grd\left[f(x)\right]=grd\left[g(x)\right]$, previamente se realiza la división de polinomios.

$$I=\int\frac{x^4dx}{x^4+2x^2+1}=\int\left(1-\frac{2x^2+1}{x^4+2x^2+1}\right)dx=\int dx-\int\frac{2x^2+1}{x^4+2x^2+1}dx=x-\underbrace{\int\frac{2x^2+1}{x^4+2x^2+1}dx}_{(I_1)}+\alpha=(*)$$

Resolviendo por separado a I_1:

$$I_1=\int\frac{2x^2+1}{x^4+2x^2+1}dx=\int\frac{2x^2+1}{x^4+x^2+x^2+1}dx=\int\frac{2x^2+1}{x^2\cdot\left(x^2+1\right)+1\cdot\left(x^2+1\right)}dx=\int\frac{2x^2+1}{\left(x^2+1\right)\cdot\left(x^2+1\right)}dx=\int\frac{2x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}dx=$$

$$=\int\frac{(Ax+B)dx}{\left(x^2+1\right)^2}+\int\frac{(Cx+D)dx}{x^2+1}+\alpha_1=(**)$$

Por Coeficientes Indeterminados:

$$\frac{2x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{Ax+B}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$\frac{2x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{Ax+B+(Cx+D)\cdot\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$2x^2+1=Ax+B+Cx^3+Cx+Dx^2+D$$

$$0\cdot x^3+2x^2+0\cdot x+1=Cx^3+Dx^2+(A+C)x+(B+D)$$

Comparando coeficientes:

$i)\; x^3\rightarrow \boxed{C=0}$

$ii)\; x^2\rightarrow \boxed{D=2}$

$iii)\; x\rightarrow \quad A+C=0$

$iv)\; t.i.\rightarrow \quad B+D=1$

Sustituyendo *i)* en *iii)*: $A+0=0 \quad\rightarrow\quad \boxed{A=0}$

Sustituyendo *ii)* en *iv)*: $B+2=1 \quad\rightarrow\quad \boxed{B=-1}$

Volviendo a (**):

$$(**) = I_1 = \int \frac{(0\cdot x - 1)\,dx}{(x^2+1)^2} + \int \frac{(0\cdot x + 2)\,dx}{x^2+1} + \alpha_1 = -\underbrace{\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}} + 2\int \frac{dx}{x^2+1} + C_1 = -\underbrace{\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}}_{(I_2)} + 2ArcTg\,(x) + \alpha_1 = (***)$$

Resolviendo a I_2. Se rescribe el integrando para resolver la integral utilizando sustituciones trigonométricas:

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^4}$$

Procediendo a hacer el estudio correspondiente:

Forma:

$$\sqrt{1+x^2} \equiv \sqrt{a^2+x^2}$$

$$a^2 = 1 \rightarrow a = 1$$

Cambio:

$$x = a\cdot Tg\,z \;\rightarrow\; x = Tg\,z \;\rightarrow\; dx = Sec^2 z\,dz$$

Luego:

$$I_2 = \int \frac{Sec^2 z\,dz}{\left(\sqrt{1+Tg^2 z}\right)^4} = \int \frac{Sec^2 z\,dz}{Sec^4 z} = \int \frac{dz}{Sec^2 z} = \int Cos^2\,z\,dz = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}Sen(2z) + \alpha_2 = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}Sen z\cdot Cos z + \alpha_2 = (****)$$

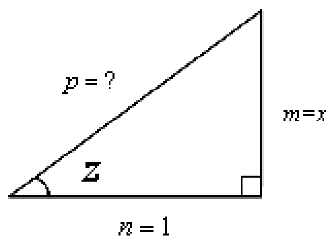
$$z = ? \quad Sen z = ? \quad Cos z = ?$$

Devolviendo el cambio:

Como $x = Tg\,z$ entonces $z = ArcTg\,(x)$

También hay que considerar que $Tg\,z = \frac{m}{n} = \frac{x}{1}$

Luego, en el triángulo rectángulo:



Por Teorema de Pitágoras:

$$p^2 = m^2 + n^2$$

$$p = \sqrt{m^2+n^2}$$

$$p = \sqrt{x^2+1}$$

Por lo tanto:

$$Sen\,z = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \wedge \qquad Cos\,z = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Volviendo a (****):

$$(****) = I_2 = \frac{1}{2}ArcTg\,(x) + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \alpha_2 = \frac{1}{2}ArcTg\,(x) + \frac{x}{2(x^2+1)} + \alpha_2$$

Volviendo a (***):

$$(***) = I_1 = -\left[\frac{1}{2}ArcTg\,(x) + \frac{x}{2(x^2+1)}\right] + 2ArcTg\,(x) + \alpha_1 = \frac{3}{2}ArcTg\,(x) - \frac{x}{2(x^2+1)} + \alpha_1$$

Volviendo a (*):

$$(*) = I = x - \left[\frac{3}{2}ArcTg(x) - \frac{x}{2(x^2+1)}\right] + \alpha = (*) = x - \frac{3}{2}ArcTg(x) + \frac{x}{2(x^2+1)} + \alpha$$

L. Q. Q. V.

26.- Determine si: $\int \frac{\left(5z^3 - z^2 + 15z - 10\right)}{\left(z^2 - 2z + 5\right)^2} dz = \frac{15 - 47z}{8 \cdot \left(z^2 - 2z + 5\right)} + \frac{65}{16} ArcTg\left(\frac{z-1}{2}\right) + \frac{5}{2} \cdot Ln\left| z^2 - 2z + 5 \right| + \alpha \cdot$

Determinando:

Resolviendo la integral. Es una integral cuyo integrando está conformado por una función irracional propia. Como en el denominador del integrando aparece un factor cuadrático, verifiquemos si es irreducible:

$z^2 - 2z + 5 \quad \Rightarrow \quad \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16 < 0 \cdot$

El factor es cuadrático irreducible. Se puede resolver la integral utilizando la descomposición en fracciones simples (o fracciones parciales).

$$I = \int \frac{\left(5z^3 - z^2 + 15z - 10\right)}{\left(z^2 - 2z + 5\right)^2} dz = \int \frac{Az + B}{\left(z^2 - 2z + 5\right)^2} dz + \int \frac{Cz + D}{z^2 - 2z + 5} dz = (*) \qquad A = ? \quad B = ? \quad C = ? \quad D = ?$$

Por Coeficientes Indeterminados:

$$\frac{5z^3 - z^2 + 15z - 10}{\left(z^2 - 2z + 5\right)^2} = \frac{Az + B}{\left(z^2 - 2z + 5\right)^2} + \frac{Cz + D}{z^2 - 2z + 5}$$

$$\frac{5z^3 - z^2 + 15z - 10}{\left(z^2 - 2z + 5\right)^2} = \frac{Az + B + (Cz + D) \cdot \left(z^2 - 2z + 5\right)}{\left(z^2 - 2z + 5\right)^2}$$

$$5z^3 - z^2 + 15z - 10 = Az + B + Cz^3 - 2Cz^2 + 5Cz + Dz^2 - 2Dz + 5D$$

$$5z^3 - z^2 + 15z - 10 = Cz^3 + (-2C + D) \cdot z^2 + (A + 5C - 2D) \cdot z + (B + 5D)$$

Comparando Coeficientes:

$i)\ z^3: \quad C = 5$

$ii)\ z^2: \quad -2C + D = -1 \quad \Rightarrow -2 \cdot 5 + D = -1 \quad \Rightarrow D = 9$

$iii)\ z: \quad A + 5C - 2D = 15 \quad \Rightarrow A + 5 \cdot 5 - 2 \cdot 9 = 15 \quad \Rightarrow A = 8$

$iv)\ t.i.: \quad B + 5D = -10 \quad \Rightarrow B + 5 \cdot 9 = -10 \quad \Rightarrow B = -55$

Volviendo a (*):

$$(*) = I = \int \frac{8z - 55}{\left(z^2 - 2z + 5\right)^2} dz + \int \frac{5z + 9}{z^2 - 2z + 5} dz =$$

$$= 4\int \frac{2z - \frac{55}{4}}{\left(z^2 - 2z + 5\right)^2} dz + \frac{5}{2}\int \frac{2z + \frac{18}{5}}{z^2 - 2z + 5} dz =$$

$$= 4\int \frac{2z - 2 - \frac{47}{4}}{\left(z^2 - 2z + 5\right)^2} dz + \frac{5}{2}\int \frac{2z - 2 + \frac{28}{5}}{z^2 - 2z + 5} dz =$$

$$= 4\int \frac{2z - 2}{\left(z^2 - 2z + 5\right)^2} dz - 47\int \frac{dz}{\left(z^2 - 2z + 5\right)^2} + \frac{5}{2}\int \frac{2z - 2}{z^2 - 2z + 5} dz + 14\int \frac{dz}{z^2 - 2z + 5} =$$

$$= 4\int \left(z^2 - 2z + 5\right)^{-2} \cdot d\left(z^2 - 2z + 5\right) - 47\int \frac{dz}{\left(z^2 - 2z + 5\right)^2} + \frac{5}{2}\int \frac{d\left(z^2 - 2z + 5\right)}{z^2 - 2z + 5} + 14\int \frac{dz}{z^2 - 2z + 5} =$$

$$= -\frac{4}{z^2 - 2z + 5} - 47\int \frac{dz}{\left(z^2 - 2z + 5\right)^2} + \frac{5}{2} Ln\left|z^2 - 2z + 5\right| + 14\int \frac{dz}{z^2 - 2z + 5} + \alpha =$$

$$= -\frac{4}{z^2 - 2z + 5} + \frac{5}{2} Ln\left|z^2 - 2z + 5\right| - 47\underbrace{\int \frac{dz}{\left(z^2 - 2z + 5\right)^2}}_{(I_1)} + 14\underbrace{\int \frac{dz}{z^2 - 2z + 5}}_{(I_2)} + \alpha = (*)$$

Se resuelven I_1 e I_2 por separado. Se utiliza como constante de integración a α para evitar confusión con la *"C"* que se ha utilizado como coeficiente indeterminado.

Resolviendo a I_1: Esta integral puede resolverse por sustituciones trigonométricas:

$$I_1 = \int \frac{dz}{\left(z^2 - 2z + 5\right)^2} = \int \frac{dz}{\left(\sqrt{z^2 - 2z + 5}\right)^4} = \int \frac{dz}{\left[\sqrt{(z-1)^2 + 4}\right]^4} = (*)$$

Estudio de la forma:

$$\sqrt{(z-1)^2+4} \equiv \sqrt{b^2u^2+a^2}$$

$$a^2 = 4 \rightarrow a = 2$$

$$b^2 = 1 \rightarrow b = 1$$

$$u^2 = (z-1)^2 \rightarrow u = z-1$$

Cambio: $u = \dfrac{a}{b}\cdot Tg\, w \quad \Rightarrow \quad z-1 = 2\cdot Tg\, w \quad \Rightarrow \quad dz = 2\cdot Sec^2 w\, dw$

Luego:

$$(*) = I_1 = \int \frac{2\cdot Sec^2 w\, dw}{\left[\sqrt{4\cdot Tg^2 w+4}\right]^4} = \frac{1}{8}\cdot\int\frac{Sec^2 w\, dw}{\left[\sqrt{Tg^2 w+1}\right]^4} = \frac{1}{8}\cdot\int\frac{Sec^2 w\, dw}{Sec^4 w} = \frac{1}{8}\cdot\int\frac{dw}{Sec^2 w} = \frac{1}{8}\cdot\int Cos^2 w\, dw = \frac{1}{8}\cdot\left[\frac{1}{2}w+\frac{1}{4}Sen(2w)\right]+\alpha_1 =$$

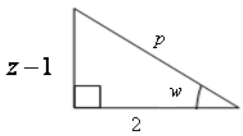
$$= \frac{1}{16}w+\frac{1}{32}\cdot 2\, Sen\, w\cdot Cos\, w+\alpha_1 = \frac{1}{16}w+\frac{1}{16}\cdot Sen\, w\cdot Cos\, w+\alpha_1 = (**)$$

Hay que devolver el cambio para determinar a w, a $Senw$ y a $Cos\ w$.

Por el cambio inicial:

$$z-1 = 2\cdot Tg\, w \quad \Rightarrow \quad Tg\, w = \frac{z-1}{2} \quad \Rightarrow \quad w = ArcTg\left(\frac{z-1}{2}\right)$$

Luego, en el triángulo rectángulo se tiene:



Por Teorema de Pitágoras:

$$p^2 = (z-1)^2 + 2^2$$

$$p = \sqrt{(z-1)^2+4} = \sqrt{z^2-2z+5}$$

Luego :

$$Sen\, w = \frac{z-1}{\sqrt{z^2-2z+5}} \qquad \wedge \qquad Cos\, w = \frac{2}{\sqrt{z^2-2z+5}}$$

Volviendo a (**):

$$(**) = I_1 = \frac{1}{16}\cdot ArcTg\left(\frac{z-1}{2}\right)+\frac{1}{16}\cdot\frac{z-1}{\sqrt{z^2-2z+5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{z^2-2z+5}}+\alpha_1 = \frac{1}{16}\cdot ArcTg\left(\frac{z-1}{2}\right)+\frac{1}{8}\cdot\frac{z-1}{(z^2-2z+5)}+\alpha_1$$

Resolviendo a I_2: Se completa cuadrados en el denominador.

$$I_2 = \int\frac{dz}{z^2-2z+5} = \int\frac{dz}{(z-1)^2+4} = \frac{1}{2}ArcTg\left(\frac{z-1}{2}\right)+\alpha_2$$

Volviendo a (*):

$$(*) = I = -\frac{4}{z^2-2z+5}+\frac{5}{2}Ln\left|z^2-2z+5\right|-47\cdot\left[\frac{1}{16}\cdot ArcTg\left(\frac{z-1}{2}\right)+\frac{1}{8}\cdot\frac{z-1}{(z^2-2z+5)}\right]+14\cdot\left[\frac{1}{2}ArcTg\left(\frac{z-1}{2}\right)\right]+\alpha =$$

$$= -\frac{4}{z^2-2z+5}+\frac{5}{2}Ln\left|z^2-2z+5\right|-\frac{47}{16}\cdot ArcTg\left(\frac{z-1}{2}\right)-\frac{47}{8}\cdot\frac{z-1}{(z^2-2z+5)}+7\cdot ArcTg\left(\frac{z-1}{2}\right)+\alpha =$$

$$= -\frac{4}{z^2-2z+5}+\frac{5}{2}Ln\left|z^2-2z+5\right|-\frac{47}{16}\cdot ArcTg\left(\frac{z-1}{2}\right)-\frac{47}{8}\cdot\frac{z-1}{(z^2-2z+5)}+7\cdot ArcTg\left(\frac{z-1}{2}\right)+\alpha =$$

$$= -\frac{4}{z^2-2z+5}-\frac{47}{8}\cdot\frac{z-1}{(z^2-2z+5)}-\frac{47}{16}\cdot ArcTg\left(\frac{z-1}{2}\right)+7\cdot ArcTg\left(\frac{z-1}{2}\right)+\frac{5}{2}Ln\left|z^2-2z+5\right|+\alpha =$$

$$= \frac{-32-47z+47}{8.(z^2-2z+5)}+\frac{65}{16}\cdot ArcTg\left(\frac{z-1}{2}\right)+\frac{5}{2}Ln\left|z^2-2z+5\right|+\alpha =$$

$$= \frac{15-47z}{8.(z^2-2z+5)}+\frac{65}{16}\cdot ArcTg\left(\frac{z-1}{2}\right)+\frac{5}{2}Ln\left|z^2-2z+5\right|+\alpha$$

L. Q. Q. D.

27.- Resolver la siguiente integral: $\int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8}\,dx.$

Solución:

Aplicando factorización en el denominador. Como todos los exponentes del polinomio que conforma el denominador son pares, podemos realizar el siguiente cambio: $x^2 = u$. Luego:

$$x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8 = (x^2)^3 + 6(x^2)^2 + 12x^2 + 8 = u^3 + 6u^2 + 12u + 8 = (u+2)^3 = (x^2+2)^3$$

[Aplicando, al final, la factorización: $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$]

Así, la integral queda:

$$I = \int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8}\,dx = \int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3}\,dx$$

Tenemos un denominador constituido por una expresión cuadrática irreducible que se repite (4º Caso).

Aplicando Descomposición en Fracciones Simples:

$$I = \int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3}\,dx = \int \frac{Ax+B}{(x^2+2)^3}\,dx + \int \frac{Cx+D}{(x^2+2)^2}\,dx + \int \frac{Ex+F}{x^2+2}\,dx = (*)$$

Por Coeficientes indeterminados:

$$\frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3} = \frac{Ax+B}{(x^2+2)^3} + \frac{Cx+D}{(x^2+2)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+2}$$

$$\frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3} = \frac{Ax + B + (Cx+D)(x^2+2) + (Ex+F)(x^2+2)^2}{(x^2+2)^3}$$

$$x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4 = Ax + B + Cx^3 + 2Cx + Dx^2 + 2D + (Ex+F)(x^4 + 4x^2 + 4)$$

$$x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4 = Ax + B + Cx^3 + 2Cx + Dx^2 + 2D + Ex^5 + 4Ex^3 + 4Ex + Fx^4 + 4Fx^2 + 4F$$

$$x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4 = Ex^5 + Fx^4 + (C+4E)x^3 + (D+4F)x^2 + (A+2C+4E)x + (B+2D+4F)$$

Comparando coeficientes:

$$\begin{array}{ll} i) & x^5 : E = 1 \\ ii) & x^4 : F = -1 \\ iii) & x^3 : C + 4E = 4 \Rightarrow C = 0 \\ iv) & x^2 : D + 4F = -4 \Rightarrow D = 0 \\ v) & x : A + 2C + 4E = 8 \Rightarrow A = 4 \\ vi) & t.i. : B + 2D + 4F = -4 \Rightarrow B = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A = 4 \\ B = 0 \\ C = 0 \\ D = 0 \\ E = 1 \\ F = -1 \end{cases}$$

Volviendo a (*):

$$(*) = I = \int \frac{4x+0}{(x^2+2)^3}\,dx + \int \frac{0\cdot x + 0}{(x^2+2)^2}\,dx + \int \frac{x-1}{x^2+2}\,dx = 4\int \frac{xdx}{(x^2+2)^3} + \int \frac{x-1}{x^2+2}\,dx =$$

$$= 4\underbrace{\int \frac{xdx}{(x^2+2)^3}}_{(I_1)} + \underbrace{\int \frac{xdx}{x^2+2}}_{(I_2)} - \underbrace{\int \frac{dx}{x^2+2}}_{(I_3)} = (**)$$

Resolviendo cada una de las integrales por separado.

Resolviendo a I_1:

$$I_1 = \int \frac{xdx}{(x^2+2)^3} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{(x^2+2)^3} = \frac{1}{2}\int (x^2+2)^{-3}\cdot 2xdx = \frac{1}{2}\int (x^2+2)^{-3}\cdot d(x^2+2) = \frac{1}{2}\int a^{-3}da = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^{-2}}{-2} + \alpha_1 =$$

$$= -\frac{1}{4a^2} + \alpha_1 = -\frac{1}{4(x^2+2)^2} + \alpha_1.$$

$c.v._1 : x^2 + 2 = a \Rightarrow da = 2xdx$

Resolviendo a I_2:

$$I_2 = \int \frac{xdx}{x^2+2} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+2} = \frac{1}{2}\int \frac{db}{b} = \frac{1}{2}Ln|b| + \alpha_2 = \frac{1}{2}Ln|x^2+2| + \alpha_2.$$

$c.v._2 : x^2 + 2 = b \Rightarrow db = 2xdx$

Resolviendo a I_3:

$$I_3 = \int \frac{dx}{x^2+2} = \int \frac{dx}{x^2 + (\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,ArcTg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \alpha_3.$$

[Se aplica la fórmula fundamental $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\,ArcTg\left(\frac{u}{a}\right) + C$]

Volviendo a (**):

$$(**) = 4I_1 + I_2 - I_3 = 4\cdot\left[-\frac{1}{4(x^2+2)^2}\right] + \frac{1}{2}Ln|x^2+2| - \frac{1}{\sqrt{2}}ArcTg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \alpha = -\frac{1}{(x^2+2)^2} + \frac{1}{2}Ln|x^2+2| - \frac{\sqrt{2}}{2}ArcTg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \alpha$$

28.-Determine si $\int \frac{dy}{-5+6y-y^2} = Ln\left|\sqrt[4]{\frac{y^2-2y+1}{-5+6y-y^2}}\right| + \alpha$.

Determinando:

Este ejercicio ya fue resuelto previamente utilizando la técnica de integración por sustituciones trigonométricas (Revista HOMOTECIA, Nº 4 – Año 17, 1º de Abril de 2019, Ejercicio 17, p.16); pero es bueno determinar si es posible hacerlo por la técnica de integración por descomposición en fracciones simples.

Se inicia la resolución aplicando factorización en el denominador.

$$I = \int \frac{dy}{-5+6y-y^2} = \int \frac{dy}{-\left(y^2-6y+5\right)} = -\int \frac{dy}{(y-5)\cdot(y-1)} = -\left(\int \frac{Ady}{y-5} + \int \frac{Bdy}{y-1}\right) = (*) \qquad A = ? \quad B = ?$$

Por Coeficientes Indeterminados:

$$\frac{1}{(y-5)\cdot(y-1)} = \frac{A}{y-5} + \frac{B}{y-1}$$
$$\frac{1}{(y-5)\cdot(y-1)} = \frac{A\cdot(y-1)+B\cdot(y-5)}{(y-5)\cdot(y-1)}$$
$$\frac{1}{(y-5)\cdot(y-1)} = \frac{Ay-A+By-5B}{y^2-6y+5}$$
$$0\cdot y+1 = (A+B)y + (-A-5B)$$

Comparando coeficientes:

$$i)\ y \ \to A+B=0 \Rightarrow \ A=-B$$
$$ii)\ t.i. \to -A-5B=1$$

Sustituyendo $i)$ en $ii)$:

$$-A-5B=1$$
$$-(-B)-5B=1$$
$$B-5B=1$$
$$-4B=1 \quad \Rightarrow \boxed{B=-\frac{1}{4}}$$

En consecuencia: $\boxed{A=\frac{1}{4}}$

Volviendo a (*):

$$(*) = I = -\left(\int \frac{\frac{1}{4}dy}{y-5} + \int \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)dy}{y-1}\right) = -\frac{1}{4}\int \frac{dy}{y-5} + \frac{1}{4}\int \frac{dy}{y-1} = -\frac{1}{4}Ln|y-5| + \frac{1}{4}Ln|y-1| + \alpha = -Ln\left|\left(|y-5|\right)^{\frac{1}{4}}\right| + Ln\left|\left(|y-1|\right)^{\frac{1}{4}}\right| + \alpha =$$

$$= -Ln\left|\sqrt[4]{|y-5|}\right| + Ln\left|\sqrt[4]{|y-1|}\right| + \alpha = Ln\left|\frac{\sqrt[4]{|y-1|}}{\sqrt[4]{|y-5|}}\right| + \alpha = Ln\left|\frac{\sqrt[4]{|y-1|}}{\sqrt[4]{|y-5|}}\right| + \alpha = Ln\left|\sqrt[4]{\frac{|y-1|\cdot|y-1|}{|y-5|\cdot|y-1|}}\right| + \alpha =$$

$$= Ln\left|\sqrt[4]{\frac{|y^2-2y+1|}{|y^2-6y+5|}}\right| + \alpha = Ln\left|\sqrt[4]{\frac{|(y-1)\cdot(y-1)|}{|(y-5)\cdot(y-1)|}}\right| + \alpha = Ln\left|\sqrt[4]{\left|\frac{y^2-2y+1}{y^2-6y+5}\right|}\right| + \alpha \quad (y\neq 1;\ y\neq 5)$$

Al llegar a este punto, cabe preguntarse: ¿Cómo llegar a la solución propuesta? Parece conveniente hacer un estudio sobre el campo de existencia del radicando.

Como la función resultante es un logaritmo neperiano, para que exista, su argumento no puede ser igual a cero ni negativo. Al ser este argumento una raíz de índice par (4), se le debe considerar como argumento de un valor absoluto con la finalidad de descartar los valores negativos. Pero el radicando de esta raíz no puede ser negativo por lo que se le considera también como argumento de un valor absoluto y este argumento o es positivo o es negativo, lo que origina los dos casos sobre los cuales se ha de discutir a continuación.

<u>Primer Caso</u>:

$$\frac{y^2-2y+1}{y^2-6y+5} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(y-1)\cdot(y-1)}{(y-5)\cdot(y-1)} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y-1}{y-5} > 0 \qquad (y\neq 1;\ y\neq 5)$$

Factores: $y-1 \quad \wedge \quad y-5$

Valores o Puntos Críticos: $y\neq 1 \quad \wedge \quad y\neq 5$

Intervalos:

$(-\infty,1),(1,5),(5,+\infty)$

Estudio de los signos:

	$(-\infty,1)$	$(1,5)$	$(5,+\infty)$
$y-1$	-	+	+
$y-5$	-	-	+
	+	-	+

Chequeando los productos:

En $(-\infty,1)$: $\begin{cases} (1-y)\cdot(1-y)=y^2-2y+1 & (\text{numerador}) \\ (1-y)\cdot(5-y)=y^2-6y+5 & (\text{denominador}) \end{cases}$

En $(5,+\infty)$: $\begin{cases} (y-1)\cdot(y-1)=y^2-2y+1 & (\text{numerador}) \\ (y-1)\cdot(y-5)=y^2-6y+5 & (\text{denominador}) \end{cases}$

Luego, estos resultados permiten concluir como una primera solución la siguiente:

$$\boxed{I=\int\frac{dy}{-5+6y-y^2}=Ln\left|\sqrt[4]{\frac{y^2-2y+1}{y^2-6y+5}}\right|+C \quad \text{si y solo si} \quad y\in(-\infty,1)\cup(5,+\infty)}$$

<u>Segundo Caso</u>:

$$\frac{y^2-2y+1}{y^2-6y+5}<0 \;\Rightarrow\; \frac{(y-1)\cdot(y-1)}{(y-5)\cdot(y-1)}<0 \;\Rightarrow\; \frac{y-1}{y-5}<0 \qquad (y\neq 1;\ y\neq 5)$$

Se sigue un procedimiento similar al primer caso.

Luego, chequeando el producto de factores:

En $(1,5)$: $\begin{cases} (y-1)\cdot(y-1)=y^2-2y+1 & (\text{numerador}) \\ (y-1)\cdot(5-y)=-5+6y-y^2 & (\text{denominador}) \end{cases}$

Entonces, una segunda solución es:

$$\boxed{I=\int\frac{dy}{-5+6y-y^2}=Ln\left|\sqrt[4]{\frac{y^2-2y+1}{-5+6y-y^2}}\right|+C \quad \text{si y solo si} \quad y\in(1,5)}$$

Siendo esta solución la que corresponde con la propuesta para este ejercicio.

29.- Compruebe la siguiente integral: $\int\frac{x}{(x+1)(x^3+1)}dx=\frac{2\sqrt{3}\cdot ArcTg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)(x+1)+3}{9(x+1)}+\alpha$.

<u>Comprobando</u>:

Aplicando factorización en el denominador:

$$(x+1)(x^3+1)=(x+1)(x+1)(x^2-x+1)=(x+1)^2(x^2-x+1)$$

La factorización resulta en el producto de un factor lineal de primer grado que se repite o es múltiple y un factor cuadrático irreducible que no se repite.

Luego, al aplicar la descomposición en fracciones simples o fracciones parciales, queda:

$$\int\frac{x}{(x+1)^2(x^2-x+1)}dx=\int\frac{A\,dx}{(x+1)^2}+\int\frac{B\,dx}{x+1}+\int\frac{(Cx+D)\,dx}{x^2-x+1}=(*)$$

Ahora hay que calcular a: $A,B,C,D.$

Por Coeficientes Indeterminados:

$$\frac{x}{(x+1)^2(x^2-x+1)}=\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}$$

$$x=A(x^2-x+1)+B(x+1)(x^2-x+1)+(Cx+D)(x+1)^2$$

$$x=A(x^2-x+1)+B(x+1)(x^2-x+1)+(Cx+D)(x^2+2x+1)$$

$$x=Ax^2-Ax+A+B(x^3+1)+Cx^3+2Cx^2+Cx+Dx^2+2Dx+D$$

$$x=Ax^2-Ax+A+Bx^3+B+Cx^3+2Cx^2+Cx+Dx^2+2Dx+D$$

$$x=(B+C)x^3+(A+2C+D)x^2+(-A+C+2D)x+(A+B+D)$$

Comparando coeficientes:

$i)\ \ x^3 : B+C=0$

$ii)\ \ x^2 : A+2C+D=0$

$iii)\, x : -A+C+2D=1$

$iv)\ t.i. : A+B+D=0$

Podemos aprovechar este ejercicio para determinar el valor de los coeficientes indeterminados utilizando un método del álgebra: ***Solución de sistemas de ecuaciones lineales mediante el método de reducción de Gauss-Jordan. Caso: sistema con solución única.***

Formemos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 0A+1B+1C+0D=0 \\ 1A+0B+2C+1D=0 \\ -1A+0B+1C+2D=1 \\ 1A+1B+0C+1D=0 \end{cases}$$

Se escribe la matriz ampliada del sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se lleva a su forma escalonada reducida mediante operaciones elementales con las filas de la matriz; para esto se escribirá la matriz y a continuación una flecha, sobre esta se indicarán las operaciones que se están realizando para que los lectores puedan seguir el desarrollo del proceso.

Leyendas que aparecerán sobre las flechas para indicar lo que se va a realizar:

$F_i = a \cdot F_i$ **:** Indica la nueva condición de la fila i con respecto a la matriz inicial. En este caso quedan multiplicados todos sus elementos por la constante "a".

$F_i \leftrightarrow F_j$ **:** Indica que se va a intercambiar la fila i por la fila j.

$F_j = F_j + a \cdot F_i$ **:** Indica la nueva condición de la fila j en la matriz aumentada. En este caso, se le suma la fila i multiplicada por la constante "a".

Ahora, se realiza el procedimiento para obtener la forma escalonada reducida:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_3=F_1+F_3 \\ F_4=F_4-F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_4=F_4-F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_3=\frac{1}{3}F_3 \\ F_4=\frac{1}{3}F_4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4=F_4+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3=F_3-F_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1=F_1-F_4 \\ F_2=F_2-F_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=-2F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1=F_1+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=-\frac{1}{2}F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

La quinta columna de la última matriz escalonada reducida, muestra cuál es la solución del sistema, y por lo tanto, los valores de los coeficientes indeterminados:

$$\begin{cases} A=-\frac{1}{3} \\ B=0 \\ C=0 \\ D=\frac{1}{3} \end{cases}$$

Volviendo a (*):

$$(*)=I=\int\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)dx}{(x+1)^2}+\int\frac{0\cdot dx}{x+1}+\int\frac{\left(0\cdot x+\frac{1}{3}\right)dx}{x^2-x+1}=-\frac{1}{3}\underbrace{\int\frac{dx}{(x+1)^2}}_{(I_1)}+\frac{1}{3}\underbrace{\int\frac{dx}{x^2-x+1}}_{(I_2)}=(**)$$

Resolviendo a I_1:

$$I_1=\int\frac{dx}{(x+1)^2}=\int\frac{du}{u^2}=\int u^{-2}du=-\frac{1}{u}+C_1=-\frac{1}{x+1}+\alpha_1$$

$$CV(I_1): u=x+1\rightarrow du=dx$$

Resolviendo a I_2:

$$I_2=\int\frac{dx}{x^2-x+1}=\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}ArcTg\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+\alpha_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}ArcTg\left(\frac{\frac{2x-1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+\alpha_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}ArcTg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\alpha_2$$

Volviendo a (**):

$$I=-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{x+1}\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}ArcTg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\alpha=\frac{1}{3(x+1)}+\frac{2\sqrt{3}}{9}ArcTg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\alpha=$$

$$=\frac{3+2\sqrt{3}\cdot(x+1)\cdot ArcTg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)}{9(x+1)}+\alpha=\frac{2\sqrt{3}\cdot ArcTg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\cdot(x+1)+3}{9(x+1)}+\alpha$$

L. Q. Q. C.

30.- Compruebe si $\int\frac{1}{x^3+1}dx=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot ArcTg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+Ln\left|\sqrt[6]{\frac{3\cdot(x+1)^2}{(2x-1)^2+3}}\right|+\alpha\cdot$

<u>**Comprobando**</u>:

Resolviendo la integral. Aplicando factorización en el denominador y aplicando descomposición en fracciones simples:

$$I=\int\frac{1}{x^3+1}dx=\int\frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)}=\int\frac{A\,dx}{x+1}+\int\frac{(Bx+C)\,dx}{x^2-x+1}=(*)$$

$$A=?\quad B=?\quad C=?$$

Por Coeficientes Indeterminados:

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{Ax^2-Ax+A+Bx^2+Bx+Cx+C}{x^3+1}$$

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{(A+B)x^2+(-A+B+C)x+(A+C)}{1+x^3}$$

$$0\cdot x^2+0\cdot x+1=(A+B)x^2+(-A+B+C)x+(A+C)$$

Comparando coeficientes:

$i)\ \ x^2\rightarrow A+B=0\qquad\Rightarrow\quad A=-B\ \ (iv)$

$ii)\ \ x\rightarrow -A+B+C=0$

$iii)\ \ t.i.\rightarrow A+C=1\qquad\Rightarrow\quad C=1-A\ \ (v)$

Sustituyendo *(iv)* y *(v)* en *(ii)*:

$$-(-B)+B+(1-A)=0$$

$$B+B+1+B=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B=-\frac{1}{3}} \quad (vi)$$

Luego: $\boxed{A=\frac{1}{3}}$ (vii) $\boxed{C=\frac{2}{3}}$ $(viii)$

Volviendo a (*):

$$(*)=I=\int\frac{\frac{1}{3}\,dx}{x+1}+\int\frac{(-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3})\,dx}{x^2-x+1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{3}Ln\left|x+1\right|-\frac{1}{3}\int\frac{x\,dx}{x^2-x+1}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^2-x+1}+\alpha=$$

$$=\frac{1}{3}Ln\left|x+1\right|-\frac{1}{6}\int\frac{2x\,dx}{x^2-x+1}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^2-x+1}+\alpha=\frac{1}{3}Ln\left|x+1\right|-\frac{1}{6}\int\frac{(2x-1+1)\,dx}{x^2-x+1}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^2-x+1}+\alpha=$$

$$=\frac{1}{3}Ln\left|x+1\right|-\frac{1}{6}\int\frac{(2x-1)\,dx}{x^2-x+1}-\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x^2-x+1}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^2-x+1}+\alpha=\frac{1}{3}Ln\left|x+1\right|-\frac{1}{6}\int\frac{d\left(1-x+x^2\right)}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}+\alpha=$$

$$=\frac{1}{3}Ln\left|x+1\right|-\frac{1}{6}Ln\left|x^2-x+1\right|+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\alpha=\frac{2}{6}Ln\left|x+1\right|-\frac{1}{6}Ln\left|x^2-x+1\right|+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}ArcTg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\alpha=$$

$$=Ln\left|\sqrt[6]{\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}}\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}ArcTg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\alpha=Ln\left|\sqrt[6]{\frac{(x+1)^2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}ArcTg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\alpha=$$

$$=Ln\left|\sqrt[6]{\frac{(x+1)^2}{\frac{(2x-1)^2}{4}+\frac{3}{4}}}\right|+\frac{\sqrt{3}}{3}ArcTg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\alpha=Ln\left|\sqrt[6]{\frac{(x+1)^2}{\frac{(2x-1)^2+3}{4}}}\right|+\frac{\sqrt{3}}{3}ArcTg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\alpha=$$

$$=Ln\left|\sqrt[6]{4\cdot\frac{(x+1)^2}{(2x-1)^2+3}}\right|+\frac{\sqrt{3}}{3}ArcTg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\alpha=Ln\left|\sqrt[6]{\frac{4}{3}\cdot\frac{3\cdot(x+1)^2}{(2x-1)^2+3}}\right|+\frac{\sqrt{3}}{3}ArcTg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\alpha=$$

$$=Ln\left|\sqrt[6]{\frac{4}{3}}\cdot\sqrt[6]{\frac{3\cdot(x+1)^2}{(2x-1)^2+3}}\right|+\frac{\sqrt{3}}{3}ArcTg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\alpha=Ln\left|\sqrt[6]{\frac{4}{3}}\right|+Ln\left|\sqrt[6]{\frac{3\cdot(x+1)^2}{(2x-1)^2+3}}\right|+\frac{\sqrt{3}}{3}ArcTg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\alpha=$$

$$=Ln\left|\sqrt[6]{\frac{3\cdot(x+1)^2}{(2x-1)^2+3}}\right|+\frac{\sqrt{3}}{3}ArcTg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+Ln\left|\sqrt[6]{\frac{4}{3}}\right|+\alpha=Ln\left|\sqrt[6]{\frac{3\cdot(x+1)^2}{(2x-1)^2+3}}\right|+\frac{\sqrt{3}}{3}ArcTg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\alpha=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}ArcTg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+Ln\left|\sqrt[6]{\frac{3\cdot(x+1)^2}{(2x-1)^2+3}}\right|+\alpha$$

31.- Compruebe: $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}\cdot\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}=\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\left[Ln\left(\frac{\sqrt[6]{x}-\sqrt{2}\cdot\sqrt[12]{x}+1}{\sqrt[6]{x}+\sqrt{2}\cdot\sqrt[12]{x}+1}\right)+2ArcTg\left(\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[12]{x}}{1-\sqrt[6]{x}}\right)\right]+\alpha$

Comprobando:

Resolviendo la integral: La fracción que conforma al integrando, presenta dos raíces de diferentes índices. Se determina el mínimo común índice: $m.c.i.(3,4)=12$

Luego, se propone la siguiente sustitución:

$$\begin{cases} x=u^{12}\Rightarrow u=\sqrt[12]{x} \\ dx=12u^{11}du \end{cases}$$

Aplicando la sustitución en I:

$$I=\int\frac{12u^{11}du}{\sqrt[4]{\left(u^{12}\right)^3}\cdot\left(1+\sqrt[3]{u^{12}}\right)}=12\int\frac{u^{11}du}{\sqrt[4]{u^{36}}\cdot\left(1+u^4\right)}=12\int\frac{u^{11}du}{u^9\cdot\left(1+u^4\right)}=12\int\frac{u^2du}{1+u^4}$$

Ahora se utiliza la Integración por Descomposición en Fracciones Simples con la integral $I=12\int\frac{u^2du}{1+u^4}$.

Aplicando factorización en el denominador:

$1+u^4=\left(u^2-\sqrt{2}u+1\right)\cdot\left(u^2+\sqrt{2}u+1\right)$. Resulta un producto de factores cuadráticos irreducibles.

Se descompone la fracción del integrando en una suma de fracciones simples:

$$\frac{u^2}{1+u^4}=\frac{Au+B}{u^2-\sqrt{2}u+1}+\frac{Cu+D}{u^2+\sqrt{2}u+1}\ (*)$$

Para calcular los valores de de A, B, C y D; utilizamos el Método de los Coeficientes Indeterminados.

$$\frac{u^2}{1+u^4}=\frac{(Au+B)\cdot\left(u^2+\sqrt{2}u+1\right)+(Cu+D)\cdot\left(u^2-\sqrt{2}u+1\right)}{\left(u^2-\sqrt{2}u+1\right)\cdot\left(u^2+\sqrt{2}u+1\right)}$$

$$\frac{u^2}{1+u^4}=\frac{Au^3+\sqrt{2}Au^2+Au+Bu^2+\sqrt{2}Bu+B+Cu^3-\sqrt{2}Cu^2+Cu+Du^2-\sqrt{2}Du+D}{1+u^4}$$

$$0\cdot u^3+u^2+0\cdot u+0=(A+C)u^3+\left(\sqrt{2}A+B-\sqrt{2}C+D\right)u^2+\left(A+\sqrt{2}B+C-\sqrt{2}D\right)u+(B+D)$$

Comparando coeficientes:

$i)\ u^3\to A+C=0\quad\to\quad\boxed{A=-C}$

$ii)\ u^2\to\sqrt{2}A+B-\sqrt{2}C+D=1$

$iii)\ u\to A+\sqrt{2}B+C-\sqrt{2}D=0$

$iv)\ t.i.\to B+D=0\quad\to\quad\boxed{B=-D}$

Sustituyendo *iv)* en *ii)*:

$$\sqrt{2}A+B-\sqrt{2}C+D=1\to(B+D)+\sqrt{2}\cdot(A-C)=1\to\sqrt{2}\cdot(A-C)=1\to\boxed{A-C=\frac{1}{\sqrt{2}}}\quad(v)$$

Sustituyendo *i)* en *v)*:

$$A+A=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad\to\quad\boxed{A=\frac{1}{2\sqrt{2}}}\ \wedge\ \boxed{C=-\frac{1}{2\sqrt{2}}}\qquad(vi)$$

Sustituyendo *(vi)* en *(iii)*:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}+\sqrt{2}B-\frac{1}{2\sqrt{2}}-\sqrt{2}D=0\quad\to\quad B-D=0\quad(vii)$$

De *iv)* y *vii)* se tiene que: $\boxed{B=0}\ \wedge\ \boxed{D=0}$

Luego:

$$\begin{cases}A=\frac{1}{2\sqrt{2}}\\ B=0\\ C=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\\ D=0\end{cases}$$

Luego de calculados estos coeficientes y sustituidos sus valores en la suma en (*), ésta queda así:

$$\frac{u^2}{1+u^4}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{u}{u^2-\sqrt{2}u+1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{u}{u^2+\sqrt{2}u+1}$$

Este resultado de la suma se sustituye en la integral:

$$I=12\int\frac{u^2du}{1+u^4}=\frac{12}{2\sqrt{2}}\cdot\int\frac{udu}{u^2-\sqrt{2}u+1}-\frac{12}{2\sqrt{2}}\cdot\int\frac{udu}{u^2+\sqrt{2}u+1}=\frac{6}{\sqrt{2}}\cdot\int\frac{udu}{u^2-\sqrt{2}u+1}-\frac{6}{\sqrt{2}}\cdot\int\frac{udu}{u^2+\sqrt{2}u+1}$$

Ahora se resuelve la integral aplicando procedimientos ya conocidos:

$$I=\frac{6}{2\sqrt{2}}\cdot\int\frac{\left(2u-\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)du}{u^2-\sqrt{2}u+1}-\frac{6}{2\sqrt{2}}\cdot\int\frac{\left(2u+\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)du}{u^2+\sqrt{2}u+1}=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\int\frac{\left(2u-\sqrt{2}\right)du}{u^2-\sqrt{2}u+1}+\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\int\frac{\sqrt{2}du}{u^2-\sqrt{2}u+1}-\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\int\frac{\left(2u+\sqrt{2}\right)du}{u^2+\sqrt{2}u+1}+\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\int\frac{\sqrt{2}du}{u^2+\sqrt{2}u+1}=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\int\frac{\left(2u-\sqrt{2}\right)du}{u^2-\sqrt{2}u+1}-\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\int\frac{\left(2u+\sqrt{2}\right)du}{u^2+\sqrt{2}u+1}+\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\int\frac{\sqrt{2}du}{u^2-\sqrt{2}u+1}+\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\int\frac{\sqrt{2}du}{u^2+\sqrt{2}u+1}=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\left[Ln\left(u^2-\sqrt{2}u+1\right)-Ln\left(u^2+\sqrt{2}u+1\right)\right]+3\cdot\left[\int\frac{du}{u^2-\sqrt{2}u+1}+\int\frac{du}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right]+\alpha=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot Ln\left(\frac{u^2-\sqrt{2}u+1}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right)+3\cdot\left[\int\frac{du}{u^2-\sqrt{2}u+1}+\int\frac{du}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right]+\alpha=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot Ln\left(\frac{u^2-\sqrt{2}u+1}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right)+3\cdot\left[\int\frac{du}{u^2-\sqrt{2}u+1}+\int\frac{du}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right]+\alpha=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot Ln\left(\frac{u^2-\sqrt{2}u+1}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right)+3\cdot\left[\int\frac{du}{\left(u-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}+\int\frac{du}{\left(u+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}\right]+\alpha=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot Ln\left(\frac{u^2-\sqrt{2}u+1}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right)+3\cdot\left[\int\frac{du}{\left(\frac{\sqrt{2}u-1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}+\int\frac{du}{\left(\frac{\sqrt{2}u+1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right]+\alpha=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot Ln\left(\frac{u^2-\sqrt{2}u+1}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right)+6\cdot\left[\int\frac{du}{\left(\sqrt{2}u-1\right)^2+1}+\int\frac{du}{\left(\sqrt{2}u+1\right)^2+1}\right]+\alpha=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot Ln\left(\frac{u^2-\sqrt{2}u+1}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right)+\frac{6}{\sqrt{2}}\cdot\left[\int\frac{\sqrt{2}\,du}{\left(\sqrt{2}\,u-1\right)^2+1}+\int\frac{\sqrt{2}\,du}{\left(\sqrt{2}\,u+1\right)^2+1}\right]+\alpha=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot Ln\left(\frac{u^2-\sqrt{2}u+1}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right)+\frac{6}{\sqrt{2}}\cdot\left[ArcTg\left(\sqrt{2}\,u-1\right)+ArcTg\left(\sqrt{2}\,u+1\right)\right]+\alpha=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\left[Ln\left(\frac{u^2-\sqrt{2}u+1}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right)+2\cdot\left[ArcTg\left(\sqrt{2}\,u-1\right)+ArcTg\left(\sqrt{2}\,u+1\right)\right]\right]+\alpha=(**)$$

Aquí se hace una pausa para calcular $ArcTg\left(\sqrt{2}\,u-1\right)+ArcTg\left(\sqrt{2}\,u+1\right)$. Por los conocimientos de trigonometría, se sabe que un *arco tangente* es un ángulo. Por ello se puede afirmar que $ArcTg\left(\sqrt{2}\,u-1\right)+ArcTg\left(\sqrt{2}\,u+1\right)=\theta$ siendo θ un ángulo. Si además se considera que $ArcTg\left(\sqrt{2}\,u-1\right)=\alpha \quad\wedge\quad ArcTg\left(\sqrt{2}\,u+1\right)=\beta$, donde $\alpha\ \wedge\ \beta$ son también ángulos, esto permite plantear que $\theta=\alpha+\beta$, es decir una suma de ángulo.

También puede considerarse que si $ArcTg\left(\sqrt{2}\,u-1\right)=\alpha$ entonces $Tg\,\alpha=\sqrt{2}\,u-1$, y si $ArcTg\left(\sqrt{2}\,u+1\right)=\beta$ entonces $Tg\,\beta=\sqrt{2}\,u+1$.

Ahora se puede aplicar la identidad referida a la tangente de la suma de ángulos:

$$Tg\theta=Tg(\alpha+\beta)=\frac{Tg\alpha+Tg\beta}{1-Tg\alpha\cdot Tg\beta}=\frac{\sqrt{2}u-1+\sqrt{2}u+1}{1-\left(\sqrt{2}u-1\right)\cdot\left(\sqrt{2}u+1\right)}=\frac{\sqrt{2}u}{1-u^2}$$

Luego se tiene que:

$$Tg\,\theta=\frac{\sqrt{2}u}{1-u^2}\quad\Rightarrow\quad Tg\,(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{2}u}{1-u^2}\quad\Rightarrow\quad\alpha+\beta=ArcTg\left(\frac{\sqrt{2}u}{1-u^2}\right)\quad\Rightarrow\quad ArcTg\left(\sqrt{2}u-1\right)+ArcTg\left(\sqrt{2}u+1\right)=ArcTg\left(\frac{\sqrt{2}u}{1-u^2}\right)$$

Volviendo a (**):

$$(*)=I=\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\left[Ln\left(\frac{u^2-\sqrt{2}u+1}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right)+2\cdot ArcTg\left(\frac{\sqrt{2}u}{1-u^2}\right)\right]+\alpha=\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\left[Ln\left(\frac{\sqrt[12]{x^2}-\sqrt{2}\cdot\sqrt[12]{x}+1}{\sqrt[12]{x^2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt[12]{x}+1}\right)+2\cdot ArcTg\left(\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[12]{x}}{1-\sqrt[12]{x^2}}\right)\right]+\alpha=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\left[Ln\left(\frac{\sqrt[6]{x}-\sqrt{2}\cdot\sqrt[12]{x}+1}{\sqrt[6]{x}+\sqrt{2}\cdot\sqrt[12]{x}+1}\right)+2\cdot ArcTg\left(\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[12]{x}}{1-\sqrt[6]{x}}\right)\right]+\alpha$$

L.Q.Q.C.

EJERCICIOS PROPUESTOS.-

I. - Utilice la Integración por Descomposición en Fracciones Simples y compruebe si:

1) $\int \frac{3x^2+23}{x^3-x^2+8x+10}\,dx = 2Ln|x+1| + \frac{4}{3}ArcTg\left(\frac{x-1}{3}\right) + \frac{1}{2}Ln(x^2-2x+10)+\alpha$

2) $\int \frac{4x^3+5x^2+3x+5}{(x^2+2x+5)(2x+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}Ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{2}ArcTg\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{2(2x+1)}+\alpha$

3) $\int \frac{x^2-3}{x^3-x^2-5x-3}\,dx = \frac{3}{8}Ln|x-3| + \frac{5}{8}Ln|x+1| - \frac{1}{2(x+1)}+\alpha$

4) $\int \frac{x-2}{x^3+2x^2+x}\,dx = Ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 - \frac{3}{x+1}+\alpha$

5) $\int \frac{x^3+x^2+x-1}{x^5+2x^3+x}\,dx = Ln\left|\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\right| - \frac{1}{x^2+1} + ArcTg(x)+\alpha$

6) $\int \frac{x^3-4x-1}{x(x-1)^3}\,dx = Ln\left|x(x-1)^4\right| - \frac{11}{x-1}+\alpha$

7) $\int \frac{5x^3-3x^2+2x-1}{x^4+x^2}\,dx = \frac{1}{x} + Ln\left(x^4+1\right) + Ln\left|\sqrt{x^2+1}\right| - 2ArcTg(x)+\alpha$

8) $\int \frac{e^x}{\left(e^{2x}+1\right)\cdot\left(e^x-1\right)}\,dx = Ln\left|\sqrt[4]{\frac{\left(e^x-1\right)^2}{e^{2x}+1}}\right| - \frac{1}{2}ArcTg\left(e^x\right)+\alpha$

9) $\int \frac{4}{x^3+4x}\,dx = Ln\left|\frac{x\cdot\sqrt{x^2+4}}{x^2+4}\right|+\alpha$

10) $\int \frac{dx}{16x^4-1} = -ArcTg(2x) + Ln\left|\sqrt[4]{\frac{2x-1}{2x+1}}\right|+\alpha$

11) $\int \frac{dx}{x^4-1} = Ln\left|\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}\right| - \frac{1}{2}ArcTg(x)+\alpha$

12) $\int \frac{dx}{x^3-1} = Ln\left|\sqrt[6]{\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}}\right| - \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot ArcTg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+\alpha$

13) $\int \frac{dx}{\left(x^4-1\right)^2} = -\frac{x}{4\cdot\left(x^4-1\right)} + \frac{3}{8}\cdot ArcTg(x) - \frac{3}{16}\cdot Ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\alpha$

14) $\int \frac{Ln(x^2+x)}{(x+2)^2}\,dx = Ln\left|\sqrt{\frac{x\cdot(x+1)^2}{(x+2)^3}}\right|+\alpha$

II.- Las siguientes son integrales racionales de seno y de coseno pero al resolverlas, se necesita utilizar la descomposición en fracciones simples. Compruebe los resultados indicados:

1) $\int \frac{Sec\,x\,dx}{Sec\,x+2Tg\,x-1} = Ln\left|\sqrt{\frac{Tg\left(\frac{x}{2}\right)}{Tg\left(\frac{x}{2}\right)+2}}\right|+\alpha$

2) $\int \frac{dx}{1-Cos\,x+Sen\,x} = Ln\left|\frac{Tg\left(\frac{x}{2}\right)}{Tg\left(\frac{x}{2}\right)+1}\right|+\alpha$

3) $\int \frac{dx}{8-4Sen\,x+7Cos\,x} = Ln\left|\frac{Tg\left(\frac{x}{2}\right)-5}{Tg\left(\frac{x}{2}\right)-3}\right|+\alpha$

4) $\int Sec\,x\,dx = Ln\left|\frac{1+Tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1-Tg\left(\frac{x}{2}\right)}\right|+\alpha$

5) $\int \frac{Cos\theta\,d\theta}{5+4Cos\theta} = \frac{\theta}{4} - \frac{5}{6}\cdot ArcTg\left(\frac{Tg\left(\frac{\theta}{2}\right)}{3}\right)+\alpha$

6) $\int \frac{d\theta}{Cos\theta+Cotg\theta} = Ln\left|\sqrt{\frac{1+Tg\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1-Tg\left(\frac{\theta}{2}\right)}}\right| - \frac{Tg\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left[1+Tg\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^2}+\alpha$

FÍSICOS NOTABLES

Cecil Frank Powell

Nació el 5 de diciembre de 1903 en Tonbridge, Reino Unido; y murió el 9 de agosto de 1969 en Valsassina, Italia.

Ganador en 1950 del Premio Nobel en Física.

Por su desarrollo del método fotográfico de estudiar los procesos nucleares y por el resultante descubrimiento del pion (pi-mesón), una partícula subatómica pesada.

Fuente: Wikipedia

CECIL FRANK POWELL
(1903-1969)

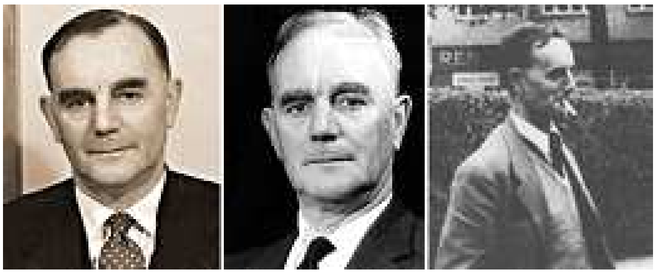
Fue un destacado físico, galardonado con el Premio Nobel de Física en 1950 por su desarrollo del método fotográfico de estudiar los procesos nucleares y por el resultante descubrimiento del pion (pi-mesón), una partícula subatómica pesada. Sus colaboradores en el estudio, publicado en 1947, fueron Giuseppe Occhialini, H. Muirhead y el joven físico brasileño César Lattes. El pion demostró ser la partícula hipotética propuesta en 1935 por Hideki Yukawa de Japón en su teoría de física nuclear.

Fue galardonado en 1949 con la medalla Hughes, concedida por la Royal Society «por su destacado trabajo en la fotografía de rastros de partículas, y en relación con el descubrimiento de los mesones y su transformación»[1].También fue galardonado con la Medalla Royal en 1961 y con la Medalla de Oro Lomonosov en 1967.

Fue un firmante del Manifiesto Russell-Einstein en 1955. Fue educado en la Judd School, Tonbridge y el Sidney Sussex College, Cambridge.

Notas

1. "for his distinguished work on the photography of particle tracks, and in connexion with the discovery of mesons and their transformation". «Cecil Powell — Biography». nobelprize.org. Consultado el 6 de febrero de 2009.



CECIL FRANK POWELL

Imágenes obtenidas de:

Google

QUÍMICOS DESTACADOS

Richard Laurence Millington Synge

Nació el 28 de octubre de 1914 en Liverpool y murió el 18 de agosto de 1994 en Norwich, Norfolk; ambas localidades en Reino Unido.

Ganador del Premio Nobel en Química en 1952.

Por la invención de la cromatografía de la partición.

Compartió el premio con Archer John Porter Martin.

FUENTES: Biografiasyvidas - Wikipedia

RICHARD LAURENCE MILLINGTON SYNGE (1914-1994)

Bioquímico. Estudió y trabajó en la Universidad de Cambridge. Junto con Archer J. P. Martin, introdujo el método de análisis cromatográfico llamado de reparto sobre papel, que permite separar los aminoácidos de las proteínas de la materia viva. Por este trabajo, ambos científicos recibieron el premio Nobel de Química en 1952.

Doctorado en 1941 por la Universidad de Cambridge, Richard L. M. Synge prosiguió luego su formación en la Universidad de Uppsala (Suecia), donde amplió sus conocimientos sobre métodos de separación bajo la dirección del bioquímico Arne Tiselius.

Synge trabajó junto con Archer J. P. Martin en los laboratorios de la Wool Industries Research Association (la asociación de la industria lanera de Leeds), donde desarrolló, en los años 40, la cromatografía de reparto, una técnica de separación que revolucionó la química analítica en la medida en que facilitó grandes avances a investigadores de numerosos campos, como el estudio de la secuencia del ADN o el de la fotosíntesis. La nueva técnica creada por Richard Synge y Archer Martin resultó además de gran utilidad para las industrias agrícolas, alimentarias y farmacéuticas, en las que tiene múltiples aplicaciones.

RICHARD LAURENCE MILLINGTON SYNGE

Imágenes obtenidas de:

Google

QUÍMICOS DESTACADOS

Archer John Porter Martin

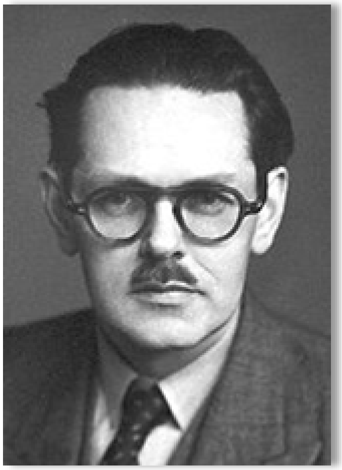
Nació el 1º de marzo de 1910 y murió el 28 de julio de 2002; ambas localidades en Londres, Reino Unido.

Ganador del Premio Nobel en Química en 1952.

Por la invención de la cromatografía de la partición.

Compartió el premio con Richard Laurence Millington Synge.

FUENTE: Ecured - Wikipedia



ARCHER JOHN PORTER MARTIN
(1910-2002)

Asistió a la Escuela de Bedford desde 1921 hasta 1929. En 1932 se graduó en la Universidad de Cambridge, donde redactó su tesis doctoral sobre bioquímica de las vitaminas. Su intención inicial era hacerse ingeniero químico, pero su relación con el genetista John B. S. Haldane le influyó para que se especializara en bioquímica.

En 1941 trabajó en el Laboratorio de Investigaciones de la Industria Lanera de Leeds donde trabajó en el fieltro de lana, allí conoció a su colega Richard Synge con el que realizó el análisis de aminoácidos.Fue allí donde desarrolló su método de cromatografía de partición.

Desde 1946 a 1948 ejerció como Jefe de la División Bioquímica del Departamento de Investigación de la Boots Pure Drug Company de Nottingham, y en 1948 fue nombrado Director de la Sección de Química Física del Instituto Nacional de Investigaciones Médicas de Londres.

Junto a Richard Laurence Millington Synge trabajó sobre el modo de separar mezclas complejas de aminoácidos en sus componentes individuales, y desarrollaron la técnica de la cromatografía de reparto. En 1944, Martin diseñó y fabricó el modelo de cromatografía más utilizado en la actualidad, combinando las técnicas de reparto y absorción.

En los últimos años de su vida sufrió de la enfermedad de Alzheimer. Murió el 28 de julio del 2002 con 92 años.

Reconocimientos

- Miembro de la Real Sociedad (1950)
- Caballero del Imperio Británico en 1960
- Medalla Berzelius de la Sociedad Sueca de Medicina (1951)
- Premio John Scott (1958)
- Medalla John Price Wetherill (1959)
- Medalla del Instituto Franklin (1959)
- Medalla de Leverhulme (1963).

En 1963, fue nombrado para dictar conferencias especiales (como "buitengewoon hoogleraar") en la Universidad Tecnológica de Eindhoven, Países Bajos.

ARCHER JOHN PORTER MARTIN

Imágenes obtenidas de:

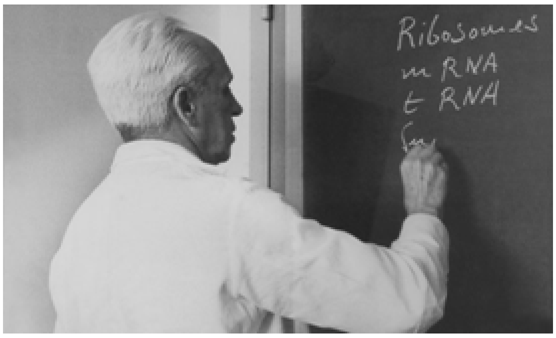
Google

Severo Ochoa y la química de la vida

Por: ANDREA ARNAL - @AndreaArnal - **para Ventana al Conocimiento –** 1º noviembre 2015
Elaborado por Materia para OpenMind

Ochoa simboliza la pasión por el descubrimiento científico. No se detuvo al ganar el Nobel por la síntesis del ARN, y su ambición científica nos abrió el camino para descifrar el código genético. Recordemos su mítica frase: «La vida es explicable casi, si no en su totalidad, en términos químicos. El amor es física y química».

Somos, en esencia, proteínas; y como las **proteínas** se forman a través de reacciones químicas, los seres vivos tenemos una inevitable base química. Que sepamos esto a día de hoy se lo debemos en gran medida a un bioquímico español, **Severo Ochoa (1905-1993)**, quien inició la resolución del puzle del **ARN** y sentó las claves para **descifrar el código genético**. Gracias a él sabemos que este es universal para todos los seres vivos. Y también que se puede modificar.



EXPLICANDO EL CÓDIGO GENÉTICO EN LA UNIVERSIDAD DE NUEVA YORK (1967).
CRÉDITO FOTO: FUNDACIÓN SEVERO OCHOA.

Severo Ochoa llegó a Madrid en 1922 para estudiar Medicina, en gran parte motivado por su profunda admiración hacia el médico Santiago Ramón y Cajal, quien era por aquel entonces el único científico español que había conseguido el premio Nobel.

Sin embargo, **nunca ejerció la medicina ni llegó a trabajar con Ramón y Cajal.** Su interés viró rápidamente hacia la biología, motivado en gran medida por haber conocido a **Juan Negrín**, catedrático de Fisiología, quien le propuso trabajar en su laboratorio como instructor de prácticas mientras Ochoa terminaba su licenciatura.

Entonces vivía en **la Residencia de Estudiantes** rodeado de grandes intelectuales y artistas de la época, como el escritor Federico García Lorca, el pintor Salvador Dalí y el cineasta Luis Buñuel. Cuando llevaba poco tiempo en el Laboratorio de Fisiología, Ochoa obtuvo una beca para ampliar sus estudios en la **Universidad de Glasgow** (Reino Unido), en una época en la que no era tan habitual que un estudiante viajase por el mundo. Aquella estancia le puso en contacto con la comunidad científica europea y le impulsó a publicar, a su vuelta, sus estudios sobre la creatinina presente en la orina en el *Journal of Biological Chemistry*. En 1928 Severo Ochoa había iniciado su carrera como investigador con una publicación internacional. Y aún no se había graduado.

UN CIENTÍFICO ERRANTE.

Un año después, ya licenciado, decidió continuar con la investigación. Consiguió otra beca para pasar dos años en el instituto de biología de **la Sociedad Kaiser Wilhelm,** hoy Sociedad Max Planck, en Berlín (Alemania). Allí conoció a destacados científicos de la época, como los nobeles **Otto Fritz Meyerhof** y **Otto Heinrich Warburg**. Y en esa etapa de estancias en diferentes países entró en contacto con diferentes ideas que le sirvieron para situarse en la vanguardia de una nueva rama de la ciencia, **la bioquímica**.

Instalado en España como profesor ayudante, siguió viajando y colaborando con otros centros de investigación de Europa. En Londres comenzó a estudiar una enzima presente en la vitamina B1, abriendo así una línea de investigación que acabaría valiéndole nada menos que **el premio Nobel**. Por aquellos años, la situación política de España y Europa empezaba a ser difícil. Primero, porque en 1936 estalló la Guerra Civil española, lo que le empujó a continuar sus estudios en Alemania. Tampoco duró mucho allí. Tras varios años en Oxford, y comenzada la Segunda Guerra Mundial, Severo Ochoa emigró a EE.UU con su mujer en 1941.

SEVERO OCHOA COMPROBANDO DATOS EN EL NEW YORK CITY MEDICAL CENTER (1955).
CRÉDITO FOTO: FUNDACIÓN SEVERO OCHOA.

Al final de la guerra, comenzó a gestarse una revolución de la bioquímica a nivel molecular. En 1953 James Watson y Francis Crick daban el gran golpe, al proponer un modelo en forma de doble hélice que explicaba la estructura molecular del ADN. La química de la vida estaba de moda. Una tendencia científica que Ochoa vivió en un lugar privilegiado, como investigador en la **Facultad de Medicina de la Universidad de Nueva York**.

LA PIEDRA ROSETTA DE LA GENÉTICA.

OCHOA FELICITADO POR SU EQUIPO TRAS RECIBIR EL NOBEL (1959).
CRÉDITO FOTO: NEW YORK UNIVERSITY.

Su gran logro, por el que ganó el Premio Nobel, llegó en 1955, poco antes de obtener la ciudadanía estadounidense. A partir del aislamiento de una enzima de la bacteria *Escherichia coli*, pudo **sintetizar el ARN en el laboratorio** gracias a sustrato adecuado de nucleótidos (las distintas letras que componen el ADN y el ARN, es decir, sus componentes elementales). Así, dio el primer paso para comenzar a leer el código genético, cuyo desciframiento completo culminarían otros investigadores años después.

Tras haber sentado ese precedente, su afán investigador no le permitió detenerse cuando le comunicaron en su laboratorio en la Universidad de Nueva York que había sido galardonado con **el Premio Nobel, en 1959**, alcanzando el mismo reconocimiento de su admirado Ramón y Cajal (ambos siguen siendo los dos únicos científicos españoles que han ganado el premio de la Academia Sueca). A partir de entonces Ochoa se adentró, por una parte, en los **mecanismos de replicación de los virus que tienen ARN** como material genético, describiendo las etapas fundamentales del proceso; y por otra parte, profundizó en los mecanismos de síntesis de proteínas.

En los últimos años de su carrera dividió su actividad investigadora entre EE.UU y España, donde creó en en **1971 el Centro de Biología Molecular**, que lleva su nombre y del que fue presidente de honor hasta su muerte. Aunque se jubiló en la Universidad de Nueva York en 1975, Ochoa nunca dejó de lado la ciencia. Hasta 1985 dirigió dos grupos de investigación; uno en Madrid y otro en Nueva Jersey.

LA EMOCIÓN DE DESCUBRIR.

Hoy en día es un científico reconocido a nivel mundial. En EE.UU, su país de adopción, recibió l**a Medalla Nacional de Ciencia en 1979**. Y aún en 2011, el Servicio Postal emitió una serie de sellos de grandes científicos estadounidenses entre los que figura Ochoa. En España, su país de nacimiento, su nombre es sinónimo de excelencia científica, y la etiqueta “Severo Ochoa” se otorga a los centros de investigación de mayor nivel.

CRÉDITO IMAGEN: US POSTAL SERVICE.

En 1986 falleció su mujer, **Carmen García Cobián**, su gran amor y su gran apoyo durante toda su carrera, lo que sumió a Ochoa en una profunda melancolía. A partir de entonces no volvió a publicar ningún trabajo científico más, poniendo fin a su carrera.

En junio de 1993 presentó su biografía titulada **“La emoción de descubrir”**, cinco meses antes de su muerte, a la edad de 88 años. Su actitud ante la ciencia y la vida quedó condensada en ese libro, y en las declaraciones más célebres de Ochoa a la prensa:

“La vida es explicable casi, si no en su totalidad, en términos químicos. ***El amor es física y química”****.*

Li-Fi, la nueva frontera de las comunicaciones

Por: JAVIER YANES - @yanes68 - para ventana al conocimiento
Elaborado por Materia para OpenMind

En 1886, el físico alemán **Heinrich Hertz** demostró por primera vez la existencia de las **ondas de radio**, que en honor a él se denominan también hertzianas. Su propósito era poner a prueba la teoría electromagnética propuesta un par de decenios antes por **James Clerk Maxwell**. Lo curioso es que, cuando sus estudiantes le preguntaron cuáles podían ser las aplicaciones de aquel hallazgo, respondió: “No tiene utilidad de ninguna clase”. Hertz merecía un diez como científico, pero un cero como futurólogo. Hoy sus ondas están en todas partes, y no solo en nuestras comunicaciones: incluso las utilizamos para calentar la comida.

Pero después de algo más de un siglo, esto está a punto de cambiar. Hoy el ser humano parece inclinado a dar un salto en el espectro electromagnético hacia otra franja que tradicionalmente hemos utilizado para poco más que iluminarnos. La luz visible está formada por ondas de la misma naturaleza que las de radio, pero de diferente tamaño y frecuencia. Y para muchos investigadores, **el arco iris realmente oculta un tesoro, el de las comunicaciones del futuro.**

En realidad, el uso de luz para la comunicación no es una idea nueva. Los primeros tanteos se remontan a tiempos de Hertz: en 1880 el estadounidense **Alexander Graham Bell**, uno de los pioneros del teléfono, experimentó con el fotófono, un sistema inalámbrico que funcionaba con luz modulada. En el siglo XIX triunfaba en Europa y Norteamérica el telégrafo óptico, una red de postes de señales y telescopios que permitía, por ejemplo, enviar un mensaje de Ámsterdam a Venecia en una hora. Hoy **la fibra óptica** forma parte esencial de nuestras comunicaciones, pero ha sido ya en el siglo XXI cuando ha renacido la comunicación óptica inalámbrica, y más concretamente la **comunicación con luz visible (VLC, en inglés).**

EL DESARROLLO DE LA TECNOLOGÍA LED HA HECHO POSIBLES LAS COMUNICACIONES LI-FI.
CREDITO IMAGEN: GRAFFITI RESEARCH LAB.

La aplicación de la VLC que hoy está en boca de todos es el **Li-Fi**, término acuñado en 2011 por el ingeniero británico **Harald Haas** para facilitar la comprensión de lo que es **una versión del Wi-Fi que funciona por luz.** El concepto no puede ser más sencillo: luz encendida es uno, luz apagada es cero, lo que permite codificar y enviar cualquier archivo digital por señales luminosas. El desarrollo de los diodos emisores de luz, o LED, ha permitido disponer de los transmisores adecuados. Según decía Haas en 2011, la infraestructura ya existe; **bastaría con añadir un microchip a los LED para convertirlos en transmisores Li-Fi**. En cuanto a la recepción de la señal, basta con **fotodiodos** como los presentes en las cámaras digitales y los *smartphones*.

MÁS VELOCIDAD, MENOS SATURACIÓN.

Las ventajas del Li-Fi son varias. Primero, la velocidad; el rápido parpadeo de los LED, imperceptible para la vista, permite velocidades de transmisión teóricas en el orden de gigabits por segundo (Gbps), entre 100 y 1.000 veces más rápido que las actuales Wi-Fi, que operan en el rango de megabits por segundo. Algunas aplicaciones prácticas en el mundo real han alcanzado 1 Gbps, pero aún hay mucho margen de mejora: en el laboratorio ya se ha logrado llegar a los 224 Gbps en comunicación bidireccional.

ADAPTADOR LI-FI PARA ORDENADORES DE ESCRITORIO Y PORTÁTILES.
CRÉDITO IMAGEN: LEDCOMCOMMUNICATION.

Según los autores de este trabajo, encabezado por Ariel Gómez, de la Universidad de Oxford, “las redes de comunicación por fibra óptica pueden proveer capacidades agregadas de terabits en edificios y oficinas de ciudades modernas”, pero “los sistemas prácticos inalámbricos están órdenes de magnitud por debajo de esta capacidad”. En otras palabras, las grandes velocidades de las instalaciones se topan al final con un cuello de botella por las limitaciones del Wi-Fi. El Li-Fi podría eliminar este problema.

Pero además, la luz visible esquiva la **progresiva saturación del espectro de radio**, un problema para las comunicaciones actuales. El amplio ancho de banda disponible en la franja visible se une al hecho de que, al contrario de lo que ocurre con las ondas de radio, distintas transmisiones Li-Fi pueden convivir en el mismo espacio sin interferencias.

UN RIVAL DEL WI-FI DE CORTO ALCANCE.

Por supuesto, hay una limitación. Aunque el emisor y el receptor no están obligados a verse directamente –se ha demostrado que funciona también con luz reflejada–, el alcance es corto, y por tanto “su aplicación en interiores es más sencilla que en exteriores”, señala la directora del Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones de la Universidad Carlos III de Madrid (España), **Ana García-Armada**. Claro que el hecho de que la luz no atraviese una puerta cerrada se convierte en otra ventaja: **es imposible *hackear* el Li-Fi a distancia.**

EN UNA RED LI-FI LAS LUCES ENVÍAN LA SEÑAL DE RED A LOS DISPOSITIVOS.
CRÉDITO IMAGEN: AHMADAMRO.

Debido a su corto alcance, “el uso doméstico es inmediato”, dice García-Armada. Pero esta ingeniera dirige precisamente un proyecto destinado al uso en exteriores, utilizando **las farolas LED de la calle como fuentes de señal Li-Fi** que el usuario podrá recibir en su *smartphone*. Los obstáculos a vencer son sobre todo dos; por un lado, “la interferencia de otras fuentes de luz y muy en particular del sol”, apunta García-Armada. Por otra parte, “la cobertura de zonas amplias requiere un diseño de red con diversos nodos interconectados y la posiblidad de que el usuario se vaya conectando al punto que le ofrezca la mejor señal en cada momento”, precisa la ingeniera.

FAROS DE COCHE Y FAROLAS PARA MEJORAR LAS COMUNICACIONES.

Por todo ello, los expertos tienden a predecir que **el Li-Fi no desbancará pronto al Wi-Fi**, sino que ambos convivirán complementándose para distintos usos y en diferentes entornos. Pero mientras, el Li-Fi podrá abrir el camino a nuevas aplicaciones. Según los responsables del proyecto británico *Ultra-Parallel Visible Light Communications* (UP-VLC), el Li-Fi posibilitará la implantación a gran escala de la llamada I**nternet de las cosas**, que conectará en red diversas máquinas de uso cotidiano, como el frigorífico y el *smartphone*. García-Armada sugiere que los faros LED de los coches podrán emplearse para comunicaciones multimedia.

El proyecto UP-VLC trabaja en la reducción del tamaño de los LED para lograr paneles de un millón de microLED por milímetro cuadrado y con un parpadeo 1.000 veces más rápido que los actuales. El resultado será un rango de velocidades de terabits por segundo, a través de **pantallas que permitirán al mismo tiempo mostrar información, iluminar una habitación y proporcionar conexión Li-Fi**. Tal vez por el momento la imaginación vaya más deprisa que la tecnología, pero apenas estamos empezando. Como decía Haas cuando en 2011 presentó el Li-Fi en sociedad, “en el futuro no sólo tendremos 14.000 millones de bombillas; podremos tener 14.000 millones de Li-Fi distribuidos por todo el mundo”.

Venezuela, personajes, anécdotas e historia.

Isaac J. Pardo

(1905-2000)

Isaac José Pardo Soublette nació el 14 de octubre de 1905 y falleció, próximo a cumplir los 95 años, el 3 de marzo de 2000; ambos momentos en Caracas, Venezuela. Era descendiente de judeo-alemanes.

Como ensayista es conocido por sus trabajos *"Esta tierra de Gracia"* (1955), *"Fuegos Bajo el Agua: La invención de la Utopía"* (1983).

Desde muy joven incursionó en la política integrando la llamada Generación del 28 y además miembro del Plan de Barranquilla; esto lo llevó a padecer prisión y exilio durante el gobierno dictatorial de Juan Vicente Gómez.

Junto a Elías Toro y Andrés Germán Otero fundó en el año 1945 el partido Unión Republicana Democrática (URD), organización de la cual fue ícono nacional Jóvito Villalba quien se unió a ellos tres meses después de la fundación de URD. Tuvo participación en el gobierno de Rómulo Gallegos, fue director del diario *El Nacional*, redactor del semanario humorístico *El Morrocoy Azul* y formó parte de la directiva principal del Consejo Nacional Electoral en el año 1963.

Trabajó como médico internista en el hospital de *El Algodonal* [1] donde junto al doctor José Ignacio Baldó, se dedicó a investigar sobre tisiología y a luchar contra la tuberculosis, una de las enfermedades endémicas en el país, sobre todo en sectores campesinos y en sectores de pobreza extrema de las ciudades.

Es reconocido como un excelente investigador de la historia colonial de Venezuela y su trabajo *"Fuegos Bajo el Agua"* referido a los orígenes de la utopía, le valió el Premio Nacional de Literatura en 1984. Recibió el Premio Nacional de Humanidades de Venezuela en 1991, el cual compartió con Luis Beltrán Guerrero. En 1999 recibió la Orden del Libertador y un Doctorado Honoris Causa conferido por la Universidad Simón Bolívar.

Sus obras:

- Esta tierra de gracia (1955)
- El Tirano Aguirre (1958)
- Estudio Sobre Elegías de Varones Ilustres de Indias (1961)
- La ventana de don Silverio (1978)
- Fuegos Bajo el Agua (1983)
- ¡Esa Palabra no se dice! (1994)
- A la Caída de las Hojas (1997)

---

[1] **Hospital General Dr. José Ignacio Baldó, en La Yaguara, Parroquia Antímano, Municipio Libertador, Caracas, Venezuela.**

Por qué el español es el único idioma que utiliza signos de interrogación (¿?) y admiración (¡!) dobles.

Por: **IRENE HERNÁNDEZ VELASCO**

FUENTE: BBC Mundo - 25 septiembre 2017

El de interrogación sirve para indicar, a la hora de escribir, que se trata de una pregunta y que hay por tanto que leerla con entonación interrogativa.

El de exclamación revela que se debe de alzar la voz y enfatizar la frase, para de ese modo expresar sorpresa, asombro, alegría, súplica, mandato, deseo…

Pero, ¿qué tienen los signos de interrogación y de exclamación en español que los hacen tan deliciosamente singulares? ¡Tienen una particularidad, algo que los hace absolutamente únicos!

El español es la única lengua en la que los signos de interrogación y de exclamación son dobles, es decir, se colocan no sólo al final de la frase (como ocurre en el inglés el francés o el alemán, por citar sólo algunos ejemplos) sino también al inicio de la misma.

Sólo en el castellano existen los símbolos "¿" y "¡", los signos que se emplean como apertura de interrogación y al inicio de una frase admirativa.

¡Increíble!, ¿a que sí?

CAROLINGIOS

EN LA PRIMERA EDICIÓN DE LA ORTOGRAFÍA DE LA REAL ACADEMIA DE LA LENGUA AÚN APARECE SÓLO UN SIGNO DE INTERROGACIÓN, AL FINAL. DERECHOS DE AUTOR DE LA IMAGEN: REAL ACADEMIA DE LA LENGUA.

La historia de esos dos signos, sin embargo, es antigua. **El signo de admiración ya se encuentra en manuscritos latinos medievales** y, a decir de la Real Academia de la Lengua, el de interrogación se lo debemos a los carolingios, la dinastía de origen francés que dominó Europa Occidental entre los siglos VIII y X.

Pero, en sus orígenes, esos dos signos se empleaban únicamente al final de las frases.

Tardaron bastante en empezar a utilizarse también en la apertura de las frases interrogativas y exclamativas. **De hecho, fue sólo en la segunda edición de la Ortografía de la Real Academia de la Lengua, publicada en 1754, cuando el signo de inicial de interrogación hizo su irrupción**.

Los académicos estuvieron debatiendo largamente sobre el asunto y llegaron a la conclusión de que el signo de interrogación final no bastaba, sobre todo en ciertas frases largas.

"Por lo tocante a la nota de interrogación se tuvo presente que, además del uso que tiene en fin de oración, hay periodos o cláusulas largas en que no basta la nota que se pone al fin y es necesario desde el principio indicar el sentido y tono interrogante con que debe leerse, por lo que la Academia acuerda que, en estos casos, se use la misma nota interrogante poniéndola tendida sobre la primera voz de la cláusula o periodo con lo que se evitará la confusión y aclarará el sentido y tono que corresponde. Y aunque esto es novedad, ha creído la Academia no debe excusarla siendo necesaria y conveniente", se lee en el acta de una de las reuniones que mantuvieron.

Con ese argumento, el 17 de octubre de 1753 los académicos tomaron una decisión histórica: **habría también signos de interrogación de apertura que se colocarían al comienzo de las frases interrogativas**, y que se señalaría con el mismo signo que ya existía pero invertido.

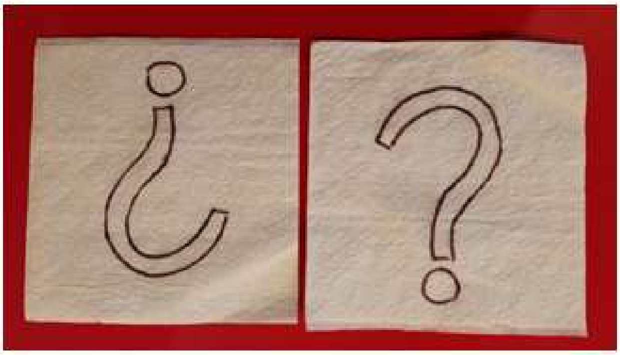


IMAGEN: SIGNOS PREGUNTA.

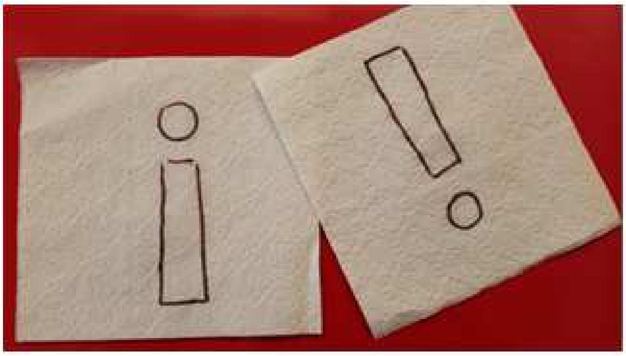


IMAGEN: SIGNOS EXCLAMACIÓN.

ORACIONES LARGAS Y CORTAS.

Y así lo recogieron en la Ortografía de 1754, en la que el uso del signo de interrogación inicial se restringía a las oraciones largas, mientras que en el caso de las breves se seguía empleando sólo el signo interrogativo de cierre.

Pero, **¿cuándo una frase es corta y cuándo se convierte en larga?** Cada uno lo interpretaba un poco a su antojo, así que en 1870 la Academia decidió poner orden en el asunto y en la primera edición de su prontuario de ortografía de la lengua castellana adoptó el criterio actual.

Es decir: que el signo de interrogación inicial se debe emplear en todas, absolutamente todas las frases interrogativas, independientemente de su extensión.

"Esto no es más que otra muestra del tradicional deseo de los ortógrafos españoles por representar la lengua de la manera más fiable y adecuada a la pronunciación", subraya María José Folgado, experta en historia de la gramática e historiografía lingüística de la Universidad de Valencia en su estudio "Los signos de interrogación en las ortografías del español".

EL SIGNO DE ADMIRACIÓN NO ES NUEVO, EN MANUSCRITOS LATINOS MEDIEVALES YA APARECÍAN TANTO EL DE APERTURA COMO EL DE CIERRE. DERECHOS DE AUTOR DE LA IMAGEN: GETTY IMAGES.

DE ADMIRACIÓN A EXCLAMACIÓN.

Respecto al signo de exclamación, llegó a los tratados de ortografía un poco más tarde que el de interrogación, bajo el nombre de signo de admiración.

Es en el Diccionario de 1726 cuando se hace la primera referencia ortográfica a él: "se llama una nota, que en el periodo significa el efecto de la admiración, y se escribe con una i vuelta al revés: como Oh cuán bueno es Dios!".

Aunque ya en la siguiente edición, la de 1770, se subraya que "de algún tiempo a esta parte se acostumbra poner inversa así (¡) antes de la voz en que comienza este sentido y tono, cuando los periodos son largos".

Su reconocimiento oficial como signo doble llegó al Diccionario en 1884. Pero fue sólo en 2014, en la 23ª edición del diccionario de la Real Academia, cuando ese signo fue rebautizado como signo de exclamación en lugar de admiración, después de que varios autores subrayaran que la admiración es sólo uno de los sentimientos que se pueden expresar con este signo y que lo que importante era su tono exclamativo.

SÓLO EN ESPAÑOL.

IMAGEN: EL SIGNO DE EXCLAMACIÓN SOLO TIENE ALGO MÁS 3 AÑOS CON ESE NOMBRE OFICIALMENTE.

A día de hoy, la Academia de la Lengua tiene muy claro el uso correcto de los signos de interrogación y exclamación. **Para empezar, subraya que "Los signos de apertura (¿ ¡) son característicos del español y no deben suprimirse por imitación de otras lenguas** en las que únicamente se coloca el signo de cierre".

Escribir por tanto "Qué hora es?" o "Qué alegría verte!" es incorrecto, lo correcto es "¿Qué hora es?" y "¡Qué alegría verte!".

Los signos de interrogación y de exclamación se escriben pegados a la primera y la última palabra del período que enmarcan, y separados por un espacio de las palabras que los preceden o los siguen; pero si lo que sigue al signo de cierre es otro signo de puntuación, no se deja espacio entre ambos.

Un ejemplo: "¡Caramba!, ¿son ya las tres?; se me ha hecho tardísimo".

Tras los signos de cierre puede colocarse cualquier signo de puntuación, excepto un punto ya que, como señala la Academia, cuando la interrogación o la exclamación terminan un enunciado sus signos de cierre equivalen a un punto.

Los signos de apertura (¿ ¡) se han de colocar justo donde empieza la pregunta o la exclamación, aunque no se corresponda con el inicio del enunciado. En ese caso, la interrogación o la exclamación se inician con minúscula.

IMAGEN: ¿SUELES OLVIDARTE EL SIGNO DE INTERROGACIÓN DE INICIO?
DERECHOS DE AUTOR DE LA IMAGEN: GETTY IMAGES.

¿Un ejemplo? Ahí va: "Por lo demás, ¿qué aspecto tenía tu hermano?". "Si encuentras trabajo, ¡qué celebración vamos a hacer!"

Es posible escribir dos o tres signos de exclamación para indicar mayor énfasis en la entonación exclamativa: ¡¡¡Traidor!!!

Y, finalmente, también se pueden combinar los de interrogación con los de exclamación, siempre y cuando los signos de cierres sean simétricos a los de apertura. ¡¡¿¿De verdad piensas eso??!!

Este artículo es parte de la versión digital del Hay Festival Segovia, un encuentro de escritores y pensadores que se celebró en esa ciudad española entre el 22 y el 24 de septiembre de 2017.

… con motivo de la celebración del Día de las Madres en Venezuela en Mayo 2019.

UN LUNES QUE NO ERA PARA MÍ.

Por: **EUCLIDES QUERALES.**
Enviado vía Facebook.

Confieso que hoy no era mi día, es posible atribuírselo al parecido con los laberintos, cosas que me las guardo para mis secretos, por lo tanto, lo que de este día queda se lo voy a dedicar a la poesía, que al fin y al cabo me sirve para mucho, cuando duele adentro, donde no se ve, pero duele.

En alguna parte de la obra el Río Invisible se recoge lo que es la poesía y de donde viene: La poesía es cincel y piedra del tiempo, es lo único que puede desgarrar al tiempo y decirle "no sucedas" cuando te duele el alma recurres a tu eterna confidente y albacea de tus desventuras la: Santa Madre, aunque no esté. A ella le voy a recordar con poesía de Neruda. "Luna".

Cuando nací-mi madre se moría.

(...)

Era su cuerpo trasparente.
Ella tenía bajo la carne un luminar de estrellas.
Ella murió: Y nací.
Por ello llevo
un invisible río entre las venas,
un invencible canto de crepúsculo
que me enciende la risa y me la hiela.
Ella juntó a la vida que nacía
su estéril remazón de vida enferma.
El marfil de sus manos moribundas
tornó amarilla en mi luna llena

(...)

Esta luna amarilla de mi vida
me hace ser un retoño de la muerte"

y en ese mismo texto: VERSOS HUMILDES PARA QUE DESCANSE MI MADRE.

"Madre mía, he llegado tarde para besarte y para que tus manos puras me bendijeran: Ya tu paso de luz extinguiéndose y habías comenzado a volver a la tierra.
Pediste poco en este mundo madre mía. Tal vez un puñado de violetas mojadas está demás entre tus dulces manos que no pidieron nada.
Tu vida era gota de miel temblando apenas en el umbral del sueño y el perfume, sagrada estabas ya como dulce madera de altar, o como aureola de ceniza o de nube.
Dulce, ya no podías sola un nuevo día, una nueva primavera.
Y a encontrarte con él para esperarlos idos camino de la tierra".

Pablo Neruda, dos poemas a la madre, que murió cuando nació el poeta y su madrastra quién tanto amó.

Hoy yo, yo los invoco para mi madre que se marchó con 46 años y a la mama tía a quien tanto amé y también se me marchó sin pedir permiso... las amo mucho...

Para todas las madres que moran y nos miran desde el cielo infinito, con amor eterno Dios me las bendiga.

GALERÍA


ALEXANDRU IOAN LUPAS

Imágenes obtenidas de:
Google

Nació el 5 de Enero de 1942 en Arad y murió el 14 de Agosto de 2007 en Sibiu; ambas localidades en Rumania.

Alexandru Lupas creció en Arad, Rumania. Arad está ubicada en Rumania Occidental, esta ciudad perteneció a Hungría hasta finales de la I Guerra Mundial. Lupas asistió a la escuela secundaria de Moise Nicoara en Arad, una excelente escuela que había sido tomada por el Estado Rumano en 1934. Después de graduarse de la secundaria entró en Universidad de Babeş-Bolyai en Cluj. La Universidad era excelente para estudiar matemáticas y allí tuvo como profesores a algunos matemáticos excepcionales, entre los que se incluían Gheorghe Calugăreănu, Dumitru V. Ionescu, Tiberiu Mihailescu, Petru T. Mocanu, Gheorghe Pic, Tiberiu Popoviciu, Ferenc Rado y Dimitrie D. Stancu.

Lupas se graduó en 1964 y luego fue designado como investigador en el Instituto de Cálculo Numérico de la Academia Rumana de Cluj-Napoca. La Academia Rumana creó el Instituto de Matemática en Cluj-Napoca en 1948 y se había convertido en el Instituto de Cálculo Numérico de la Academia Rumana en 1957. En este tiempo estaba conformado por dos departamentos, el Departamento de Aproximación y Cálculo y el Departamento de Informática. Lupas permaneció en este cargo hasta 1975 cuando el Instituto de Cálculo Numérico fue transferido de la Academia Rumana al Ministerio de Educación Nacional y el número de investigadores fue reducido de 48 a 6. Mientras trabajaba en el Instituto de Cálculo Numérico, Lupas publicó numerosos excelentes trabajos. Por ejemplo, *On Bernstein power series* (Sobre la serie de potencia de Bernstein) (1966) fue revisada por D. E. Wulbert quien escribió:

> *El autor primero desarrolla un método para construir secuencias de operadores lineales positivos sobre un subespacio de funciones acotadas sobre la línea real. Como casos especiales de su método general, el autor construye los operadores Szász-Mirakjan y Baskakov. Estos últimos operadores son estudiados en la segunda parte del libro, donde se muestran algunas propiedades similares a las del operador de Bernstein.*

En 1967 publicó *Some properties of the linear positive operators. I*, (Algunas propiedades de los operadores lineales positivos. I), Approximationseigenschaften der Gammaoperatoren (en alemán), *Some properties of the linear positive operators. II* (Algunas propiedades de los operadores lineales positivos. II) y con Gheorghe Cimoca, *Two generalizations of the Meyer-König and Zeller operator* (Dos generalizaciones del operador Meyer-König y Zeller).

Su destacada labor le llevó a ganar una beca Humboldt que le permite llevar a cabo una investigación en las universidades de Stuttgart y Tübingen. Él tuvo como su tutor de tesis doctoral a Werner Meyer-König y obtuvo el grado de Doktor der Naturwissenschaften de Universität Stuttgart en 1972 por su tesis *Die Folge der Betaoperatoren*. Se graduó con distinción el 28 de abril de 1972 y regresó a Cluj donde realizó una investigación para un segundo doctorado. Su tutor Tiberiu Popoviciu, tristemente murió en 1975 por lo que Lupas tuvo que tomar como nuevo tutor a Dimitrie D. Stancu para finalizar su tesis. Él presentó como segunda tesis doctoral *Contributions to the Theory of Approximation by Linear Operators* (Contribuciones a la teoría de la aproximación para operadores lineales) ante la Universidad Babeş-Bolyai en 1976. En el mismo año fue nombrado profesor de la Universidad de Sibiu, el año en que la Universidad se convirtió en una institución independiente. Antes de este cargo en Sibiu había formado parte del personal docente de la Universidad de Cluj.

En 1969 asistió, por invitación, a la Conferencia 'Iterationsverfahren, Numerische Mathematik, Approximationstheorie' en el Centro de Investigación de Oberwolfach en Selva Negra, Alemania. Allí presentó la ponencia *On the approximation by linear positive operators* (Sobre la aproximación por aperadores lineales positivos) la cual resumida por Sheldon Eisenberg:

> *En la primera parte de este artículo, el autor analiza el comportamiento gráfico del operador de Szász-Mirak'jan. Específicamente, él da las condiciones bajo las cuales el operador conserva la convexidad, la concavidad y la polinomialidad. En la segunda parte del artículo continúa su trabajo con el operador Baskakov. Aquí le da las condiciones bajo las cuales el operador Baskakov es de variación disminuida.*

En 1971 publica *On the approximation by linear operators of the class S_m* (Sobre la aproximación de operadores lineales de la clase S_m) y al año siguiente *An integral inequality for convex functions* (Una desigualdad integral para funciones convexas). En total publicó más de 100 trabajos de investigación, 6 monografías a nivel de investigación y 10 libros de textos.

Se mencionó anteriormente que Lupas fue nombrado para la Universidad de Sibiu en 1976. La Universidad no fue favorecida por el gobierno y poco a poco en el transcurso de los años ochenta fueron cerrando las escuelas hasta que solamente quedó la escuela de ingeniería mecánica. En este momento se convirtió en parte de la Escuela Politécnica de Cluj-Napoca. Después de la revolución de diciembre de 1989 se movilizaron rápidamente para lograr refundar la Universidad de Sibiu y formalmente fue reinstalada el 5 de marzo de 1990. El 12 de mayo de 1995, a la Universidad de Sibiu se le otorgó el nombre del distinguido escritor y filósofo rumano, Lucian Blaga.

Lupas fue una figura importante en los asuntos de la Universidad durante este difícil período. En 1980 fue promovido a Profesor Asociado, luego a Profesor Titular en 1990 cuando la Universidad fue refundada formalmente. Ocupó esta cátedra hasta su muerte. También ocupó varios puestos importantes como la Cátedra de Mecánica aplicada desde 1982 a 1985. Después que la Universidad de Sibiu volvió a funcionar como institución con propios derechos en 1990, se convirtió en Rector de la Universidad por ese año y en Decano de la Facultad de Ciencias desde 1990 hasta 1992. También fue nombrado Vicerrector de la Universidad Rumana-Alemana de Sibiu (1998-1999) y, después de que la Universidad fue rebautizada, Jefe del Departamento de Matemáticas de la Universidad Lucian Blaga de 1999 a 2000.

Lupas se casó con Luciana quien era una eminente matemática del personal de la Universidad. Alexandru y Luciana Lupas, junto a Heiner, fueron los editores de las Memorias de la Conferencia *Mathematical analysis and approximation theory* (Análisis matemático y teoría de la aproximación) conformada por trabajos presentados en el V Seminario Rumano-Alemán sobre Teoría de la Aproximación, celebrado en Sibiu del 12 al 15 de junio de 2002. Lupas publicó dos trabajos en estas Memorias, *The positivity of a certain quadrature* (La positividad de una cierta cuadratura) y *q-analogues of Stancu operators* (Análogos-q de operadores Stancu). En 2002 publicó en conjunto con su esposa, el trabajo *Properties of Stancu operators* (Propiedades de los operadores de Stancu). Alexandru y Luciana Lupas escriben:

> *El documento se refiere a los operadores de Stancu... Después del trabajo pionero de D. D. Stancu (1968), estos operadores han sido utilizados con éxito por otros matemáticos para estudiar las propiedades de los métodos positivos lineales de aproximación. Una parte sustancial de las contribuciones en este campo se puede encontrar en el estudio [B. Della Vecchia (1992)]. En este artículo presentamos algunas propiedades relacionadas con los operadores... Por ejemplo, se demuestra una representación del término resto y también algunos teoremas de valor medio. Al final discutimos una fórmula de cuadratura para operadores de Stancu.*

Los autores de la referencia [2] rinden este homenaje a Lupas:

> *Este año, el 14 de agosto, la comunidad matemática sufrió una gran pérdida: el fallecimiento del profesor Alexandru Lupas, un distinguido matemático rumano, uno de los más importantes de su generación. Profesor en el Departamento de Matemáticas de la Universidad "Lucian Blaga" en Sibiu, Rumania, era un especialista en Teoría de la Aproximación, Análisis Clásico, las desigualdades, la convexidad, análisis numérico, funciones especiales, Cálculo Operacional Finito (Cálculo Umbral) y Cálculo-q. Su muerte inesperada, que ocurre sólo un año después de la muerte de su esposa Luciana Lupas, también una distinguida matemática de la Universidad "Lucian Blaga" en Sibiu, conmocionó no sólo a su familia, sino también a sus amigos, discípulos, doctorandos y estudiantes. Fue un hombre extraordinario, con una personalidad agradable y una visión optimista del mundo, de la vida y del trabajo. Para muchos, fue un gran maestro, un consejero y un amigo.*

Referencias.-

1. E Draghici, Professor Ph.D. Alexandru Lupas at his 65-th anniversary, *Gen. Math.* **15** (1) (2007), 3-20.
2. S Gal and A Vernescu, Obituary: Professor Alexandru Lupas (1942-2007), *J. Inequal. Pure Appl. Math.* **8** (3) (2007).

Versión en español por R. Ascanio H. del artículo en inglés de J. J. O'Connor y E. F. Robertson sobre "Alexandru Lupas" (Diciembre 2008).
Fuente: MacTutor History of Mathematics [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lupas.html].