

HOMOTECIA



CÁTEDRA DE CÁLCULO - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA y FÍSICA - FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN - UNIVERSIDAD DE CARABOBO

© Rafael Ascanio H. - 2009. Hecho el Depósito de Ley. Depósito Legal: PPI2012024055 - I. S. N.: 2244-7385

E- mail: homotecia2002@gmail.com - Nº 4 - AÑO 17 Valencia, Lunes 1º de Abril de 2019



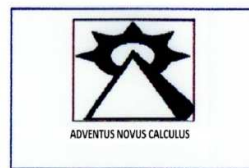
UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN





HOMOTECIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA - FACE - UC



CÁTEDRA DE CÁLCULO

Índice

Editorial.....	1-2
Grandes Matemáticos: ERNESTO PASCAL	3-5
Científicos en guerra: Newton, Leibniz y el cálculo infinitesimal. Por: ANTONIO J. DURÁN	6
Aportes al conocimiento. Elementos Básicos del Cálculo Integral (10). Integral Indefinida. Las Técnicas de Integración. Resolución de integrales por Sustituciones Trigonómicas. Descripción del proceso de aplicación de la técnica. Ejercicios resueltos. Ejercicios propuestos. Por: Prof. Rafael Ascanio Hernández - Prof. Próspero González Méndez	7-31
Físicos Notables: HIDEKI YUKAWA	32
Químicos Destacados: GLENN THEODORE SEABORG	33
Químicos Destacados: EDWIN MATTISON McMILLAN	34
Grandes aventureros de la ciencia. Por: JAVIER YANES	35-37
El Maestro “Patepalo” y José Félix Ribas. Por: LUIS ALBERTO LÓPEZ	38
Venezuela, personajes, anécdotas e historia. Antonio Guzmán Blanco	39
Mitos universales develados (Parte 2 y última).....	40-43
Galería: SRINIVASA VARADHAN	44-46

LAS IDEAS Y OPINIONES DE LOS AUTORES DE LOS ARTÍCULOS QUE PUBLICAMOS EN HOMOTECIA SON RESPONSABILIDAD DE LOS MISMOS. SI ALGÚN LECTOR TIENE OBJECIONES SOBRE ÉSTAS, AGRADECEREMOS NOS HAGA LLEGAR SUS COMENTARIOS A TRAVÉS DE NUESTRA DIRECCIÓN ELECTRÓNICA, homotecia2002@gmail.com.

Diseño de Portada y Montaje Gráfico: R. A. A. H.

La mayoría de las imágenes que aparecen en esta publicación, son obtenidas de Google, Facebook, MSN, via Internet.

Para el acceso a todos los números publicados de la Revista HOMOTECIA, conectarse al enlace:
<http://servicio.bc.uc.edu.ve/homotecia/index.htm> > Sección: MULTIDISCIPLINARIAS

Revista HOMOTECIA
© Rafael Ascanio H. – 2009
Hecho el Depósito de Ley.
Depósito Legal:
PPI2012024055
I. S. S. N.: 2244-7385

e-mail:
homotecia2002@gmail.com

Publicación Mensual
Revista de acceso libre

Publicada por:
CÁTEDRA DE CÁLCULO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DE CARABOBO

DIRECTOR–EDITOR:
Profesor Rafael Ascanio Hernández

SUB-DIRECTOR:
Profesor Próspero González Méndez

COORDINADORES DE PUBLICACIÓN:
Profesor Rafael Ascanio Hernández
Profesor Próspero González Méndez

COMISIÓN
ARCHIVO Y REGISTRO HISTÓRICO
Profesora María del Carmen Padrón
Profesora Zoraida Villegas
Profesora Ivel Páez

COMISIÓN REVISORA DE MATERIAL A PUBLICAR:

Profesora Elda Rosa Talavera de Vallejo
Profesora Omaira Naveda de Fernández
Profesor José Tadeo Morales

Nº 4 - AÑO 17 - Valencia, Viernes 1º de Abril de 2019

EDITORIAL

El desarrollo de toda sociedad en la actualidad se caracteriza por la existencia de un bucle recursivo en donde se ha de entender que la cultura de un pueblo evidencia la educación que práctica, pero de igual manera es la educación que práctica la que ha de caracterizar su cultura. Esto obedece a lo complejo que resulta la organización de los seres humanos en una estructura social (comunidad en sí). Explicado con otras palabras: todo ciudadano ajusta su existencia a un contexto de vida determinado por una procedencia social que le es propia: creencias, teorías, valores, intenciones. El *ser humano vive practicando una cultura*, considerando por los momentos a esta cultura como la totalidad de manifestaciones y formas de vida que caracterizan a un pueblo. Pero hay que aceptar, entonces, que primero los diferentes grupos humanos formaron una cultura y ajustados al *principio de la herencia de los pueblos*, surgió la educación como la vía de transmisión de todos los mejores elementos culturales desarrollados desde tiempos ancestrales con el propósito de ayudar a garantizar su progreso y su evolución. La cultura tiene de esta manera una *función anagógica*: hacerse superior o más elevado. Cuando el *estado anagógico* llega a ser permanente se vive para crecer, para avanzar.

Una sociedad que viva bajo estos fundamentos, alcanzaría los niveles de *primer mundo*, pero con valores éticos, morales y espirituales muy superiores de los que hoy presentan las naciones que son consideradas dentro de ese exclusivo entorno, de tal manera que los logros en lo social, lo económico, lo tecnológico y lo político se alcanza bajo el *principio de alteridad*: “*El prójimo existe y puede tener razón; tiene derecho a ser respetado*”.

Pero a nivel mundial, así como en algunas naciones sus sociedades se encuentran trabajando para lograr o mantener su progreso y desarrollo, en otras sin importar si son ubicadas en el primero o tercer mundo, sus poblaciones viven en una constante ebullición social.

A pesar de todo lo convulsivo que pueda ser el transcurrir diario de una nación, muchas veces debido a la tensión de las relaciones internacionales con naciones que como ella intentan conformar un centro de poder, en cada nación ubicada en el primer mundo se está consciente que aun todas las confrontaciones internas que puedan existir entre sus habitantes, el objetivo de todos es *la salud del país*. Así puede observarse que hay naciones del primer mundo que para mantenerse en continuo progreso y desarrollo, mejoran el currículo manejado dentro de su sistema educativo. Esto lo logran mediante el trabajo interdisciplinario. De esta manera, algunas naciones se han planteado la eliminación de aquellas asignaturas que conducen a estudiar conocimientos situados, es decir asignaturas que están referidas a información que ya no ha de cambiar y que ha sido tradición que los estudiantes las aprendan mediante la memorización y repetición de textos. Las sustituyen por *proyectos de investigación* y aunque versen sobre los mismos tópicos: mitología griega, historia universal, música, literatura, arte y así por el estilo, el alumno se apropia de este conocimiento producto de su propia investigación; además otros proyectos motivan a los estudiantes llevarlos a cabo porque los ayudan a aprender cosas que les servirán para la vida real. Ningún proyecto es validado si el estudiante no demuestra que la argumentación científica que utiliza para defenderlo, es producto de una información recabada metódicamente. Pero estas propuestas se implementan porque obedecen a una consecuencia natural en una nación donde la educación es utilizada para avanzar en su desarrollo, a pesar de practicar una cultura donde los conflictos sociales y políticos marquen las pautas de su devenir diario.

Pero ¿qué sucede con los llamados países del tercer mundo?, ¿Latinoamérica... y específicamente Venezuela? El caso Venezuela no es solamente el de un país *tercermundista*, sino el de un país *antidesarrollado*. Los cambios en el currículo escolar se han sucedido siempre y en los últimos tiempos con mucha frecuencia. El antidesarrollo de Venezuela es ancestral. En la época colonial la educación en Venezuela era de anti emancipación y así permaneció por mucho tiempo cuando se dieron cambios para actualizarla a un mundo que surgía vertiginosamente a los inicios del siglo XX.

Pero en Venezuela nunca se planteó que la educación tuviera como primordial objetivo que el estudiante produjera su propio conocimiento, el que social, científico, económico, tecnológico, humanístico y de otra naturaleza, fuera necesario para desarrollar a la nación. Las necesidades en estas áreas, sobre todo después del boom petrolero, Venezuela las suplía *importando* tecnología y otros conocimientos. Por ejemplo, a mediados del siglo XX se introdujo en la educación venezolana la llamada *Matemática Moderna*, conocimiento proveniente de la cultura francesa que tanto hoy como ayer, ha sido una nación poderosa en matemática. Pero esta cultura matemática en Francia ha tenido siglos de desarrollo, mucho antes de ser Venezuela una nación. Aunque posiblemente en la actualidad no cause muchas dificultades a los estudiantes venezolanos, en aquel momento no solo les causó problemas a ellos sino también a los docentes: cognitivamente carecían de la construcción histórica adecuada de ese conocimiento. Esto no justifica los problemas tradicionales de nuestros estudiantes en el aprendizaje de la matemática pero detalles así hacen complejo el aprendizaje de esta asignatura.

Pero a todas estas, ¿qué cultura practica un docente venezolano? En la práctica, para muchos de ellos la formación cultural debe ser una de sus fortalezas más que competencia. Pero no es esa cultura que hasta la misma Constitución Nacional reduce a elementos folcloristas, costumbristas y de valores nacionalistas, sino una que además de incluir estos elementos, vaya más allá. Una cultura integral, que por un lado los haga más doctos, y por el otro se relacione más con el crecimiento espiritual, con el disfrute de su esencia humana. Que le haga crecer internamente el sentimiento de la misericordia, entendida ésta como la disposición voluntaria a ayudar al otro a aprender, a crecer; porque nadie va a la escuela, al liceo o a la universidad sin llevar en menor o mayor grado la intención de labrarse un futuro mejor, como ser humano y como ciudadano. Esta formación cultural que necesitan, encierra el buen hablar (dicción y expresión), el buen leer y escribir; con el consecuente disfrute de hacerlo. Este hecho está por encima de si se es docente de matemática, de química, de física, de literatura o de sociales, o practicante de cualquier otra profesión; y tiene una estrecha relación con el proceso en general de autoformación de la persona, adquiriendo las herramientas para la indagación y el estudio permanente. Además, se es un ser humano y como humano hay que maravillarse ante lo real o lo mágico, ya sea producto del intelecto o percibido por la persona.

(VIENE DE LA PÁGINA ANTERIOR)

Pero hay situaciones donde esta idealidad se deforma por la conducta de algunos docentes, pocos pero los hay. Tiempo atrás publicamos en nuestra revista un artículo de un profesor de una universidad de Barquisimeto, estado Lara, quien en el mismo se quejaba de que día tras día debía padecer el encontrarse con sus compañeros de departamento quienes en vez de tratar asuntos académicos que le competían cuando se reunían, solo hablaban de las carreras de caballo del 5 y 6 del domingo y se dedicaban *profundamente* a estudiar las revistas relacionadas con esta actividad, o hablaban de la suerte que tuvieron al jugar dominó, bolas criollas, pool, o de cuántas *chamas* se habían levantado, o cuantas botellas de este u otro licor se habían tomado. Aunque no lo dijo en su artículo, nos imaginamos que apenas tuvo el tiempo de servicio para solicitar su jubilación, lo hizo inmediatamente. Así dejaba de padecer. Este tipo de actitudes señaladas en el referido artículo da origen a que se suceda culturalmente en una nación un *estado catagógico*, contrario al anagógico, es decir, implica el proceso contrario: representa retroceso y atraso.

Situaciones similares a esta se suceden en otras latitudes. Es el caso de España que aunque no sea considerada una de las principales potencias mundiales, sí se ubica como uno de los centros de poder mundial e integrante del primer mundo. En el año 2017 corrió por las redes sociales un artículo que levantó roncha entre los españoles, inicialmente atribuido al humorista Antonio Fraguas “Forges” pero que después se pudo constatar que su autor es el periodista y escritor David Jiménez. El artículo en cuestión se titula “*El triunfo de los mediocres*” y reproducimos aquí parte del mismo:

...

Assumir que nuestros problemas no se terminarán cambiando a un partido por otro, con otra batería de medidas urgentes, con una huelga general, o echándonos a la calle para protestar los unos contra los otros.

Quizá ha llegado la hora de aceptar que nuestra crisis es más que económica, va más allá de estos o aquellos políticos, de la codicia de los banqueros o la prima de riesgo.

Reconocer que el principal problema de España no es Grecia, el euro o la señora Merkel.

Admitir, para tratar de corregirlo, que nos hemos convertido en un país mediocre.

Ningún país alcanza semejante condición de la noche a la mañana. Tampoco en tres o cuatro años. Es el resultado de una cadena que comienza en la escuela y termina en la clase dirigente.

Hemos creado una cultura en la que los mediocres son los alumnos más populares en el colegio, los primeros en ser ascendidos en la oficina, los que más se hacen escuchar en los medios de comunicación y a los únicos que votamos en las elecciones, sin importar lo que hagan, alguien cuya carrera política o profesional desconocemos por completo, si es que la hay. Tan solo porque son de los nuestros.

Estamos tan acostumbrados a nuestra mediocridad que hemos terminado por aceptarla como el estado natural de las cosas. Sus excepciones, casi siempre, reducidas al deporte, nos sirven para negar la evidencia.

- *Mediocre es un país donde sus habitantes pasan una media de 134 minutos al día frente a un televisor que muestra principalmente basura.*
- *Mediocre es un país que en toda la democracia no ha dado un solo presidente que hablara inglés o tuviera unos mínimos conocimientos sobre política internacional.*
- *Mediocre es el único país del mundo que, en su sectarismo rancio, ha conseguido dividir, incluso, a las asociaciones de víctimas del terrorismo.*
- *Mediocre es un país que ha reformado su sistema educativo tres veces en tres décadas hasta situar a sus estudiantes a la cola del mundo desarrollado.*
- *Mediocre es un país que tiene dos universidades entre las 10 más antiguas de Europa, pero, sin embargo, no tiene una sola universidad entre las 150 mejores del mundo y fuerza a sus mejores investigadores a exiliarse para sobrevivir.*
- *Mediocre es un país con una cuarta parte de su población en paro, que sin embargo, encuentra más motivos para indignarse cuando los guñoles de un país vecino bromean sobre sus deportistas.*
- *Mediocre es un país donde la brillantez del otro provoca recelo, la creatividad es marginada, cuando no robada impunemente, y la independencia sancionada.*
- *Mediocre es un país en cuyas instituciones públicas se encuentran dirigentes políticos que, en un 48 % de los casos, jamás ejercieron sus respectivas profesiones, pero que encontraron en la Política el más relevante modo de vida.*
- *Es Mediocre un país que ha hecho de la mediocridad la gran aspiración nacional, perseguida sin complejos por esos miles de jóvenes que buscan ocupar la próxima plaza en el concurso Gran Hermano, por políticos que insultan sin aportar una idea, por jefes que se rodean de mediocres para disimular su propia mediocridad y por estudiantes que ridiculizan al compañero que se esfuerza.*
- *Mediocre es un país que ha permitido, fomentado y celebrado el triunfo de los mediocres, arrinconando la excelencia hasta dejarle dos opciones: marcharse o dejarse engullir por la imparable marea gris de la mediocridad.*
- *Es Mediocre un país, a qué negarlo, que, para lucir sin complejos su enseña nacional, necesita la motivación de algún éxito deportivo.*

Cualquier similitud con lo que sucede en Venezuela, no es casualidad.

Reflexiones

"Basta un poco de espíritu aventurero para estar siempre satisfechos, pues en esta vida, gracias a Dios, nada sucede como deseábamos, como suponíamos, ni como teníamos previsto."

Noel Clarasó

Los Grandes Matemáticos



ERNESTO PASCAL
(1865 - 1940)

Nació el 7 de febrero de 1865 y murió el 25 de enero de 1940; ambos momentos en Nápoles, Italia.

Los padres de Ernesto Pascal fueron Stefano Pascal y María Gaetana Zapegna. Por supuesto, el nombre Pascal suena a francés y de hecho es que la familia de Stefano Pascal era originaria de Francia, procedente de la localidad de Tarascon, que está a unos 20 km al suroeste de Aviñón. Ernesto tuvo un hermano, Carlo Pascal (1866-1926), nacido el 21 de octubre de 1866, también en Nápoles. Carlo estudió latín en la Universidad de Nápoles y llegó a ser profesor de literatura latina en las universidades de Catania, Pavía y Milán. Él era un erudito excepcional, eminente en su campo como su hermano Ernesto lo era en el campo de las matemáticas.

La educación de Ernesto Pascal fue en su ciudad natal, Nápoles, y después de asistir a la escuela, ingresó en la Universidad de Nápoles. Los matemáticos en Nápoles en aquel momento incluían a Ettore Caporali (1855-1886) y a su estudiante Pasquale Del Pezzo (1859-1936) quien se graduó en el año 1882 y pasó el resto de su carrera docente en Nápoles. Lamentablemente Caporali se suicidó en julio de 1886 a la edad de 31 al creer que estaban disminuyendo sus habilidades intelectuales. Otros que enseñaban allí eran Gabriele Torelli (1849-1931), quien era conferencista, Federico Amodeo (1859-1946), a quien se le había concedido su lauro (licenciatura) en Nápoles en 1883, y Alfonso Del Re (1859-1921) quien también había ganado una lauro en Nápoles y fue nombrado como Asistente en 1885. Pascal se graduó con un lauro en matemáticas en 1887, sin embargo, incluso antes de la concesión del grado, había comenzado a publicar artículos sobre matemáticas. Dos de sus trabajos, *Relazioni fra le ellissi centrali d'inerzia delle aree ed i baricentri dei volumi generati da esse* y *Teoremi baricentrici*, fueron publicados en 1886 en la revista de la Academia de Ciencias, Física y Matemáticas de Nápoles. Como muy notable, publicó seis trabajos en 1887, el año que obtuvo su lauro, tres en la misma revista como sus trabajos de 1886 y tres en el *Giornale di matematiche*. Este diario había sido fundado en Nápoles por Giuseppe Battaglini junto con Nicola Trudi (1811-1894) y Vincenzo Janni (1819-1891) dos años antes del nacimiento de Ernesto Pascal. Sus tres trabajos de 1887 en el diario de Battaglini fueron *Costruzioni geometriche di tre poligoni regolari*, *Sopra una formula numerica*, y *Sulla risultante di una ennica e di una cubica*.

Después de graduarse, Pascal salió de Nápoles y fue a la Universidad de Pisa, donde continuó sus estudios durante el año académico 1887-1888. Había un número de matemáticos destacados en Pisa como Ulisse Dini, Luigi Bianchi y Vito Volterra. Pascal continuó su notable récord de publicaciones, con otros seis artículos publicados en 1888. El principal centro para las matemáticas en el mundo en aquel momento era la Universidad de Göttingen en Alemania, y allí fue Pascal luego de su año en Pisa. Hermann Schwarz y Felix Klein, para ese entonces, eran dos de los matemáticos principales en Göttingen y Pascal se benefició particularmente de la enseñanza de Klein. El año que pasó en Alemania tuvo un gran impacto en su desarrollo matemático. Esto significó que, después del año 1888-1889 en Göttingen, Pascal regresara a Italia en 1889, tan solo con 24 años de edad, pero con una gran experiencia que le pondría en una buena posición en las competiciones para las cátedras en Italia. Seguía teniendo un registro notable de publicaciones para alguien tan joven con 22 trabajos impresos en 1890. Fue en ese año que entró en el concurso para la Cátedra de Cálculo Infinitesimal en la Universidad de Pavía. Clasificado en la más alta posición por los Comisionados, fue nombrado en 1890. Permaneció en Pavía hasta 1907 y durante su tiempo allí se casó y tuvo dos hijos.

Tanto Alberto Pascal, nacido el 23 de diciembre de 1894 como Mario Pascal, nacido el 31 de mayo de 1896, nacieron en Pavía. Alberto estudió matemáticas en la Universidad de Nápoles (donde su padre era profesor), pero fue llamado a pelear en la I Guerra Mundial en 1915 antes de completar sus estudios universitarios. Participó en la batalla de las tres montañas (Monte Valbella, Col del Roso y Col d'Echele) en la meseta de Asiago el 28 de enero de 1918 entre las fuerzas italianas y las Austro-Húngaras. Murió ese día, ultimado mientras observaba un plano. Fue condecorado con una medalla póstuma al valor por su país y un grado honorario de matemáticas por la Universidad de Nápoles. Mario, el hermano más joven, también estudió matemáticas en la Universidad de Nápoles y se graduó en 1919. Fue profesor en el Instituto Naval y más tarde en la Academia de la Fuerza Aérea en Caserta.

Hablando nuevamente de la carrera de Ernesto Pascal en Pavía, fue durante los siete años allí que Pascal inició algunos proyectos que continuó a lo largo de su vida. En forma litografiada, publicó el primer curso que dio en Pavía, a saber, *Lezioni di calcolo infinitesimale dettate nella R. Università di Pavia nell'anno 1890-91*. En 1895 publicó los dos volúmenes de la obra *Lezioni di calcolo infinitesimale* y el libro de ejercicios *Esercizi e note critiche di calcolo infinitesimale*. Publicó *Teoria delle funzioni ellittiche* en 1896 y en el mismo año, su notas litografiadas *Introduzione alla teoria della trasformazione delle funzioni ellittiche*, *Lezioni dettate nella R. Università di Pavia*. Publicó *Calcolo delle variazioni e calcolo delle differenze finite* en 1897 y, dos años más tarde, apareció una traducción al alemán. James K Whittemore, de la Universidad de Harvard, revisión de la traducción alemana, escribe:

(CONTINÚA EN LA SIGUIENTE PÁGINA)

(VIENE DE LA PÁGINA ANTERIOR)

La traducción alemana de "Calcolo delle variazioni" publicado por Ernesto Pascal en 1897 da a los matemáticos americanos en forma conveniente, el mejor libro sobre el cálculo de variaciones que se tiene, a nuestro conocimiento, hasta el momento actual. El libro consta de 150 páginas de octavo y presenta concisamente los hechos principales de la materia. Una característica valiosa de la obra se encontrará sin duda en la muy excelente y al parecer completa bibliografía en relación a informes breves del desarrollo del cálculo de variaciones. Ningún libro con el cual estamos familiarizados puede adaptarse mejor a la controversia de la opinión laica de que todo en la matemática es exacto y más allá de la disputa. Una y otra vez el autor llama la atención sobre errores cometidos por los escritores en este campo. A menudo llama la atención, también, a las lagunas que quedan todavía por rellenar en la teoría, y hace que el lector a veces sienta que los resultados que ya tenemos descansan sobre una base más bien precaria. La culpa principal del libro, desde nuestro punto de vista, es que sacrifica la discusión simple y natural en la búsqueda del final tan deseado por los matemáticos italianos, por la mayor generalidad posible. El aparente propósito del autor es dar cuenta, absolutamente rigurosa en cuanto pueda, de la situación actual de la ciencia. Que tal fin es en el cálculo de variaciones especialmente difícil de alcanzar se desprende del hecho de que las pruebas no siempre son precisas y que el autor prefiere a menudo digamos que el trabajo dado no es riguroso en lugar de tratar de hacerlo.

La producción de textos de Pascal al mismo tiempo que el flujo de producción de trabajos de investigación de alta calidad, es bastante notable. Ciertamente se puede continuar mencionando todos sus textos pero la lista sería demasiado larga. Téngase en cuenta, sin embargo, que en 1897 comenzó la publicación de su serie de textos *Repertorio di matematiche superiori*. La primera de ellas, *Repertorio di matematiche superiori. I (Analisi)*, fue revisada por Edgar Odell Lovett (1871-1957), un Profesor Asistente de Princeton, quien escribe:

En ningún tema es especial que sea más imperativo el crecimiento de la especialización que en las matemáticas; en medio de la dificultad y la demanda que el estudiante debe granizar con deleite los valiosos servicios de una obra tan admirablemente adaptada a los propósitos de la orientación como promete ser el repertorio del profesor Pascal. El plan del autor, adherido sin desviación, es presentar con respecto a cada teoría de las matemáticas modernas las definiciones fundamentales y nociones, los teoremas necesarios característicos y las fórmulas, y las referencias a las obras principales de su bibliografía. Las definiciones son claras e inequívocas; las declaraciones de los teoremas, siempre dados sin demostración, están concisas y sin ambigüedades; y las referencias bibliográficas son lo suficientemente completas para abastecer las necesidades del lector matemático general.

Otros textos de Pascal aparecieron en la serie el Manual de Hoepli. Como un ejemplo de uno de los muchos trabajos de esta serie se cita parte del informe de Edwin Bailey Elliott sobre *I Gruppi Continui di Trasformazioni* (1903) de Pascal:

El pequeño libro sobre teoría de Lie se merece una calurosa bienvenida. Por un corto tiempo todavía no hay ningún libro en inglés sobre el tema. Permite a quienes de nosotros conocemos un poco de italiano, leer detenidamente el presente manual. Es de lo más fácil empezarlo porque no hay espacio en él para el estilo dignificado y la elaboración casi tediosa de las importantes obras presentadas bajo los propios auspicios de Lie. Pocos autores saben tan bien como Señor Pascal presenta las matemáticas superiores en forma didáctica. La gama de su aprendizaje matemático es además ciclopédico. La proporción de utilidad y la actualización del Manual de Hoepli llevada por su pluma son notables. Las señales de prisa en la producción, aunque no están enteramente ausentes, son raras. El "Manual de Hoepli" son libros de tamaño bolsillo. Dos páginas irían en un octavo de una ordinaria. El tipo de letra, que está maravillosamente claro, es casi extravagantemente grande. El comprador por media corona del presente volumen bien podría perdonarse por esperar solamente un bosquejo exiguo de los primeros principios y no tanto del análisis, que forzosamente abunda en sufijos triples, etc., lo cual es formidable aspecto incluso en la amplia página de Lie-Engel de Teubner. Será una agradable decepción. El trabajo no es ambicioso. Su objetivo es "Sin falta de rigor y generalidad contener en poco espacio todas las formas básicas de esta avanzada parte de la matemática pura". El autor de todos modos ha tenido éxito haciendo claro en sus formas completas los principios y procesos de la teoría general. Las teorías especiales, y en particular el tema de transformaciones de contacto, están reservados para un prometido volumen adicional.

Pascal dejó Pavía en 1907, cuando fue nombrado para la Cátedra de Álgebra Complementaria y Análisis Superior en la Universidad de Nápoles. Continuó ocupando esta cátedra hasta su muerte en 1940. Se detallan a continuación sus opiniones sobre el sistema universitario italiano, expuestas en dos discursos; el primero su discurso inaugural en Pavía y el segundo dado en Nápoles en 1912. En su discurso de Pavía criticó el sistema de nombramientos que con frecuencia conducía a favorecer a un familiar o a un amigo de un pariente. Era adverso a que los profesores trataran de aumentar el tamaño de su Departamento con la finalidad de mejorar su reputación y no por razones científicas o educativas. También criticó a aquellos jueces de concursos para las cátedras porque tendían a ser académicos mayores que a menudo intentaban perpetuarse en sus propios cargos, áreas más que anticuadas, en lugar de nombrar a personas con nuevas ideas vanguardistas. Hizo críticas similares del sistema educativo en su discurso de Nápoles. Argumentó vehementemente que si bien habían logrado grandes avances en la investigación, el papel de la enseñanza en las universidades no había recibido suficiente atención. Los nombramientos en las cátedras de ciencia, argumentó, fueron hechas enteramente por motivos de la capacidad en investigación y no se consideró la capacidad docente de los candidatos. Como consecuencia, la enseñanza se había convertido en demasiado especializada, con el resultado que los estudiantes fueron excluidos de la ciencia. Culpó a diferentes factores por los problemas dentro de las universidades tales como la falta de disciplina, hacer caso omiso del principio de autoridad y, quizá más significativamente, que el país había perdido la confianza en los institutos educacionales y en las universidades.

Se obtiene una idea de su actitud hacia la enseñanza con lo expuesto anteriormente, pero se puede señalar más si se conocen sus ideas sobre la enseñanza de ingenieros al citar el prólogo de *Lezioni di Calcolo Infinitésimale* (1917):

Es cierto que a través de los profundos cambios los cuales ha hecho el espíritu crítico en los fundamentos del cálculo, incluso un curso destinado a aquellos para quienes las matemáticas es un medio y no un objetivo, no pueden sino usar los nuevos resultados que han sido alcanzados... exhibiría por lo tanto, una visión miope y poco aprecio por la capacidad del futuro ingeniero, parece que sería suficiente para ellos, al menos si puede, aprender a utilizar el cálculo en la forma en que un trabajador sabe cómo operar una máquina hecha por otros, y sin que él no conoce las conexiones internas.

Durante sus años en Nápoles, la escena política en Italia cambió notablemente con el ascenso del fascismo en la década de 1920. Pascal se opuso enérgicamente a las ideas fascistas aunque sus colegas lo describieron como arrogante y autoritario. La muerte de su hijo en 1918 tuvo un profundo impacto en él y sería justo decir que lo agitó tanto que nunca fue absolutamente el mismo hombre después de esta tragedia. Su estudiante más famoso en Nápoles fue Renato Caccioppoli quien se graduó en 1925 después de haber escrito una tesis tutorada por Pascal. Uno de los aspectos a mencionar de la obra de Pascal fue su interés por los instrumentos matemáticos.

Él desarrolló el intergrafo, un instrumento para la integración mecánica de ecuaciones diferenciales. Primero lo introdujo en un trabajo titulado *I miei integrati per equazioni differenziali* en 1913 pero el resumió sus aportes en el documento *Sull'integrazione meccanica delle equazioni differenziali, e in particolare di quella lineare di 2° ordine ausiliaria dell'altra non lineare che è fondamentale per la fisica atomica*, publicado póstumamente en 1941. Pierce W. Ketchum (1903-1993), Universidad de Illinois, escribe en un informe:

Se da una discusión de la teoría del intergrafo de Abdank Abakanowicz con varias mejoras y modificaciones que el autor ha realizado con el fin de permitirle resolver tipos especiales de ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden, así como la ecuación lineal general de primer orden, la ecuación $y'' = (y^3/x)^{1/2}$, etc. Los instrumentos son más compactos pero menos flexibles que un analizador diferencial. La unidad de entrada para x (un carro de dos ruedas que se mueve paralelo al eje x y que lleva el instrumento entero), las unidades de entrada y salida para las variables dependientes (pequeños carros con punteros y lápices, respectivamente, que ruedan sobre pistas atadas al carro principal) y el integrador (una rueda de fricción que restringe el movimiento del lápiz de la salida) son mantenidas en forma substancial a la usada en el intergrafo original. Las modificaciones consisten principalmente en los diferentes tipos de vínculos que se utilizan para conectar al integrador y a las unidades de entrada y salida. Estos vínculos incluyen pistas de curvas y levas, así como paralelogramos.

Pascal recibió numerosos premios y honores por sus contribuciones. Fue elegido a la Accademia dei Lincei, al Istituto Lombardo, a la Accademia di Scienze e Lettere y a la Academia Nacional de Ciencias de Italia (la "Academia de los cuarenta"). La Academia de los XL le otorgó la medalla de oro en 1904 y nuevamente en 1914. El Liceo Scientifico Statale Ernesto Pascal en Pompeya, fue bautizado con su nombre en su honor. Una calle, la vía Ernesto Pascal de la ciudad de Nápoles también es nombrada así por la misma razón.

Referencias.-

Artículos:

1. L Berzolari, Ernesto Pascal, *Rend. del R. Ist. Lombardo di Scienze e Lettere* (3) **73** (1939-40), 162-170.
2. A Dresden, Review: Lezioni di Calcolo Infinitésimale Part 1 (4th edition), Part 2 (4th edition), by Ernesto Pascal, *Bull. Amer. Math. Soc.* **28** (1922) 315-317.
3. A Dresden, Review: Lezioni di Calcolo Infinitésimale, Part II (5th edition), by Ernesto Pascal, *Bull. Amer. Math. Soc.* **32** (1926) 171.
4. E B Elliott, Review: I Gruppi Continui di Trasformazioni (4th edition), by Ernesto Pascal, *The Mathematical Gazette* **2** (38) (1903), 264-267.
5. Ernesto Pascal: Bibliografie, *Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo*.
<http://math.unipa.it/~brig/sds/prima%20pagina/tirocinio/Pascal%20Ernesto%20biblio.htm>
6. T H Gronwall, Review: Repertorium der höheren Mathematik Vol. I (Analysis), Part 3, by E Pascal, *Bull. Amer. Math. Soc.* **36** (1930) 31.
7. L S Hill, Review: Repertorium der Höheren Mathematik, Vol. I (Analysis), Part 2 (2nd edition), by E Pascal, *Bull. Amer. Math. Soc.* **35** (1929) 737-738.
8. E O Lovett, Review: Repertorio di matematiche superiori. I (Analisi), by Ernesto Pascal, *Bull. Amer. Math. Soc.* **5** (1899) 357-362.
9. M Picone, Ernesto Pascal, *Rend. della R. Acc. delle Scienze Fisiche e Mat. di Napoli* (4) **12** (1941-42).
10. Review: Repertorium der Höheren Mathematik (Definitionen, Formeln, Theoreme, Literatur). Part II Geometrie, by E Pascal, *The Mathematical Gazette* **2** (35) (1902), 219.
11. C H Sisam, Review: Repertorium der Höheren Mathematik, by E Pascal, Vol. II (Geometry), Part 2 (Geometry of Space) (2nd edition), *Bull. Amer. Math. Soc.* **29** (1923) 373.
12. M Taddia, La crisi dell'università, come la vedeva Pascal (Ernesto), *Scienza in Rete* (10 November 2010).
<http://www.scienzainrete.it/contenuto/articolo/la-crisi-delluniversita-come-la-vedeva-pascal-ernesto>
13. F G Tricomi, Ernesto Pascal (1865-1940), *Dipartimento di Matematica 'Giuseppe Peano', Università degli Studi di Torino*.
http://www.dm.unito.it/sism/m_italiani/biografie/tricomi/pascalern.html
14. J K Whittemore, Review: Die Variationsrechnung, by E Pascal, *Bull. Amer. Math. Soc.* **6** (1900) 352-354.

Versión en español por R. Ascanio H. del artículo en inglés de J. J. O'Connor y E. F. Robertson sobre "Ernesto Pascal" (Mayo 2013).

FUENTE: MacTutor History of Mathematics. [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pascal_Ernesto.html].

Científicos en guerra: Newton, Leibniz y el cálculo infinitesimal

La pelea mostró al Newton colosal, vengativo y complejo; nos mostró al científico, aunque leyendo entre líneas se puede advertir también al mago y, sobre todo, al místico.

Por: ANTONIO J. DURÁN - Matemático y escritor.

16 Agosto 2017



ISAAC NEWTON (1643-1727)



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716)

La disputa más célebre de la historia de la ciencia la protagonizaron **Isaac Newton** y **Gottfried Leibniz** hace 300 años. El objeto de la ardua pelea, que marcó el procedimiento para resolver –o al menos intentarlo– conflictos posteriores de este tipo, fue determinar la prioridad en el descubrimiento del cálculo infinitesimal. En esta polémica, Newton estableció la después tan repetida sentencia: “*Los segundos inventores no tienen derechos*”.

El cálculo infinitesimal es una herramienta científica y tecnológica de primer nivel, sin duda la más potente y eficaz para el estudio de la naturaleza que hayan desarrollado los matemáticos. Se considera que Newton y Leibniz lo descubrieron porque: (1) sintetizaron dos conceptos, que hoy denominamos derivada e integral, (2) desarrollaron las herramientas que permiten manejarlos, (3) mostraron que son conceptos inversos –a esto se le llama el teorema fundamental del cálculo–, y (4) enseñaron cómo utilizarlos para resolver de forma unificada un enorme catálogo de problemas que hasta entonces habían venido estudiándose caso a caso. El cálculo infinitesimal convierte en meros ejercicios que podría resolver un estudiante de Bachillerato problemas que, hasta entonces, para su solución necesitaron del genio de un Arquímedes, un Galileo, un Fermat o un Pascal.

El objeto por el que Newton y Leibniz disputaron merecía desde luego la pelea. La polémica fue áspera, y muy sucia por momentos. Reflejó la singularidad de sus protagonistas y puso de manifiesto algunas de las más apasionantes complejidades de estos dos genios de la ciencia y el pensamiento. La pelea mostró al Newton colosal, vengativo y complejo; nos mostró al científico, aunque leyendo entre líneas se puede advertir también al mago y, sobre todo, al místico. En los escritos que Newton dedicó al tema, se escenifica una especie de adelanto del juicio final donde cada cual rinde cuentas y son sus hechos pasados los que lo salvan o condenan. Percibimos, casi en cada palabra que Newton escribió sobre la controversia, la profunda religiosidad con que Newton entendía cada hecho de la vida, incluido el hecho científico. Mientras Newton, “*cuando atacaba, agachaba la cabeza y cargaba*”, Leibniz fue más sibilino e incisivo, aunque menos obsesivo e, incluso, se permitió bromear sobre el asunto de la polémica.

La guerra científica finalizó con la muerte de Newton en 1727, y no llegó a aclarar cabalmente la cuestión de la prioridad; entre otras cosas porque algunos documentos fundamentales no fueron de dominio público hasta siglos después de acabada la contienda. Lo cierto es que Newton y Leibniz habían descubierto el cálculo de forma independiente. Newton entre 1666 y 1669, y para 1671 ya tenía escritos dos libros. Los dio a conocer sólo a un grupo de colegas, pero no los publicó –le daba pánico que sus obras pudieran ser criticadas–; de hecho el primer de esos libros no se publicó hasta 1704 y el segundo hasta 1736 –nueve años después de muerto Newton!–. Leibniz descubrió el cálculo unos años más tarde que Newton, entre 1675 y 1676, en los dos últimos de los casi cinco años que pasó en París. Pero publicó sus descubrimientos antes, en 1684 y 1686.

Las versiones del cálculo de Newton y Leibniz fueron conceptualmente distintas, y sus conceptos fundamentales ligeramente diferentes a los nuestros.

Lo cierto es que Newton y Leibniz habían descubierto el cálculo de forma independiente

Lo que hace tan versátil al cálculo infinitesimal es la gran variedad de procesos matemáticos, físicos, tecnológicos, económicos y de otra muy diversa índole que se modelizan con derivadas e integrales. La derivada es, por ejemplo, un concepto fundamental de la física, pues da cuenta de velocidades y aceleraciones instantáneas, y fuerzas. Otro ejemplo, de muchos posibles, de la versatilidad del cálculo lo vemos cuando nos hacen una resonancia magnética o una tomografía. Esos procedimientos consisten en ondas que entran y salen de nuestro cuerpo y, en cierta forma, lo que cada onda hace cuando nos atraviesa es una integral, cuyo valor es la diferencia de intensidad con la que la onda sale después de habernos atravesado respecto de la que tenía al entrar; lo que la máquina hace es adivinar el interior de nuestro cuerpo teniendo en cuenta los valores de todas esas integrales.

La física moderna nació con Newton, y no es por casualidad que Newton sea también uno de los inventores del cálculo infinitesimal. De hecho, el cálculo infinitesimal fue el aliado que permitió a Newton culminar en su obra cumbre, los *Principia*, la revolución astronómica que inició Copérnico siglo y medio antes. Leibniz y sus discípulos también utilizaron el cálculo para resolver muchos y diversos problemas mecánicos que hasta entonces se habían mostrado intratables, incluso para genios de la talla de Leonardo da Vinci o Galileo.

Elementos Básicos del Cálculo Integral (10)

Por: Prof. Rafael Ascanio Hernández - Prof. Próspero González Méndez

ÍNDICE

Integral Indefinida. Las Técnicas de Integración.

Resolución de integrales por Sustituciones Trigonómicas. Descripción del proceso de aplicación de la técnica.

Ejercicios resueltos. Ejercicios propuestos

INTEGRAL INDEFINIDA. LAS TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN.

RESOLUCIÓN DE INTEGRALES POR SUSTITUCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

Descripción del proceso de aplicación de la técnica.-

Esta técnica permite dar solución a integrales que presentan un factor irracional, cambiando esta expresión por otra que contiene funciones trigonométricas. Es decir, que con este procedimiento se eliminan los radicales del integrando.

Algunas integrales se pueden simplificar si se hacen las siguientes sustituciones:

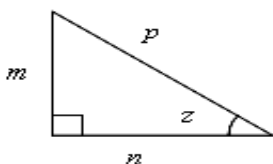
1. Si un integrando contiene $\sqrt{a^2 - x^2}$, se hace $x = a \cdot \text{Sen } z$, con $-\frac{\pi}{2} \leq z \leq \frac{\pi}{2}$.
2. Si un integrando contiene $\sqrt{a^2 + x^2}$, se hace $x = a \cdot \text{Tg } z$, con $0 \leq z \leq \frac{\pi}{2}$ ó $\pi \leq z \leq \frac{3\pi}{2}$.
3. Si un integrando contiene $\sqrt{x^2 - a^2}$, se hace $x = a \cdot \text{Sec } z$, con $0 \leq z \leq \frac{\pi}{2}$ ó $\pi \leq z \leq \frac{3\pi}{2}$.

Por lo general, cuando un integrando contiene como único factor irracional expresiones de la forma: $\sqrt{a^2 - b^2 u^2}$, $\sqrt{a^2 + b^2 u^2}$, $\sqrt{b^2 u^2 - a^2}$, se puede transformar en otro que contenga funciones trigonométricas de una nueva variable de la siguiente manera:

1. Si es $\sqrt{a^2 - b^2 u^2}$, se hace el cambio $u = \frac{a}{b} \cdot \text{Sen } z$ para obtener $a \cdot \sqrt{1 - \text{Sen}^2 z} = a \cdot \text{Cos } z$, con restricción para la nueva variable z de $-\frac{\pi}{2} \leq z \leq \frac{\pi}{2}$.
2. Si es $\sqrt{a^2 + b^2 u^2}$, se hace el cambio $u = \frac{a}{b} \cdot \text{Tg } z$ para obtener $a \cdot \sqrt{1 + \text{Tg}^2 z} = a \cdot \text{Sec } z$, con restricción para la nueva variable z de $0 \leq z \leq \frac{\pi}{2}$ ó $\pi \leq z \leq \frac{3\pi}{2}$.
3. Si es $\sqrt{b^2 u^2 - a^2}$, se hace el cambio $u = \frac{a}{b} \cdot \text{Sec } z$ para obtener $a \cdot \sqrt{\text{Sec}^2 z - 1} = a \cdot \text{Tg } z$, con restricción para la nueva variable z de $0 \leq z \leq \frac{\pi}{2}$ ó $\pi \leq z \leq \frac{3\pi}{2}$.

Además de las identidades trigonométricas, también se utilizan el Teorema de Pitágoras sobre triángulos rectángulos, las razones trigonométricas relacionadas con los ángulos agudos internos de dichos triángulos y las razones arcos.

Teorema de Pitágoras: $p^2 = m^2 + n^2$



Razones Trigonómicas de z:

$$\text{Sen } z = \frac{m}{p} \quad \left(\text{Cosec } z = \frac{p}{m} \right)$$

$$\text{Cos } z = \frac{n}{p} \quad \left(\text{Sec } z = \frac{p}{n} \right)$$

$$\text{Tg } z = \frac{m}{n} \quad \left(\text{Cotg } z = \frac{n}{m} \right)$$

Razones arcos:

$$z = \text{ArcSen} \left(\frac{m}{p} \right) = \text{Sen}^{-1} \left(\frac{m}{p} \right)$$

$$z = \text{ArcCos} \left(\frac{n}{p} \right) = \text{Cos}^{-1} \left(\frac{n}{p} \right)$$

$$z = \text{ArcTg} \left(\frac{m}{n} \right) = \text{Tg}^{-1} \left(\frac{m}{n} \right)$$

Deben considerarse también, las razones arcos de los inversos numéricos.

Las razones arcos se pueden utilizar para obtener los valores de los ángulos. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplos.-

a) Si se tiene que $\text{Sen } z = 0,35$; entonces $\text{ArcSen}(\text{Sen } z) = \text{ArcSen}(0,35)$, siendo $z = \text{ArcSen}(0,35)$ ó $z = \text{Sen}^{-1}(0,35)$

b) Si se tiene que $\text{Cos } z = \frac{1}{5}$; entonces $\text{ArcCos}(\text{Cos } z) = \text{ArcCos}\left(\frac{1}{5}\right)$, siendo $z = \text{ArcCos}\left(\frac{1}{5}\right)$ ó $z = \text{Cos}^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)$

c) Si se tiene que $\text{Tg } z = 0,17$; entonces $\text{ArcTg}(\text{Tg } z) = \text{ArcTg}(0,17)$, siendo $z = \text{ArcTg}(0,17)$ ó $z = \text{Tg}^{-1}(0,17)$

Ejercicios resueltos.-

1. - Obtener $\int \frac{dx}{\sqrt{6+x^2}}$.

Solución:

Resolviendo la integral. Se hace el estudio correspondiente.

Forma:

$$\sqrt{6+x^2} \equiv \sqrt{a^2+x^2}$$

$$a^2 = 6 \Rightarrow a = \sqrt{6}$$

Cambio:

$$x = a \cdot Tg z \Rightarrow x = \sqrt{6} \cdot Tg z \Rightarrow dx = \sqrt{6} \cdot Sec^2 z dz$$

Sustituyendo:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{6+x^2}} = \int \frac{\sqrt{6} \cdot Sec^2 z dz}{\sqrt{6+(\sqrt{6} \cdot Tg z)^2}} = \int \frac{\sqrt{6} \cdot Sec^2 z dz}{\sqrt{6+6Tg^2 z}} = \int \frac{\sqrt{6} \cdot Sec^2 z dz}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{1+Tg^2 z}} = \int \frac{Sec^2 z dz}{\sqrt{1+Tg^2 z}} = \int Sec z dz = Ln|Sec z + Tg z| + C = (*)$$

Devolviendo la sustitución. Esto se hace para conocer el valor de Sec z y Tg z.

Por el cambio inicial se tiene que $x = \sqrt{6} \cdot Tg z$. Por lo que: $Tg z = \frac{x}{\sqrt{6}}$

Por identidades trigonométricas: $Sec z = \sqrt{1+Tg^2 z}$.

Así que: $Sec z = \sqrt{1+Tg^2 z} = \sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{6}}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{6}} = \sqrt{\frac{6+x^2}{6}} = \frac{\sqrt{6+x^2}}{\sqrt{6}} \Rightarrow Sec z = \frac{\sqrt{6+x^2}}{\sqrt{6}}$

Por lo tanto, volviendo a (*), se tiene que:

$$(*) = Ln \left| \frac{\sqrt{6+x^2}}{\sqrt{6}} + \frac{x}{\sqrt{6}} \right| + C = Ln \left| \frac{\sqrt{6+x^2} + x}{\sqrt{6}} \right| + C = Ln |\sqrt{6+x^2} + x| - Ln |\sqrt{6}| + C = Ln |\sqrt{6+x^2} + x| + C$$

2.- Obtener $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-5}}$.

Solución:

Resolviendo la integral. Se hace el estudio correspondiente.

Forma:

$$\sqrt{x^2-5} \equiv \sqrt{x^2-a^2}$$

$$a^2 = 5 \Rightarrow a = \sqrt{5}$$

Cambio:

$$x = a \cdot Sec z \Rightarrow x = \sqrt{5} Sec z \Rightarrow dx = \sqrt{5} Sec z \cdot Tg z dz$$

Sustituyendo:

$$I = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-5}} = \int \frac{\sqrt{5} Sec z \cdot \sqrt{5} Sec z \cdot Tg z \cdot dz}{\sqrt{(\sqrt{5} Sec z)^2 - 5}} = \int \frac{(\sqrt{5})^2 Sec^2 z \cdot Tg z dz}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{Sec^2 z - 1}} = \int \frac{\sqrt{5} \cdot Sec^2 z \cdot Tg z dz}{Tg z} = \sqrt{5} \int Sec^2 z \cdot dz = \sqrt{5} Tg z + C = (*)$$

Devolviendo el cambio para hallar el valor de Tg z:

Por el cambio inicial, se tiene que $x = \sqrt{5} Sec z$. Por lo que: $Sec z = \frac{x}{\sqrt{5}}$.

Por identidades trigonométricas: $Tg z = \sqrt{Sec^2 z - 1}$.

Entonces: $Tg z = \sqrt{Sec^2 z - 1} = \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{x^2}{5} - 1} = \sqrt{\frac{x^2 - 5}{5}} = \frac{\sqrt{x^2 - 5}}{\sqrt{5}} \Rightarrow Tg z = \frac{\sqrt{x^2 - 5}}{\sqrt{5}}$

Por lo tanto, en (*):

$$(*) = \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{x^2-5}}{\sqrt{5}} + C = \sqrt{x^2-5} + C$$

3. - Obtener $\int \frac{\sqrt{x^2-9}dx}{x}$.

Solución:

Resolviendo la integral. Se hace el estudio correspondiente.

Forma: $\sqrt{x^2-9} \equiv \sqrt{x^2-a^2}$ $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$	Cambio: $x = a \cdot \text{Sec}z \Rightarrow x = 3\text{Sec}z \quad \Rightarrow dx = 3\text{Sec}z \cdot \text{Tgz}dz$
---	--

Sustituyendo:

$$I = \int \frac{\sqrt{x^2-9}dx}{x} = \int \frac{\sqrt{(3\text{Sec}z)^2-9} \cdot 3\text{Sec}z \cdot \text{Tgz} \cdot dz}{3\text{Sec}z} = \int \frac{\sqrt{9\text{Sec}^2z-9} \cdot 3\text{Sec}z \cdot \text{Tgz} \cdot dz}{3\text{Sec}z} = \int \frac{3\sqrt{\text{Sec}^2z-1} \cdot 3\text{Sec}z \cdot \text{Tgz} \cdot dz}{3\text{Sec}z} =$$

$$= \int \frac{3\text{Tgz} \cdot 3\text{Sec}z \cdot \text{Tgz} \cdot dz}{3\text{Sec}z} = 3 \int \text{Tgz}^2 dz = 3 \int (\text{Sec}^2z - 1) dz = 3 \int \text{Sec}^2z dz - 3 \int dz = 3\text{Tgz} - 3z + C = (*)$$

Devolviendo el cambio para hallar el valor de z y Tgz:

Por el cambio inicial, se tiene que $x = 3\text{Sec}z$. Despejando a z: $z = \text{ArcSec}\left(\frac{x}{3}\right)$

Como se tiene que:

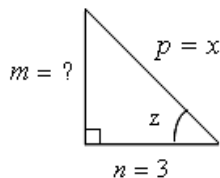
$$x = 3\text{Sec}z$$

Entonces:

$$\text{Sec}z = \frac{x}{3}$$

En el triángulo rectángulo: $\text{Sec}z = \frac{p}{n}$.

Luego:



Por Teorema de Pitágoras:

$$x^2 = m^2 + 3^2$$

$$x^2 = m^2 + 9$$

$$m^2 = x^2 - 9$$

$$m = \sqrt{x^2 - 9}$$

Como $\text{Tgz} = \frac{m}{n} \Rightarrow \text{Tgz} = \frac{\sqrt{x^2-9}}{3}$

Por lo tanto, en (*):

$$(*) = 3 \cdot \frac{\sqrt{x^2-9}}{3} - 3\text{ArcSec}\left(\frac{x}{3}\right) + C = \sqrt{x^2-9} - 3\text{ArcSec}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

4.- Comprobar que $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}} = \frac{1}{9}\sqrt{\frac{x^2-9}{x^2}} + C$.

Comprobación:

Resolviendo la integral. Se hace el estudio correspondiente.

Forma: $\sqrt{x^2-9} \equiv \sqrt{x^2-a^2}$ $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$	Cambio: $x = a \cdot \text{Sec}z \Rightarrow x = 3\text{Sec}z \quad \Rightarrow dx = 3\text{Sec}z \cdot \text{Tgz}dz$
---	--

Sustituyendo:

$$I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}} = \int \frac{3\text{Sec}z \cdot \text{Tgz} \cdot dz}{9\text{Sec}^2z \cdot \sqrt{(3\text{Sec}z)^2-9}} = \int \frac{3\text{Sec}z \cdot \text{Tgz} \cdot dz}{9\text{Sec}^2z \cdot \sqrt{9\text{Sec}^2z-9}} = \int \frac{3\text{Sec}z \cdot \text{Tgz} \cdot dz}{9\text{Sec}^2z \cdot 3\sqrt{\text{Sec}^2z-1}} =$$

$$= \int \frac{3\text{Sec}z \cdot \text{Tgz} \cdot dz}{9\text{Sec}^2z \cdot 3\text{Tgz}} = \frac{1}{9} \int \frac{dz}{\text{Sec}z} = \frac{1}{9} \int \text{Cos}z dz = \frac{1}{9} \text{Sen}z + C = (*)$$

Devolviendo el cambio para hallar el valor de $\text{Sen } z$:

$$\text{Sen } z = ?$$

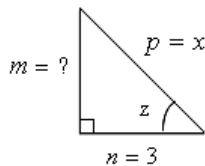
$$x = 3\text{Sec}z \Rightarrow \text{Sec}z = \frac{x}{3}$$

Como se tiene que:

$$\text{Sec}z = \frac{p}{n}$$

Entonces, se tiene que: $\text{Sen}z = \frac{m}{p} \Rightarrow$

Luego:



$$\boxed{\text{Sen}z = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x}}$$

Por Teorema de Pitágoras:

$$x^2 = m^2 + 3^2$$

$$x^2 = m^2 + 9$$

$$m^2 = x^2 - 9$$

$$m = \sqrt{x^2 - 9}$$

Por lo tanto, en (*):

$$(*) = \frac{1}{9} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} + C = \frac{1}{9} \cdot \sqrt{\frac{x^2 - 9}{x^2}} + C \quad \text{L. Q. C.}$$

5.- Obtener $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 4}}$.

Solución:

Resolviendo la integral, haciendo el estudio correspondiente.

Forma:

$$\sqrt{x^2 - 4} \equiv \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$$

Cambio:

$$x = a \cdot \text{Sec}z \Rightarrow x = 2\text{Sec}z \quad \Rightarrow dx = 2\text{Tgz} \cdot \text{Sec}z \cdot dz$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 4}} = \int \frac{4\text{Sec}^2 z \cdot 2\text{Sec}z \cdot \text{Tgz} \cdot dz}{\sqrt{(2\text{Sec}z)^2 - 4}} = \int \frac{4\text{Sec}^2 z \cdot 2\text{Sec}z \cdot \text{Tgz} \cdot dz}{\sqrt{4\text{Sec}^2 z - 4}} = \int \frac{4\text{Sec}^2 z \cdot 2\text{Sec}z \cdot \text{Tgz} \cdot dz}{2 \cdot \sqrt{\text{Sec}^2 z - 1}} \\ &= \int \frac{4\text{Sec}^2 z \cdot 2\text{Sec}z \cdot \text{Tgz} \cdot dz}{2\text{Tgz}} = 4 \int \text{Sec}^3 z \cdot dz = 4I_1 = (*) \end{aligned}$$

(I₁)

Integrando por partes a I₁.

Sustitución:

$$\begin{cases} u = \text{Sec}z \Rightarrow du = \text{Tgz} \cdot \text{Sec}z \cdot dz \\ dv = \text{Sec}^2 z dz \Rightarrow \int dv = \int \text{Sec}^2 z dz \Rightarrow v = \text{Tgz} + C \end{cases}$$

Luego:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \text{Sec}^2 z \cdot \text{Sec}z \cdot dz = u \cdot v - \int v \cdot du + C = \text{Sec}z \cdot \text{Tgz} - \int \text{Tgz} \cdot \text{Tgz} \cdot \text{Sec}z \cdot dz + C = \text{Sec}z \cdot \text{Tgz} - \int \text{Tg}^2 z \cdot \text{Sec}z \cdot dz + C = \\ &= \text{Sec}z \cdot \text{Tgz} - \int (\text{Sec}^2 z - 1) \cdot \text{Sec}z \cdot dz + C = \text{Sec}z \cdot \text{Tgz} - \int \text{Sec}^3 z \cdot dz + \int \text{Sec}z \cdot dz + C = \text{Sec}z \cdot \text{Tgz} - \int \text{Sec}^3 z \cdot dz + \text{Ln}|\text{Sec}z + \text{Tgz}| + C = \\ &= \text{Sec}z \cdot \text{Tgz} - I_1 + \text{Ln}|\text{Sec}z + \text{Tgz}| + C. \end{aligned}$$

(I₁)

Es decir: $I_1 = \text{Sec}z \cdot \text{Tgz} - I_1 + \text{Ln}|\text{Sec}z + \text{Tgz}| + C_1$ (Integral cíclica)

Despejando a I₁:

$$I_1 = \text{Sec}z \cdot \text{Tgz} - I_1 + \text{Ln}|\text{Sec}z + \text{Tgz}| + C_1$$

$$2I_1 = \text{Sec}z \cdot \text{Tgz} + \text{Ln}|\text{Sec}z + \text{Tgz}| + C_1 \Rightarrow I_1 = \int \text{Sec}^3 z dz = \frac{1}{2} \text{Sec}z \cdot \text{Tgz} + \frac{1}{2} \text{Ln}|\text{Sec}z + \text{Tgz}| + C_1$$

Como en (*), $I = 4I_1$, entonces:

$$I = 4I_1 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \text{Sec}z \cdot \text{Tgz} + \frac{1}{2} \text{Ln}|\text{Sec}z + \text{Tgz}| \right) + C = 2\text{Sec}z \cdot \text{Tgz} + 2\text{Ln}|\text{Sec}z + \text{Tgz}| + C = (**)$$

Devolviendo el cambio para obtener el valor de $Secz$ y Tgz :

$$Secz = ? = \frac{p}{n}$$

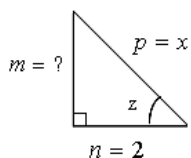
$$Tgz = ? = \frac{m}{n}$$

Como $x = 2Secz \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{Secz = \frac{x}{2}}$$

pero $Secz = \frac{p}{n}$

Luego:



Por Teorema de Pitágoras:

$$x^2 = m^2 + 2^2$$

$$x^2 = m^2 + 4$$

$$m^2 = x^2 - 4$$

$$m = \sqrt{x^2 - 4}$$

Así se tiene que: $Tgz = \frac{m}{n} \Rightarrow$

$$\boxed{Tgz = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2}}$$

Por lo que en (**):

$$I = 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2} + 2Ln \left| \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2} \right| + C = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 4} + 2Ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2} \right| + C = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 4} + 2Ln |x + \sqrt{x^2 - 4}| - 2Ln 2 + C = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 4} + 2Ln |x + \sqrt{x^2 - 4}| + C$$

6.- Calcule $\int \frac{dx}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Solución:

Resolviendo la integral. Transformando la potencia fraccionaria en raíz:

$$I = \int \frac{dx}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dx}{(\sqrt{9-x^2})^3} = (*)$$

Ahora se hace el estudio correspondiente.

Forma:

$$\sqrt{9-x^2} \equiv \sqrt{a^2-x^2}$$

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

Cambio:

$$x = a \cdot Senz \Rightarrow x = 3Senz \quad \Rightarrow dx = 3Cosz dz$$

Sustituyendo en (*):

$$(*) = I = \int \frac{dx}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dx}{(\sqrt{9-x^2})^3} = \int \frac{3Cosz dz}{(\sqrt{9-(3Senz)^2})^3} = \int \frac{3Cosz dz}{(\sqrt{9-9Sen^2 z})^3} = \int \frac{3Cosz dz}{(\sqrt{9} \cdot \sqrt{1-Sen^2 z})^3} = \int \frac{3Cosz dz}{(3Cosz)^3} = \int \frac{3Cosz dz}{27Cos^3 z} = \int \frac{dz}{9Cos^2 z} = \frac{1}{9} \int \frac{dz}{Cos^2 z} = \frac{1}{9} \int Sec^2 z dz = \frac{1}{9} Tgz + C = (**)$$

Devolviendo el cambio para conseguir el valor de $Tg z$:

$$Tgz = ? = \frac{m}{n}$$

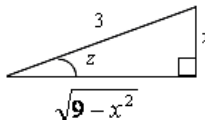
Como: $x = 3Senz$

Entonces: $Senz = \frac{x}{3} = \frac{m}{p}$

Por Teorema de Pitágoras:

$$3^2 = x^2 + n^2 \Rightarrow n = \sqrt{9-x^2}$$

Luego:



Entonces se tiene que: $Tgz = \frac{m}{n} = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} \Rightarrow$

$$\boxed{Tgz = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}}$$

Por lo que en (**):

$$(**) = \frac{1}{9} Tgz + C = \frac{1}{9} \cdot \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} + C$$

7.- Obtenga $\int \frac{dz}{z(z^2-16)^2}$.

Solución:

Nota: Como la variable presentada en la integral es z , para evitar confusión se denotará al ángulo con θ . Además, si se ha de aplicar la técnica de Sustitución Trigonométrica, aunque no es necesario, se puede reescribir la integral de la siguiente manera:

$$I = \int \frac{dz}{z(z^2-16)^2} = \int \frac{dz}{z(\sqrt{z^2-16})^4}$$

Ahora se hace el estudio correspondiente.

Forma:

$$\sqrt{z^2-16} \equiv \sqrt{z^2-a^2}$$

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$$

Cambio:

$$z = a \cdot \text{Sec}\theta \Rightarrow z = 4\text{Sec}\theta \Rightarrow dz = 4\text{Sec}\theta \cdot \text{Tg}\theta d\theta$$

Sustituyendo en I:

$$I = \int \frac{dz}{z(z^2-16)^2} = \int \frac{dz}{z(\sqrt{z^2-16})^4} = \int \frac{4\text{Sec}\theta \text{Tg}\theta d\theta}{4\text{Sec}\theta \cdot (\sqrt{(4\text{Sec}\theta)^2-16})^4} = \int \frac{4\text{Sec}\theta \text{Tg}\theta d\theta}{4\text{Sec}\theta \cdot (\sqrt{16\text{Sec}^2\theta-16})^4} = \int \frac{4\text{Sec}\theta \text{Tg}\theta d\theta}{4\text{Sec}\theta \cdot (4 \cdot \sqrt{\text{Sec}^2\theta-1})^4} =$$

$$= \int \frac{4\text{Sec}\theta \text{Tg}\theta d\theta}{4\text{Sec}\theta (4 \cdot \text{Tg}\theta)^4} = \int \frac{\text{Tg}\theta d\theta}{256 \cdot \text{Tg}^4\theta} = \frac{1}{256} \int \frac{d\theta}{\text{Tg}^3\theta} = \frac{1}{256} \int \text{Cotg}^3\theta d\theta = \frac{1}{256} \int \text{Cotg}\theta \cdot \text{Cotg}^2\theta d\theta = \frac{1}{256} \int \text{Cotg}\theta (\text{Cosec}^2\theta-1) d\theta =$$

$$= \frac{1}{256} \left(\int \text{Cotg}\theta \cdot \text{Cosec}^2\theta d\theta - \int \text{Cotg}\theta d\theta \right) = \frac{1}{256} \int \text{Cotg}\theta \cdot \text{Cosec}^2\theta d\theta - \frac{1}{256} \int \text{Cotg}\theta d\theta = -\frac{1}{512} \text{Cotg}^2\theta - \frac{1}{256} \text{Ln}|\text{Sen}\theta| + C = (*)$$

Devolviendo el cambio para obtener el valor de $\text{Cotg}\theta$ y $\text{Sen}\theta$:

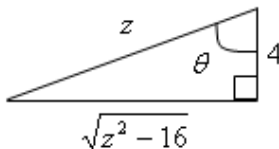
$$\text{Sen}\theta = ? = \frac{m}{p}$$

$$\text{Cotg}\theta = ? = \frac{n}{m}$$

Como $z = 4\text{Sec}\theta \Rightarrow \boxed{\text{Sec}\theta = \frac{z}{4}}$

pero $\text{Sec}\theta = \frac{p}{n}$

Luego:



Por Teorema de Pitágoras:

$$z^2 = m^2 + 4^2$$

$$z^2 = m^2 + 16$$

$$m^2 = z^2 - 16$$

$$m = \sqrt{z^2 - 16}$$

Entonces se tiene que:

$$\text{Cotg}\theta = \frac{n}{m} = \frac{4}{\sqrt{z^2-16}} \Rightarrow \boxed{\text{Cotg}\theta = \frac{4}{\sqrt{z^2-16}}}$$

$$\text{Sen}\theta = \frac{m}{p} = \frac{\sqrt{z^2-16}}{z} \Rightarrow \boxed{\text{Sen}\theta = \frac{\sqrt{z^2-16}}{z}}$$

Volviendo a (*):

$$(*) = I = -\frac{1}{512} \text{Cotg}^2\theta - \frac{1}{256} \text{Ln}|\text{Sen}\theta| + C = -\frac{1}{512} \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{z^2-16}} \right)^2 - \frac{1}{256} \text{Ln} \left| \frac{\sqrt{z^2-16}}{z} \right| + C = -\frac{1}{512} \cdot \frac{16}{z^2-16} - \frac{1}{256} \text{Ln} \left| \frac{\sqrt{z^2-16}}{z} \right| + C =$$

$$= -\frac{1}{32 \cdot (z^2-16)} - \frac{1}{256} \text{Ln} \left| \frac{\sqrt{z^2-16}}{z} \right| + C$$

8.- Determinar $\int \frac{dw}{(w^2+25)^{\frac{3}{2}}}$.

Solución:

Resolviendo la integral. Transformando la potencia fraccionaria en raíz:

$$I = \int \frac{dw}{(w^2+25)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dw}{(\sqrt{w^2+25})^3} = (*)$$

Ahora se hace el estudio correspondiente.

Forma:

$$\sqrt{w^2 + 25} \equiv \sqrt{w^2 + a^2}$$

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

Cambio:

$$w = a \cdot \text{Tgz} z \Rightarrow w = 5 \cdot \text{Tgz} z \Rightarrow dw = 5 \text{Sec}^2 z dz$$

Sustituyendo en (*):

$$(*) = \int \frac{dw}{(w^2 + 25)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dw}{(\sqrt{w^2 + 25})^3} = \int \frac{5 \text{Sec}^2 z dz}{(\sqrt{(5 \text{Tgz} z)^2 + 25})^3} = \int \frac{5 \text{Sec}^2 z dz}{(\sqrt{25 \text{Tg}^2 z + 25})^3} = \int \frac{5 \text{Sec}^2 z dz}{(\sqrt{25 \cdot \text{Tg}^2 z + 1})^3} =$$

$$= \int \frac{5 \text{Sec}^2 z dz}{(5 \cdot \text{Sec} z)^3} = \int \frac{5 \text{Sec}^2 z dz}{125 \text{Sec}^3 z} = \frac{1}{25} \int \frac{dz}{\text{Sec} z} = \frac{1}{25} \int \text{Cos} z dz = \frac{1}{25} \text{Sen} z + C = (**)$$

Devolviendo el cambio para conseguir el valor de Sen Z:

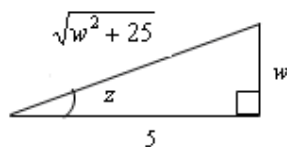
$$\text{Sen} z = ? = \frac{m}{p}$$

Como $w = 5 \text{Tgz} z \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Tgz} z = \frac{w}{5}}$$

pero $\text{Tgz} z = \frac{m}{n}$

Luego:



Por Teorema de Pitágoras:

$$p^2 = m^2 + n^2$$

$$p^2 = w^2 + 5^2$$

$$p = \sqrt{w^2 + 25}$$

Entonces, se tiene que:

$$\text{Sen} z = \frac{m}{p} = \frac{w}{\sqrt{w^2 + 25}} \Rightarrow \boxed{\text{Sen} z = \frac{w}{\sqrt{w^2 + 25}}}$$

Volviendo a (**):

$$(**) = I = \frac{1}{25} \text{Sen} z + C = \frac{1}{25} \cdot \frac{w}{\sqrt{w^2 + 25}} + C$$

9.- Compruebe si $\int \frac{dx}{25 - 5x^2} = \frac{\sqrt{5}}{25} \text{Ln} \left| \frac{\sqrt{5} + x}{\sqrt{5} - x^2} \right| + C$.

Comprobando:

Resolviendo la integral. Se reescribe el integrando de tal forma que se pueda aplicar la integración por sustituciones trigonométricas:

$$I = \int \frac{dx}{25 - 5x^2} = \int \frac{dx}{5 \cdot (5 - x^2)} = \frac{1}{5} \int \frac{dx}{(\sqrt{5 - x^2})^2} = (*)$$

Ahora se realiza el estudio correspondiente:

Forma:

$$\sqrt{5 - x^2} \equiv \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$a^2 = 5 \Rightarrow a = \sqrt{5}$$

Cambio:

$$x = a \text{Sen} Z \Rightarrow x = \sqrt{5} \text{Sen} Z \Rightarrow dx = \sqrt{5} \text{Cos} Z dz$$

Volviendo a (*) para aplicar el cambio:

$$(*) = I = \frac{1}{5} \int \frac{dx}{(\sqrt{5 - x^2})^2} = \frac{1}{5} \int \frac{\sqrt{5} \text{Cos} z dz}{(\sqrt{5 - 5 \text{Sen}^2 z})^2} = \frac{1}{5} \int \frac{\sqrt{5} \text{Cos} z dz}{(\sqrt{5 \cdot (1 - \text{Sen}^2 z)})^2} = \frac{\sqrt{5}}{25} \int \frac{\text{Cos} z dz}{(\sqrt{\text{Cos}^2 z})^2} = \frac{\sqrt{5}}{25} \int \frac{\text{Cos} z dz}{\text{Cos}^2 z} = \frac{\sqrt{5}}{25} \int \frac{dz}{\text{Cos} z} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{25} \int \text{Sec} z dz = \frac{\sqrt{5}}{25} \cdot \text{Ln} | \text{Sec} z + \text{Tg} z | + C = (**)$$

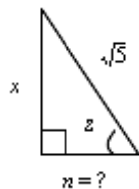
Devolviendo el cambio para conocer los valores de $Sec z \wedge Tg z$:

Por el cambio inicial se conoce que:

$$x = \sqrt{5} SenZ$$

$$Sen z = \frac{x}{\sqrt{5}}$$

En el triángulo rectángulo se tiene entonces:



Por Teorema de Pitágoras:

$$p^2 = m^2 + n^2$$

$$n = \sqrt{p^2 - m^2}$$

$$n = \sqrt{5 - x^2}$$

Luego:

$$Sec z = \frac{p}{n} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5-x^2}} \wedge Tg z = \frac{m}{n} = \frac{x}{\sqrt{5-x^2}}$$

Volviendo a (**):

$$(**) = I = \frac{\sqrt{5}}{25} \cdot Ln | Sec z + Tg z | + C = \frac{\sqrt{5}}{25} \cdot Ln \left| \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{5-x^2}} \right| + C = \frac{\sqrt{5}}{25} \cdot Ln \left| \frac{\sqrt{5+x}}{\sqrt{5-x^2}} \right| + C$$

L. Q. Q. C.

10.- Hallar $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$.

Solución:

Se resuelve la integral comenzando con el estudio correspondiente.

Forma:

$$\sqrt{2-3x^2} \equiv \sqrt{a^2 - b^2 u^2}$$

$$a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

$$b^2 = 3 \Rightarrow b = \sqrt{3}$$

$$u^2 = x \Rightarrow u = x$$

Cambio:

$$u = \frac{a}{b} \cdot Senz \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot Senz$$

$$dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot Cosz dz$$

Aplicando el cambio:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}} = \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} Cosz dz}{\sqrt{2-3 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot Senz\right)^2}} = \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} Cosz dz}{\sqrt{2-3 \cdot \frac{2}{3} Sen^2 z}} = \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} Cosz dz}{\sqrt{2-2 Sen^2 z}} = \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} Cosz dz}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1-Sen^2 z}} = \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} Cosz dz}{\sqrt{2} \cdot Cosz} = \int \frac{\sqrt{2} dz}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} =$$

$$= \int \frac{dz}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int dz = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot z + C = \frac{\sqrt{3}}{3} z + C = (*)$$

Devolviendo el cambio para determinar el valor de z:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot Senz \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} x = Senz \Rightarrow z = ArcSen \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} x \right) \Rightarrow z = ArcSen \left(\frac{\sqrt{6}}{2} x \right)$$

Por lo tanto, en (*):

$$I = \frac{\sqrt{3}}{3} ArcSen \left(\frac{\sqrt{6}}{2} x \right) + C$$

11. - Evaluar $\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{9-3x^2}}$.

Solución:

Se resuelve la integral haciendo el respectivo estudio.

Forma:

$$\begin{aligned} \sqrt{9-3x^2} &\equiv \sqrt{a^2-b^2x^2} \\ a^2 = 9 &\Rightarrow a = 3 \\ b^2 = 3 &\Rightarrow b = \sqrt{3} \\ u^2 = x^2 &\Rightarrow u = x \end{aligned}$$

Cambio:

$$\begin{aligned} u &= \frac{a}{b} \cdot \text{Sen}z \Rightarrow x = \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \text{Sen}z \\ dx &= \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \text{Cos}z dz \end{aligned}$$

Sustituyendo en I:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{9-3x^2}} = \int \frac{\left(\frac{3}{\sqrt{3}} \text{Sen}z - 2\right) \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} \text{Cos}z \cdot dz}{\sqrt{9-3 \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{3}} \text{Sen}z\right)^2}} = \int \frac{\left(\frac{3}{\sqrt{3}} \text{Sen}z - 2\right) \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} \text{Cos}z \cdot dz}{\sqrt{9-9\text{Sen}^2z}} = \int \frac{\left(\frac{3}{\sqrt{3}} \text{Sen}z - 2\right) \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} \text{Cos}z \cdot dz}{\sqrt{9 \cdot \sqrt{1-\text{Sen}^2z}}} = \int \frac{\left(\frac{3}{\sqrt{3}} \text{Sen}z - 2\right) \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} \text{Cos}z \cdot dz}{3\text{Cos}z} = \\ &= \int \left(\frac{3}{\sqrt{3}} \text{Sen}z - 2\right) \cdot \frac{3}{3\sqrt{3}} dz = \int \left[\frac{3}{(\sqrt{3})^2} \text{Sen}z - \frac{2}{\sqrt{3}}\right] \cdot dz = \int \left(\text{Sen}z - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) dz = \int \text{Sen}z dz - \frac{2}{\sqrt{3}} \int dz = -\text{Cos}z - \frac{2}{\sqrt{3}} z + C = (*) \end{aligned}$$

Devolviendo la sustitución para obtener los valores de z y Cosz:

z = ?

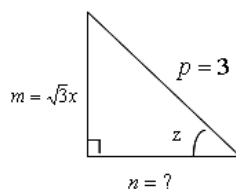
Cosz = ? = $\frac{n}{p}$

como $x = \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \text{Sen}z \Rightarrow \text{Sen}z = \frac{\sqrt{3}x}{3}$

$\Rightarrow z = \text{ArcSen}\left(\frac{\sqrt{3}x}{3}\right)$

pero $\text{Sen}z = \frac{m}{p}$.

Luego:



Por Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} 3^2 &= (\sqrt{3}x)^2 + n^2 \\ 9 &= 3x^2 + n^2 \\ n^2 &= 9 - 3x^2 \\ n &= \sqrt{9 - 3x^2} \end{aligned}$$

Entonces, se tiene que:

$\text{Cos}z = \frac{n}{p} \Rightarrow \text{Cos}z = \frac{\sqrt{9-3x^2}}{3}$

Por lo tanto, en (*):

$I = -\frac{\sqrt{9-3x^2}}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ArcSen}\left(\frac{\sqrt{3}x}{3}\right) + C$

12. - Resolver $\int \frac{xdx}{\sqrt{5+2x^2}}$.

Solución:

Resolviendo la integral comenzando por hacer el estudio correspondiente.

Forma:

$$\begin{aligned} \sqrt{5+2x^2} &\equiv \sqrt{a^2+b^2x^2} \\ a^2 = 5 &\Rightarrow a = \sqrt{5} \\ b^2 = 2 &\Rightarrow b = \sqrt{2} \\ u^2 = x^2 &\Rightarrow u = x \end{aligned}$$

Cambio:

$$\begin{aligned} u &= \frac{a}{b} \cdot \text{Tgz}z \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \cdot \text{Tgz}z \\ dx &= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \cdot \text{Sec}^2z dz \end{aligned}$$

Sustituyendo en I:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{xdx}{\sqrt{5+2x^2}} = \int \frac{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \text{Tgz}z \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \text{Sec}^2z dz}{\sqrt{5+2 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \text{Tgz}z\right)^2}} = \int \frac{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \text{Tgz}z \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \text{Sec}^2z dz}{\sqrt{5+5\text{Tgz}^2z}} = \int \frac{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \text{Tgz}z \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \text{Sec}^2z dz}{\sqrt{5 \cdot \sqrt{1+\text{Tgz}^2z}}} = \int \frac{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \text{Tgz}z \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \text{Sec}^2z dz}{\sqrt{5}\text{Sec}z} = \\ &= \int \frac{\frac{5}{2} \text{Tgz}z \cdot \text{Sec}z dz}{\sqrt{5}} = \frac{5}{2\sqrt{5}} \int \text{Tgz}z \cdot \text{Sec}z dz = \frac{5}{2\sqrt{5}} \text{Sec}z + C = (*) \end{aligned}$$

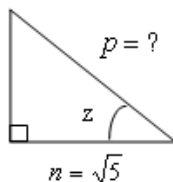
Devolviendo la sustitución para obtener el valor de $\text{Sec}z$:

Como $x = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \text{Tgz} \Rightarrow \text{Tgz} = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{5}}$

pero como $\text{Tgz} = \frac{m}{n}$

Luego:

$m = \sqrt{2}x$



Por Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} p^2 &= (\sqrt{2}x)^2 + (\sqrt{5})^2 \\ p^2 &= 2x^2 + 5 \\ p^2 &= 5 + 2x^2 \\ p &= \sqrt{5 + 2x^2} \end{aligned}$$

Entonces, se tiene que: $\text{Sec}z = \frac{p}{n} \Rightarrow \text{Sec}z = \frac{\sqrt{5 + 2x^2}}{\sqrt{5}}$

Por lo que en (*): $I = \frac{5}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5 + 2x^2}}{\sqrt{5}} + C = \frac{5}{2 \cdot 5} \sqrt{5 + 2x^2} + C = \frac{\sqrt{5 + 2x^2}}{2} + C$

13. - Hallar $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{6-7x^2}}$

Solución:

Resolviendo la integral; se hace el estudio correspondiente.

Forma:

$$\begin{aligned} \sqrt{6-7x^2} &\equiv \sqrt{a^2 - b^2u^2} \\ a^2 = 6 &\Rightarrow a = \sqrt{6} \\ b^2 = 7 &\Rightarrow b = \sqrt{7} \\ u^2 = x^2 &\Rightarrow u = x \end{aligned}$$

Cambio:

$$\begin{aligned} u &= \frac{a}{b} \cdot \text{Sen}z \Rightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \cdot \text{Sen}z \\ dx &= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \cdot \text{Cos}z dz \end{aligned}$$

Sustituyendo en I:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{6-7x^2}} = \int \frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \cdot \text{Sen}z + 1\right) \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \cdot \text{Cos}z dz}{\sqrt{6-7\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \cdot \text{Sen}z\right)^2}} = \int \frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \cdot \text{Sen}z + 1\right) \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \cdot \text{Cos}z dz}{\sqrt{6-6\text{Sen}^2z}} = \int \frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \cdot \text{Sen}z + 1\right) \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \cdot \text{Cos}z dz}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{1-\text{Sen}^2z}} = \\ &= \int \frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \cdot \text{Sen}z + 1\right) \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \cdot \text{Cos}z dz}{\sqrt{6} \cdot \text{Cos}z} = \int \left(\frac{\sqrt{6}}{7} \cdot \text{Sen}z + \frac{1}{\sqrt{7}}\right) dz = \int \left(\frac{\sqrt{6}}{7} \cdot \text{Sen}z + \frac{1}{\sqrt{7}}\right) dz = \frac{\sqrt{6}}{7} \int \text{Sen}z dz + \frac{1}{\sqrt{7}} \int dz = \\ &= \int \frac{\sqrt{6}}{7} \cdot \text{Sen}z dz + \int \frac{dz}{\sqrt{7}} = -\frac{\sqrt{6}}{7} \cdot \text{Cos}z + \frac{1}{\sqrt{7}} z + C = (*) \end{aligned}$$

Devolviendo el cambio para obtener el valor de z y $\text{Cos}z$:

$\text{Cos}z = ? = \frac{n}{p}$

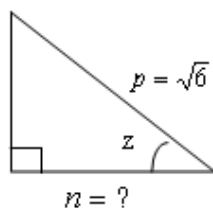
como $x = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \cdot \text{Sen}z \Rightarrow \text{Sen}z = \frac{\sqrt{7}x}{\sqrt{6}}$

$z = \text{ArcSen}\left(\frac{\sqrt{7}x}{\sqrt{6}}\right)$

pero $\text{Sen}z = \frac{m}{p}$

Luego:

$m = \sqrt{7}x$



Por Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} (\sqrt{6})^2 &= (\sqrt{7}x)^2 + n^2 \\ 6 &= 7x^2 + n^2 \\ n^2 &= 6 - 7x^2 \\ n &= \sqrt{6 - 7x^2} \end{aligned}$$

Entonces, se tiene que: $\text{Cos}z = \frac{n}{p} \Rightarrow \text{Cos}z = \frac{\sqrt{6-7x^2}}{\sqrt{6}}$

Por lo tanto, en (*):

$I = -\frac{\sqrt{6}}{7} \cdot \frac{\sqrt{6-7x^2}}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} \text{ArcSen}\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{6}}x\right) + C = -\frac{\sqrt{6-7x^2}}{7} + \frac{\sqrt{7}}{7} \text{ArcSen}\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{6}}x\right) + C$

14. - Hallar $\int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-3)^2}}$.

Solución:

Se resuelve la integral haciendo el estudio correspondiente.

<p>Forma:</p> $\sqrt{4-(x-3)^2} \equiv \sqrt{a^2-b^2u^2}$ $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$ $b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$ $u^2 = (x-3)^2 \Rightarrow u = x-3$	<p>Cambio:</p> $u = \frac{a}{b} \cdot \text{Sen}z \Rightarrow$ $\Rightarrow x-3 = 2\text{Sen}z$ $\Rightarrow x = 2\text{Sen}z + 3$ $dx = 2\text{Cos}z dz$
---	--

Sustituyendo:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-3)^2}} = \int \frac{2\text{Cos}z dz}{\sqrt{4-(2\text{Sen}z)^2}} = \int \frac{2\text{Cos}z dz}{\sqrt{4-4\text{Sen}^2z}} = \int \frac{2\text{Cos}z dz}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{1-\text{Sen}^2z}} = \int \frac{2\text{Cos}z dz}{2\text{Cos}z} = \int dz = z + C = (*)$$

Devolviendo el cambio para obtener el valor de z:

Como $x-3 = 2\text{Sen}z \Rightarrow \frac{x-3}{2} = \text{Sen}z \Rightarrow z = \text{ArcSen}\left(\frac{x-3}{2}\right)$

Por lo tanto, en (*): $I = \text{ArcSen}\left(\frac{x-3}{2}\right) + C$

15. - Obtener $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(x^2+6)-2}}$.

Solución:

Resolviendo la integral. Primero se reducen términos semejantes y se escribe la integral para expresarla de forma similar a una conocida:

$$I = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(x^2+6)-2}} = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+4}} = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{4+x^2}} = (*)$$

Ahora se hace el estudio.

<p>Forma:</p> $\sqrt{4+x^2} \equiv \sqrt{a^2+x^2}$ $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$	<p>Cambio:</p> $u = \frac{a}{b} \text{Tg}z \Rightarrow x = 2\text{Tg}z \Rightarrow dx = 2\text{Sec}^2z dz$
--	--

Sustituyendo en (*):

$$(*) = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(x^2+6)-2}} = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+4}} = \int \frac{8\text{Tg}^3z \cdot 2\text{Sec}^2z \cdot dz}{2\text{Sec}z} = 8 \int \text{Tg}^3z \cdot \text{Sec}z \cdot dz = 8 \int \text{Tg}^2z \cdot \text{Tg}z \cdot \text{Sec}z \cdot dz = 8 \int (\text{Sec}^2z - 1) \cdot \text{Tg}z \cdot \text{Sec}z \cdot dz =$$

$$= 8 \int \text{Sec}^2z \cdot \text{Tg}z \cdot \text{Sec}z \cdot dz - 8 \int \text{Tg}z \cdot \text{Sec}z \cdot dz = (**)$$

(I₁)

Cambio de variable para I₁: $a = \text{Sec}z \Rightarrow da = \text{Tg}z \cdot \text{Sec}z \cdot dz$

Volviendo a (**):

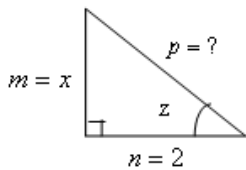
$$(**) = 8 \int a^2 da - 8\text{Sec}z + C = \frac{8}{3}a^3 - 8\text{Sec}z + C = \frac{8}{3}\text{Sec}^3z - 8\text{Sec}z + C = (***)$$

Devolviendo el cambio inicial para obtener el valor de $\text{Sec}z$:

Como $x = 2\text{Tgz} \Rightarrow \text{Tgz} = \frac{x}{2}$

pero $\text{Tgz} = \frac{m}{n}$

Luego:



Por Teorema de Pitágoras:

$$p^2 = x^2 + 2^2$$

$$p^2 = x^2 + 4$$

$$p = \sqrt{x^2 + 4}$$

Entonces, se tiene que: $\text{Sec}z = \frac{p}{n} \Rightarrow \text{Sec}z = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{2}$

Por lo que en (***) : $I = \frac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{(x^2 + 4)^3}}{8} - 8 \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{2} + C = \frac{\sqrt{(x^2 + 4)^3}}{3} - 4\sqrt{x^2 + 4} + C$

16.- Evalúe $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$

Solución:

Para resolver esta integral, es necesario completar cuadrados en el radicando. Así que:

$$x^2 + 2x - 3 = (x^2 + 2x) - 3 = (x^2 + 2x + 1 - 1) - 3 = (x^2 + 2x + 1) - 1 - 3 = (x + 1)^2 - 4$$

Luego, al reescribir la integral, queda:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2 - 4}} = (*)$$

Ahora se hace el estudio correspondiente:

Forma:

$$\sqrt{(x+1)^2 - 4} \equiv \sqrt{b^2u^2 - a^2}$$

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$$

$$u^2 = (x+1)^2 \Rightarrow u = x+1$$

Cambio:

$$u = \frac{a}{b} \text{Sec}z \Rightarrow x+1 = 2\text{Sec}z$$

$$\Rightarrow dx = 2\text{Sec}z \cdot \text{Tgz} dz$$

Sustituyendo en (*):

$$(*) = I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2 - 4}} = \int \frac{2\text{Sec}z \cdot \text{Tgz} dz}{\sqrt{(2\text{Sec}z)^2 - 4}} = \int \frac{2\text{Sec}z \cdot \text{Tgz} dz}{\sqrt{4\text{Sec}^2z - 4}} = \int \frac{2\text{Sec}z \cdot \text{Tgz} dz}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{\text{Sec}^2z - 1}} = \int \frac{2\text{Sec}z \cdot \text{Tgz} dz}{2\text{Tgz}} = \int \text{Sec}z dz = \text{Ln}|\text{Sec}z + \text{Tgz}| + C = (**)$$

Devolviendo el cambio para conseguir los valores de $\text{Sec}z$ y Tgz :

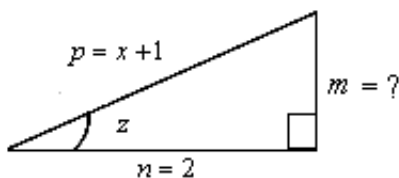
$$\text{Sec}z = ? = \frac{p}{n}$$

$$\text{Tgz} = ? = \frac{m}{n}$$

Como $x+1 = 2\text{Sec}z$

$$\Rightarrow \text{Sec}z = \frac{x+1}{2}$$

Luego:



Por Teorema de Pitágoras:

$$p^2 = m^2 + n^2$$

$$m^2 = p^2 - n^2$$

$$m = \sqrt{p^2 - n^2}$$

$$m = \sqrt{(x+1)^2 - 4}$$

Además:

$$Tgz = \frac{m}{n} = \frac{\sqrt{(x+1)^2 - 4}}{2} \Rightarrow \boxed{Tgz = \frac{\sqrt{(x+1)^2 - 4}}{2}}$$

Volviendo a (**):

$$\begin{aligned} (**) = I &= \int Secz dz = Ln|Secz + Tgz| + C = Ln \left| \frac{x+1}{2} + \frac{\sqrt{(x+1)^2 - 4}}{2} \right| + C = Ln \left| \frac{(x+1) + \sqrt{(x+1)^2 - 4}}{2} \right| + C = \\ &= Ln \left| \frac{(x+1) + \sqrt{(x+1)^2 - 4}}{2} \right| + C = Ln \left| (x+1) + \sqrt{(x+1)^2 - 4} \right| - Ln 2 + C = Ln \left| (x+1) + \sqrt{(x+1)^2 - 4} \right| + C = Ln \left| (x+1) + \sqrt{x^2 + 2x - 3} \right| + C \end{aligned}$$

17.- Determine si $\int \frac{dy}{-5 + 6y - y^2} = Ln \left| \sqrt{\frac{y^2 - 2y + 1}{-5 + 6y - y^2}} \right| + C \cdot$

Determinando:

Resolviendo la integral. Se completa cuadrados en el denominador y se reescribe el integrando de tal forma que se pueda aplicar la integración por sustituciones trigonométricas.

$$I = \int \frac{dy}{-5 + 6y - y^2} = \int \frac{dy}{-5 - (y^2 - 6y)} = \int \frac{dy}{-5 - (y^2 - 6y + 9 - 9)} = \int \frac{dy}{-5 + 9 - (y^2 - 6y + 9)} = \int \frac{dy}{4 - (y - 3)^2} = \int \frac{dy}{\left[\sqrt{4 - (y - 3)^2} \right]^2} = (*)$$

Ahora se hace el estudio correspondiente:

Forma:

$$\sqrt{4 - (y - 3)^2} \equiv \sqrt{a^2 - b^2 u^2}$$

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$$

$$u^2 = (y - 3)^2 \Rightarrow u = y - 3$$

Cambio:

$$u = \frac{a}{b} Sen z \Rightarrow y - 3 = 2 Sen z \Rightarrow y = 2 Sen z + 3 \Rightarrow dy = 2 Cos z dz$$

Volviendo a (*) para aplicar el cambio:

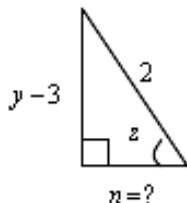
$$\begin{aligned} (*) = I &= \int \frac{dy}{\left[\sqrt{4 - (y - 3)^2} \right]^2} = \int \frac{2 Cos z dz}{\left[\sqrt{4 - (2 Sen z)^2} \right]^2} = \frac{1}{2} \int \frac{Cos z dz}{1 - Sen^2 z} = \frac{1}{2} \int \frac{Cos z dz}{Cos^2 z} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{Cos z} dz = \\ &= \frac{1}{2} \int Sec z dz = \frac{1}{2} Ln|Sec z + Tgz| + C = (***) \end{aligned}$$

Devolviendo el cambio para conocer los valores de $Sec z \wedge Tgz$:

Por el cambio inicial se conoce que:

$$\begin{aligned} y - 3 &= 2 Sen z \\ Sen z &= \frac{y - 3}{2} \end{aligned}$$

En el triángulo rectángulo se tiene entonces:



Por Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} p^2 &= m^2 + n^2 \\ n &= \sqrt{p^2 - m^2} \\ n &= \sqrt{4 - (y - 3)^2} \end{aligned}$$

Luego:

$$Sec z = \frac{p}{n} = \frac{2}{\sqrt{4 - (y - 3)^2}}$$

$$Tgz = \frac{m}{n} = \frac{y - 3}{\sqrt{4 - (y - 3)^2}}$$

Volviendo a (**):

$$\begin{aligned}
 (**) = I &= \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left| \frac{2}{\sqrt{4-(y-3)^2}} + \frac{y-3}{\sqrt{4-(y-3)^2}} \right| + C = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left| \frac{2+y-3}{\sqrt{4-(y-3)^2}} \right| + C = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left| \frac{y-1}{\sqrt{4-(y^2-6y+9)}} \right| + C = \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left| \frac{y-1}{\sqrt{-5+6y-y^2}} \right| + C = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left| \frac{(y-1)^2}{\sqrt{-5+6y-y^2}} \right| + C = \operatorname{Ln} \left| \sqrt{\frac{y^2-2y+1}{-5+6y-y^2}} \right| + C = \operatorname{Ln} \left| \sqrt{\frac{y^2-2y+1}{-5+6y-y^2}} \right| + C
 \end{aligned}$$

L. Q. Q. C.

18.- Obtenga: $\int \frac{xdx}{\sqrt{8-4x^2-4x}}$

Solución:

Para resolver esta integral, es necesario completar cuadrados en el radicando. Así que:

$$8 - 4x^2 - 4x = 8 - (4x^2 + 4x) = 8 - (4x^2 + 4x + 1 - 1) = 8 + 1 - (4x^2 + 4x + 1) = 9 - (2x + 1)^2$$

Luego, al reescribir la integral, queda:

$$I = \int \frac{xdx}{\sqrt{8-4x^2-4x}} = \int \frac{xdx}{\sqrt{9-(2x+1)^2}} = (*)$$

Ahora se hace el respectivo el estudio.

Forma:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{9-(2x+1)^2} &\equiv \sqrt{a^2-b^2u^2} \\
 a^2 = 9 &\Rightarrow a = 3 \\
 b^2 = 1 &\Rightarrow b = 1 \\
 u^2 = (2x+1)^2 &\Rightarrow u = 2x+1
 \end{aligned}$$

Cambio:

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{a}{b} \operatorname{Senz} \Rightarrow 2x+1 = 3\operatorname{Senz} \\
 \Rightarrow x &= \frac{3\operatorname{Senz}-1}{2} \\
 \Rightarrow dx &= \frac{3}{2} \operatorname{Cos}z \, dz
 \end{aligned}$$

Sustituyendo en (*):

$$\begin{aligned}
 (*) = I &= \int \frac{xdx}{\sqrt{8-4x^2-4x}} = \int \frac{xdx}{\sqrt{9-(2x+1)^2}} = \int \frac{\left(\frac{3\operatorname{Senz}-1}{2}\right) \cdot \frac{3}{2} \operatorname{Cos}z \, dz}{\sqrt{9-(3\operatorname{Senz})^2}} = \int \frac{\left(\frac{3\operatorname{Senz}-1}{2}\right) \cdot \frac{3}{2} \operatorname{Cos}z \, dz}{\sqrt{9-9\operatorname{Senz}^2z}} = \int \frac{\left(\frac{3\operatorname{Senz}-1}{2}\right) \cdot \frac{3}{2} \operatorname{Cos}z \, dz}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{1-\operatorname{Senz}^2z}} = \\
 &= \int \frac{\left(\frac{3\operatorname{Senz}-1}{2}\right) \cdot \frac{3}{2} \operatorname{Cos}z \, dz}{3\operatorname{Cos}z} = \frac{1}{4} \int (3\operatorname{Senz}-1) dz = \frac{3}{4} \int \operatorname{Senz} dz - \frac{1}{4} \int dz = -\frac{3}{4} \operatorname{Cos}z - \frac{1}{4} z + C = (**)
 \end{aligned}$$

Devolviendo el cambio para obtener el valor de Zy de CosZ:

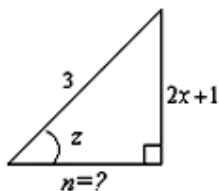
Como $2x+1 = 3\operatorname{Senz} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2x+1}{3} = \operatorname{Senz} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \operatorname{ArcSen} \left(\frac{2x+1}{3} \right)$$

Por otro lado : $\operatorname{Senz} = \frac{m}{p}$

Luego:



Por Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}
 p^2 &= m^2 + n^2 \\
 n^2 &= p^2 - m^2 \\
 n &= \sqrt{p^2 - m^2} \\
 n &= \sqrt{9 - (2x+1)^2}
 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\operatorname{Cos}z = \frac{n}{p} = \frac{\sqrt{9-(2x+1)^2}}{3} \Rightarrow \operatorname{Cos}z = \frac{\sqrt{9-(2x+1)^2}}{3}$$

Por lo tanto, en (**):

$$\begin{aligned}
 (**) = I &= -\frac{3}{4} \operatorname{Cos}z - \frac{1}{4} z + C = -\frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{9-(2x+1)^2}}{3} - \frac{1}{4} \operatorname{ArcSen} \left(\frac{2x+1}{3} \right) + C = \\
 &= -\frac{1}{4} \cdot \sqrt{9-(2x+1)^2} - \frac{1}{4} \operatorname{ArcSen} \left(\frac{2x+1}{3} \right) + C = -\frac{\sqrt{8-4x^2-4x}}{4} - \frac{1}{4} \operatorname{ArcSen} \left(\frac{2x+1}{3} \right) + C
 \end{aligned}$$

19.- Compruebe que $\int \sqrt{x^2+3} dx = \frac{x \cdot \sqrt{3+x^2}}{2} + \text{Ln} \left| \sqrt{3+x^2} + x \right| + \text{Ln} \left| \sqrt{\sqrt{3+x^2} + x} \right| + C$

Comprobación:

Resolviendo la integral. Iniciando con el estudio del integrando.

<p>Forma:</p> $\sqrt{x^2+3} = \sqrt{3+x^2} \equiv \sqrt{a^2+x^2}$ $a^2=3 \Rightarrow a=\sqrt{3}$	<p>Cambio:</p> $x = a \cdot \text{Tg } z \Rightarrow x = \sqrt{3} \text{Tg } z \Rightarrow dx = \sqrt{3} \cdot \text{Sec}^2 z dz$
--	---

Aplicando el cambio:

$$I = \int \sqrt{x^2+3} dx = \int \sqrt{3+(\sqrt{3}\text{Tg } z)^2} \cdot \sqrt{3} \text{Sec}^2 z dz = \sqrt{3} \cdot \int \sqrt{3+3\text{Tg}^2 z} \text{Sec}^2 z dz = \sqrt{3} \int \sqrt{3} \cdot \sqrt{1+\text{Tg}^2 z} \text{Sec}^2 z dz = 3 \int \text{Sec } z \cdot \text{Sec}^2 z dz = (*)$$

(I₁)

Resolviendo a I₁ utilizando integración por partes.

$$I_1 = \int \text{Sec } z \cdot \text{Sec}^2 z dz = u \cdot v - \int v \cdot du = (**)$$

Sustitución:

$$\begin{cases} u = \text{Sec } z \Rightarrow du = \text{Sec } z \cdot \text{Tg } z dz \\ dv = \text{Sec}^2 z dz \Rightarrow v = \text{Tg } z + C \end{cases}$$

Volviendo a (**):

$$\begin{aligned} (**) = I_1 &= \text{Sec } z \cdot \text{Tg } z - \int \text{Tg } z \cdot \text{Sec } z \cdot \text{Tg } z dz + C_1 = \text{Sec } z \cdot \text{Tg } z - \int \text{Tg}^2 z \cdot \text{Sec } z dz + C_1 = \text{Sec } z \cdot \text{Tg } z - \int (\text{Sec}^2 z - 1) \cdot \text{Sec } z dz + C_1 = \\ &= \text{Sec } z \cdot \text{Tg } z - \int \text{Sec } z \cdot \text{Sec}^2 z dz + \int \text{Sec } z dz + C_1 = \text{Sec } z \cdot \text{Tg } z - I_1 + \text{Ln} |\text{Sec } z + \text{Tg } z| + C_1 \end{aligned}$$

I₁ es una integral cíclica. Luego:

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{Sec } z \cdot \text{Tg } z - I_1 + \text{Ln} |\text{Sec } z + \text{Tg } z| + C_1 \\ 2I_1 &= \text{Sec } z \cdot \text{Tg } z + \text{Ln} |\text{Sec } z + \text{Tg } z| + C_1 \\ I_1 &= \frac{1}{2} \text{Sec } z \cdot \text{Tg } z + \frac{1}{2} \text{Ln} |\text{Sec } z + \text{Tg } z| + C_1 \end{aligned}$$

Volviendo a (*):

$$(*) = I = 3I_1 = 3 \cdot \left[\frac{1}{2} \text{Sec } z \cdot \text{Tg } z + \frac{1}{2} \text{Ln} |\text{Sec } z + \text{Tg } z| \right] + C = \frac{3}{2} \text{Sec } z \cdot \text{Tg } z + \frac{3}{2} \text{Ln} |\text{Sec } z + \text{Tg } z| + C = (***)$$

Devolviendo el cambio, para determinar los valores de Sec z ^ Tg z .

$$x = \sqrt{3} \text{Tg } z \Rightarrow \text{Tg } z = \frac{x}{\sqrt{3}} \quad \wedge \quad \text{Sec } z = \sqrt{1+\text{Tg}^2 z} = \sqrt{1+\frac{x^2}{3}} = \frac{\sqrt{3+x^2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \text{Sec } z = \frac{\sqrt{3+x^2}}{\sqrt{3}}$$

Volviendo a (***):

$$\begin{aligned} (***) = I &= \frac{3}{2} \text{Sec } z \cdot \text{Tg } z + \frac{3}{2} \text{Ln} |\text{Sec } z + \text{Tg } z| + C = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3+x^2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{3}{2} \text{Ln} \left| \frac{\sqrt{3+x^2}}{\sqrt{3}} + \frac{x}{\sqrt{3}} \right| + C = \\ &= \frac{3\sqrt{3+x^2} \cdot x}{2 \cdot 3} + \frac{3}{2} \text{Ln} \left| \frac{\sqrt{3+x^2} + x}{\sqrt{3}} \right| + C = \frac{x \cdot \sqrt{x^2+3}}{2} + \frac{3}{2} \text{Ln} |\sqrt{x^2+3} + x| - \frac{3}{2} \text{Ln} |\sqrt{3}| + C = \\ &= \frac{x \cdot \sqrt{x^2+3}}{2} + \frac{3}{2} \text{Ln} |\sqrt{x^2+3} + x| + C = \frac{x \cdot \sqrt{x^2+3}}{2} + (1 + \frac{1}{2}) \text{Ln} |\sqrt{x^2+3} + x| + C = \\ &= \frac{x \cdot \sqrt{x^2+3}}{2} + \text{Ln} |\sqrt{x^2+3} + x| + \frac{1}{2} \text{Ln} |\sqrt{x^2+3} + x| + C = \frac{x \cdot \sqrt{x^2+3}}{2} + \text{Ln} |\sqrt{x^2+3} + x| + \text{Ln} \left| \sqrt{\sqrt{x^2+3} + x} \right| + C \end{aligned}$$

L. Q. Q. C.

20.- Verifique: $\int x \cdot \text{ArcSen} \sqrt{x} \, dx = \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \text{ArcSen} \sqrt{x} - \frac{3}{24} \cdot \text{ArcSen}(2x-1) - \frac{1}{32} \cdot (3+2x) \cdot \sqrt{1-(2x-1)^2} + C \cdot$

Solución:

Resolviendo la integral. La resolución de la integral inicia con integración por partes.

Sustitución a aplicar en I:

$$\begin{cases} u = \text{ArcSen} \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{dx}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x}} \\ dv = x dx \Rightarrow \int dv = \int x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} + C \end{cases}$$

Aplicando la sustitución en la integral:

$$\begin{aligned} I &= \int x \cdot \text{ArcSen} \sqrt{x} \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \text{ArcSen} \sqrt{x} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x}} + C = \frac{x^2 \cdot \text{ArcSen} \sqrt{x}}{2} - \frac{1}{4} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x}} + C = \\ &= \frac{x^2 \cdot \text{ArcSen} \sqrt{x}}{2} - \frac{1}{4} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-x^2}} + C = \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \text{ArcSen} \sqrt{x} - \frac{1}{4} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - (x-\frac{1}{2})^2}} = (*) \\ &\hspace{15em} (I_1 : \text{Completando cuadrados}) \end{aligned}$$

Resolviendo a I₁ por sustitución trigonométrica: Se hace el estudio correspondiente.

Forma:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{4} - (x-\frac{1}{2})^2} &\equiv \sqrt{a^2 - b^2 u^2} \\ a^2 = \frac{1}{4} &\Rightarrow a = \frac{1}{2} \\ b^2 = 1 &\Rightarrow b = 1 \\ u^2 = (x-\frac{1}{2})^2 &\Rightarrow u = x-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cambio: } u = \frac{a}{b} \cdot \text{Sen } z &\Rightarrow x-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{Sen } z \Rightarrow dx = \frac{1}{2} \text{Cos } z \, dz \\ \text{Luego: } x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{Sen } z &\Rightarrow dx = \frac{1}{2} \text{Cos } z \, dz \\ \text{Además: } x-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{Sen } z &\Rightarrow \text{Sen } z = 2x-1 \Rightarrow z = \text{ArcSen}(2x-1) \\ \text{Lo que implica que siendo: } \text{Cos } z &= \sqrt{1-\text{Sen}^2 z} \Rightarrow \text{Cos } z = \sqrt{1-(2x-1)^2} \end{aligned}$$

Luego, en I₁:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{Sen } z)^2 \cdot \frac{1}{2} \text{Cos } z \, dz}{\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \text{Sen}^2 z}} = \int \frac{(\frac{1+\text{Sen } z}{4})^2 \cdot \text{Cos } z \, dz}{\sqrt{1-\text{Sen}^2 z}} = \frac{1}{4} \int \frac{(1+\text{Sen } z)^2 \cdot \text{Cos } z \, dz}{\text{Cos } z} = \\ &= \frac{1}{4} \int (1+\text{Sen } z)^2 \, dz = \frac{1}{4} \int (1+2\text{Sen } z + \text{Sen}^2 z) \, dz = \frac{1}{4} \int dz + \frac{1}{2} \int \text{Sen } z \, dz + \frac{1}{4} \int \text{Sen}^2 z \, dz = \\ &= \frac{1}{4} z - \frac{1}{2} \text{Cos } z + \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{1}{2} z - \frac{1}{4} \text{Sen}(2z) \right] + C_1 = \frac{1}{4} z - \frac{1}{2} \text{Cos } z + \frac{1}{8} z - \frac{1}{16} \text{Sen}(2z) + C_1 = \\ &= \frac{3}{8} z - \frac{1}{2} \text{Cos } z - \frac{1}{16} \cdot (2\text{Sen } z \cdot \text{Cos } z) + C_1 = \frac{3}{8} z - \frac{1}{2} \text{Cos } z - \frac{1}{8} \text{Sen } z \cdot \text{Cos } z + C_1 = \\ &= \frac{3}{8} \text{ArcSen}(2x-1) - \frac{1}{2} \sqrt{1-(2x-1)^2} - \frac{1}{8} (2x-1) \sqrt{1-(2x-1)^2} + C_1 = \\ &= \frac{3}{8} \text{ArcSen}(2x-1) - \frac{1}{2} \sqrt{1-(2x-1)^2} \cdot \left[1 + \frac{1}{4} (2x-1) \right] + C_1 = \frac{3}{8} \text{ArcSen}(2x-1) - \frac{1}{2} \sqrt{1-(2x-1)^2} \cdot \left[\frac{4+(2x-1)}{4} \right] + C_1 = \\ &= \frac{3}{8} \text{ArcSen}(2x-1) - \frac{1}{8} \sqrt{1-(2x-1)^2} \cdot (4+2x-1) + C_1 = \\ &= \frac{3}{8} \text{ArcSen}(2x-1) - \frac{1}{8} (3+2x) \sqrt{1-(2x-1)^2} + C_1 \end{aligned}$$

Volviendo a (*):

$$\begin{aligned} (*) = I &= \frac{x^2 \cdot \text{ArcSen} \sqrt{x}}{2} - \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{3}{8} \text{ArcSen}(2x-1) - \frac{1}{8} (3+2x) \sqrt{1-(2x-1)^2} \right] + C = \\ &= \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \text{ArcSen} \sqrt{x} - \frac{3}{24} \cdot \text{ArcSen}(2x-1) - \frac{1}{32} \cdot (3+2x) \cdot \sqrt{1-(2x-1)^2} + C \end{aligned}$$

21.- Proponer una solución para $\int \frac{vx^n dx}{w^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{x} \cdot (vx - wx^{n+1})}}$.

Solución:

Resolviendo la integral. Arreglando el integrando, aplicando propiedades de las integrales indefinidas y extrayendo factor común.

$$I = \int \frac{vx^n dx}{w^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{x} \cdot (vx - wx^{n+1})}} = \frac{v}{w^2} \int \frac{x^n dx}{\sqrt{\frac{x}{x} \cdot (v - wx^n)}} = \frac{v}{w^2} \int \frac{x^n dx}{\sqrt{v - wx^n}} = (*)$$

Al llegar a este punto, si se quiere resolver esta integral por sustituciones trigonométricas, una posibilidad para ello se da cuando se considera que $n=2$. Así que:

$$(*) = I = \frac{v}{w^2} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{v - wx^2}} \approx \frac{v}{w^2} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{v - wx^2}} = (**)$$

Aplicando integración por sustituciones trigonométricas. Se hace el estudio correspondiente.

Forma:

$$\begin{aligned} \sqrt{v - wx^2} &\equiv \sqrt{a^2 - b^2 u^2} \\ a^2 = v &\Rightarrow a = \sqrt{v} \\ b^2 = w &\Rightarrow b = \sqrt{w} \\ u^2 = x^2 &\Rightarrow u = x \end{aligned}$$

Cambio:

$$u = \frac{a}{b} \text{ Sen } z \Rightarrow x = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{w}} \text{ Sen } z \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{w}} \text{ Cos } z \, dz$$

Volviendo a (**):

$$\begin{aligned} (**) &= \frac{v}{w^2} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{v - wx^2}} = \frac{v}{w^2} \int \frac{\frac{v}{w} \text{ Sen}^2 Z \cdot \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{w}} \text{ Cos } z \, dz}{\sqrt{v - w \cdot \frac{v}{w} \text{ Sen}^2 z}} = \frac{v}{w^2} \cdot \frac{v}{w} \cdot \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{w}} \int \frac{\text{Sen}^2 z \cdot \text{Cos } z}{\sqrt{v - v \text{ Sen}^2 z}} \, dz = \frac{v^2 \cdot \sqrt{v}}{w^3 \cdot \sqrt{w}} \int \frac{\text{Sen}^2 z \cdot \text{Cos } z}{\sqrt{v} \cdot \sqrt{1 - \text{Sen}^2 z}} \, dz = \\ &= \frac{v^2 \cdot \sqrt{v}}{w^3 \cdot \sqrt{w} \cdot \sqrt{v}} \int \frac{\text{Sen}^2 z \cdot \text{Cos } z}{\text{Cos } z} \, dz = \frac{v^2}{w^3 \cdot \sqrt{w}} \int \text{Sen}^2 z \, dz = \frac{v^2}{w^3 \sqrt{w}} \cdot \left[\frac{1}{2} z - \frac{1}{4} \text{Cos}(2z) \right] + C = \frac{v^2}{w^3 \sqrt{w}} \cdot \left[\frac{1}{2} z - \frac{1}{2} \text{Sen } z \cdot \text{Cos } z \right] + C = \\ &= \frac{v^2}{2w^3 \sqrt{w}} \cdot [z - \text{Sen } z \cdot \text{Cos } z] + C = (***) \end{aligned}$$

Devolviendo el cambio para conocer los valores de Z , $\text{Sen } Z \wedge \text{Cos } Z$.

Por el cambio inicial:

$$\begin{aligned} x = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{w}} \text{ Sen } z &\Rightarrow \text{Sen } z = \frac{\sqrt{w} x}{\sqrt{v}} \Rightarrow z = \text{ArcSen} \left(\frac{\sqrt{w} x}{\sqrt{v}} \right) \\ \text{Cos } z = \sqrt{1 - \text{Sen}^2 z} &= \sqrt{1 - \frac{wx^2}{v}} = \frac{\sqrt{v - wx^2}}{\sqrt{v}} \Rightarrow \text{Cos } z = \frac{\sqrt{v - wx^2}}{\sqrt{v}} \end{aligned}$$

Volviendo (***):

$$(***) = \frac{v^2}{2w^3 \sqrt{w}} \cdot \left[\text{ArcSen} \left(\frac{\sqrt{w} x}{\sqrt{v}} \right) - \frac{\sqrt{w} x}{\sqrt{v}} \cdot \frac{\sqrt{v - wx^2}}{\sqrt{v}} \right] + C = \frac{v^2}{2w^3 \sqrt{w}} \cdot \left[\text{ArcSen} \left(\frac{\sqrt{wv} x}{v} \right) - \frac{x \sqrt{w(v - wx^2)}}{v} \right] + C$$

Considérese válida la solución.

Revise si para $n=4$ y $n=6$ es posible hallar soluciones utilizando esta misma técnica.

22.- Comprobar si: $\int \frac{x^2 - 8x + 7}{(x^2 - 3x - 10)^2} dx = \frac{30}{343} \operatorname{Ln} \left| \frac{x-5}{x+2} \right| + \frac{8}{49(x-5)} - \frac{27}{49(x+2)} + C.$

Comprobando:

Completando cuadrados en el numerador y en el denominador.

$$x^2 - 8x + 7 = (x - 4)^2 - 9$$

$$x^2 - 3x - 10 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}$$

Luego, la integral queda:

$$I = \int \frac{x^2 - 8x + 7}{(x^2 - 3x - 10)^2} dx = \int \frac{(x-4)^2 - 9}{\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}\right]^2} dx = (*)$$

Resolviendo la integral por sustituciones trigonométricas.

Estudio de la forma:

$$a^2 = \frac{49}{4} \Rightarrow a = \frac{7}{2}$$

$$b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$$

$$u^2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow u = x - \frac{3}{2}$$

Cambio:

$$u = \frac{a}{b} \cdot \operatorname{Sec} z \Rightarrow x - \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \operatorname{Sec} z \Rightarrow x = \frac{7}{2} \operatorname{Sec} z + \frac{3}{2} \Rightarrow dx = \frac{7}{2} \operatorname{Sec} z \cdot \operatorname{Tg} z dz$$

Volviendo a (*):

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(x-4)^2 - 9}{\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}\right]^2} dx = \int \frac{\left(\frac{7}{2} \operatorname{Sec} z + \frac{3}{2} - 4\right)^2 - 9}{\left[\left(\frac{7}{2} \operatorname{Sec} z\right)^2 - \frac{49}{4}\right]^2} \cdot \frac{7}{2} \operatorname{Sec} z \cdot \operatorname{Tg} z dz = \int \frac{\left(\frac{7}{2} \operatorname{Sec} z - \frac{5}{2}\right)^2 - 9}{\left[\left(\frac{7}{2} \operatorname{Sec} z\right)^2 - \frac{49}{4}\right]^2} \cdot \frac{7}{2} \operatorname{Sec} z \cdot \operatorname{Tg} z dz = \\ &= \frac{7}{2} \int \frac{\left(\frac{7}{2} \operatorname{Sec} z - \frac{5}{2}\right)^2 - 9}{\left[\frac{49}{4} \operatorname{Sec}^2 z - \frac{49}{4}\right]^2} \cdot \operatorname{Sec} z \cdot \operatorname{Tg} z dz = \frac{7}{2} \int \frac{\left(\frac{7}{2} \operatorname{Sec} z - \frac{5}{2}\right)^2 - 9}{\left[\operatorname{Sec}^2 z - 1\right]^2} \cdot \operatorname{Sec} z \cdot \operatorname{Tg} z dz = \\ &= \frac{2^3}{7^3} \cdot \int \frac{(7 \operatorname{Sec} z - 5)^2 - 9}{\operatorname{Tg}^4 z} \cdot \operatorname{Sec} z \cdot \operatorname{Tg} z dz = \frac{2^3}{7^3} \cdot \int \frac{(7 \operatorname{Sec} z - 5)^2 - 36}{\operatorname{Tg}^3 z} \cdot \operatorname{Sec} z dz = \\ &= \frac{2^3}{7^3 \cdot 2^2} \cdot \int \frac{(7 \operatorname{Sec} z - 5)^2 - 36}{\operatorname{Tg}^3 z} \cdot \operatorname{Sec} z dz = \frac{2}{7^3} \cdot \int \frac{49 \operatorname{Sec}^2 z - 70 \operatorname{Sec} z + 25 - 36}{\operatorname{Tg}^3 z} \cdot \operatorname{Sec} z dz = \\ &= \frac{2}{7^3} \cdot \int \frac{7^2 \operatorname{Sec}^2 z - 7 \cdot 2 \cdot 5 \operatorname{Sec} z - 11}{\operatorname{Tg}^3 z} \cdot \operatorname{Sec} z dz = \frac{2 \cdot 7^2}{7^3} \cdot \int \frac{\operatorname{Sec}^3 z}{\operatorname{Tg}^3 z} dz - \frac{2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5}{7^3} \cdot \int \frac{\operatorname{Sec}^2 z}{\operatorname{Tg}^3 z} dz - \frac{2 \cdot 11}{7^3} \cdot \int \frac{\operatorname{Sec} z}{\operatorname{Tg}^3 z} dz = \\ &= \frac{2}{7} \cdot \int \frac{\operatorname{Sec}^3 z}{\operatorname{Tg}^3 z} dz - \frac{2^2 \cdot 5}{7^2} \cdot \int \frac{\operatorname{Sec}^2 z}{\operatorname{Tg}^3 z} dz - \frac{2 \cdot 11}{7^3} \cdot \int \frac{\operatorname{Sec} z}{\operatorname{Tg}^3 z} dz = (**) \\ &\qquad (I_1) \qquad (I_2) \qquad (I_3) \end{aligned}$$

Resolviendo por separado las integrales resultantes:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{\operatorname{Sec}^3 z}{\operatorname{Tg}^3 z} dz = \int \frac{\frac{1}{\operatorname{Cos}^3 z}}{\frac{\operatorname{Sen}^3 z}{\operatorname{Cos}^3 z}} dz = \int \frac{1}{\operatorname{Sen}^3 z} dz = \int \operatorname{Cosec}^3 z dz = -\frac{1}{2} \operatorname{Cosec} z \cdot \operatorname{Cotg} z + \frac{1}{2} \operatorname{Ln} |\operatorname{Cosec} z - \operatorname{Cotg} z| + C_1 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot [-\operatorname{Cosec} z \cdot \operatorname{Cotg} z + \operatorname{Ln} |\operatorname{Cosec} z - \operatorname{Cotg} z|] + C_1 \end{aligned}$$

$$I_2 = \int \frac{\text{Sec}^2 z}{\text{Tg}^3 z} dz = \int \text{Tg}^{-3} z \cdot \text{Sec}^2 z dz = \int u^{-3} du = -\frac{u^{-2}}{2} + C_2 = -\frac{1}{2u^2} + C_2 = -\frac{1}{2 \cdot \text{Tg}^2 z} + C_2 = -\frac{1}{2} \text{Cotg}^2 z + C_2$$

Cambio de variable utilizado:

$$u = \text{Tg} z \Rightarrow du = \text{Sec}^2 z dz$$

$$I_3 = \int \frac{\text{Sec} z}{\text{Tg}^3 z} dz = \int \frac{\frac{1}{\text{Cos} z}}{\frac{\text{Sen}^3 z}{\text{Cos}^3 z}} dz = \int \frac{\text{Cos}^2 z}{\text{Sen}^3 z} dz = \int \text{Cotg}^2 z \cdot \text{Cosec} z dz = \int (\text{Cosec}^2 z - 1) \cdot \text{Cosec} z dz =$$

$$= \int (\text{Cosec}^3 z - \text{Cosec} z) dz = \int \text{Cosec}^3 z dz - \int \text{Cosec} z dz =$$

$$= -\frac{1}{2} \text{Cosec} z \cdot \text{Cotg} z + \frac{1}{2} \text{Ln}|\text{Cosec} z - \text{Cotg} z| - \text{Ln}|\text{Cosec} z - \text{Cotg} z| + C_2 =$$

$$= -\frac{1}{2} \text{Cosec} z \cdot \text{Cotg} z - \frac{1}{2} \text{Ln}|\text{Cosec} z - \text{Cotg} z| + C_2 = -\frac{1}{2} \cdot [\text{Cosec} z \cdot \text{Cotg} z + \text{Ln}|\text{Cosec} z - \text{Cotg} z|] + C_3$$

Volviendo a (***) para reunir los tres resultados:

$$(***) = I = \frac{2}{7} \int \frac{\text{Sec}^3 z}{\text{Tg}^3 z} dz - \frac{2^2 \cdot 5}{7^2} \int \frac{\text{Sec}^2 z}{\text{Tg}^3 z} dz - \frac{2 \cdot 11}{7^3} \int \frac{\text{Sec} z}{\text{Tg}^3 z} dz =$$

$$= \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot [-\text{Cosec} z \cdot \text{Cotg} z + \text{Ln}|\text{Cosec} z - \text{Cotg} z|] - \frac{2^2 \cdot 5}{7^2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \text{Cotg}^2 z\right) - \frac{2 \cdot 11}{7^3} \cdot \left\{-\frac{1}{2} \cdot [\text{Cosec} z \cdot \text{Cotg} z + \text{Ln}|\text{Cosec} z - \text{Cotg} z|]\right\} + C =$$

$$= \frac{1}{7} \cdot [-\text{Cosec} z \cdot \text{Cotg} z + \text{Ln}|\text{Cosec} z - \text{Cotg} z|] + \frac{2 \cdot 5}{7^2} \cdot \text{Cotg}^2 z + \frac{11}{7^3} \cdot [\text{Cosec} z \cdot \text{Cotg} z + \text{Ln}|\text{Cosec} z - \text{Cotg} z|] + C =$$

$$= -\frac{1}{7} \cdot \text{Cosec} z \cdot \text{Cotg} z + \frac{1}{7} \cdot \text{Ln}|\text{Cosec} z - \text{Cotg} z| + \frac{2 \cdot 5}{7^2} \cdot \text{Cotg}^2 z + \frac{11}{7^3} \cdot \text{Cosec} z \cdot \text{Cotg} z + \frac{11}{7^3} \cdot \text{Ln}|\text{Cosec} z - \text{Cotg} z| + C =$$

$$= -\frac{38}{343} \cdot \text{Cosec} z \cdot \text{Cotg} z + \frac{60}{343} \cdot \text{Ln}|\text{Cosec} z - \text{Cotg} z| + \frac{10}{49} \text{Cotg}^2 z + C = (***)$$

$$\text{Cosec} z = ? \quad \text{Cotg} z = ?$$

Devolviendo el cambio.

Por el cambio inicial:

$$x - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \text{Sec} z$$

$$\text{Sec} z = \frac{x - \frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2x - 3}{\frac{1}{2}} = \frac{2x - 3}{7} \Rightarrow \text{Sec} z = \frac{2x - 3}{7} = \frac{p}{n}$$

En el triángulo rectángulo:



Por Teorema de Pitágoras:

$$p^2 = m^2 + n^2$$

$$m = \sqrt{p^2 - n^2} \Rightarrow m = \sqrt{(2x - 3)^2 - 49}$$

$$\text{Cosec} z = \frac{2x - 3}{\sqrt{(2x - 3)^2 - 49}}$$

$$\text{Cotg} z = \frac{7}{\sqrt{(2x - 3)^2 - 49}}$$

Volviendo a (***):

$$\begin{aligned}
 (***) = I &= -\frac{38}{343} \cdot \operatorname{Cosec} z \cdot \operatorname{Cotg} z + \frac{60}{343} \cdot \operatorname{Ln} |\operatorname{Cosec} z - \operatorname{Cotg} z| + \frac{10}{49} \operatorname{Cotg}^2 z + C = \\
 &= -\frac{38}{343} \cdot \frac{2x-3}{\sqrt{(2x-3)^2-49}} \cdot \frac{7}{\sqrt{(2x-3)^2-49}} + \frac{60}{343} \cdot \operatorname{Ln} \left| \frac{2x-3}{\sqrt{(2x-3)^2-49}} - \frac{7}{\sqrt{(2x-3)^2-49}} \right| + \frac{10}{49} \cdot \frac{7^2}{\left[\sqrt{(2x-3)^2-49} \right]^2} + C = \\
 &= -\frac{38}{343} \cdot \frac{7 \cdot (2x-3)}{(2x-3)^2-49} + \frac{60}{343} \cdot \operatorname{Ln} \left| \frac{2x-3-7}{\sqrt{(2x-3)^2-49}} \right| + \frac{10 \cdot 49}{49 \cdot \sqrt{(2x-3)^2-49}} + C = \\
 &= -\frac{38}{49} \cdot \frac{2x-3}{(2x-3)^2-49} + \frac{60}{343} \cdot \operatorname{Ln} \left| \frac{2x-10}{\sqrt{(2x-3)^2-49}} \right| + \frac{10}{(2x-3)^2-49} + C = \\
 &= -\frac{38}{49} \cdot \frac{2x-3}{4x^2-12x+9-49} + \frac{60}{343} \cdot \operatorname{Ln} \left| \frac{2x-10}{\sqrt{4x^2-12x+9-49}} \right| + \frac{10}{4x^2-12x+9-49} + C = \\
 &= -\frac{38}{49} \cdot \frac{2x-3}{4x^2-12x-40} + \frac{60}{343} \cdot \operatorname{Ln} \left| \frac{2x-10}{\sqrt{4x^2-12x-40}} \right| + \frac{10}{4x^2-12x-40} + C = \\
 &= -\frac{38}{49} \cdot \frac{2x-3}{4 \cdot (x^2-3x-10)} + \frac{60}{343} \cdot \operatorname{Ln} \left| \frac{2x-10}{\sqrt{4 \cdot (x^2-3x-10)}} \right| + \frac{10}{4 \cdot (x^2-3x-10)} + C = \\
 &= -\frac{19}{98} \cdot \frac{2x-3}{(x+2) \cdot (x-5)} + \frac{60}{343} \cdot \operatorname{Ln} \left| \frac{2x-10}{2 \cdot \sqrt{(x+2) \cdot (x-5)}} \right| + \frac{5}{2 \cdot (x+2) \cdot (x-5)} + C = \\
 &= \frac{-38x+57}{98 \cdot (x+2) \cdot (x-5)} + \frac{60}{343} \cdot \operatorname{Ln} \left| \frac{x-5}{\sqrt{(x+2) \cdot (x-5)}} \right| + \frac{5}{2 \cdot (x+2) \cdot (x-5)} + C = \\
 &= \frac{60}{343} \cdot \operatorname{Ln} \left| \frac{(x-5)^2}{(x+2) \cdot (x-5)} \right| + \frac{5}{2 \cdot (x+2) \cdot (x-5)} + \frac{-38x+57}{98 \cdot (x+2) \cdot (x-5)} + C = \\
 &= \frac{60}{343} \cdot \operatorname{Ln} \left| \frac{(x-5)}{(x+2)} \right| + \frac{245-38x+57}{98 \cdot (x+2) \cdot (x-5)} + C = \\
 &= \frac{60}{343} \cdot \operatorname{Ln} \left[\frac{(x-5)}{(x+2)} \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{-38x+302}{98 \cdot (x+2) \cdot (x-5)} + C = \\
 &= \frac{60}{343} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left| \frac{(x-5)}{(x+2)} \right| + \frac{-19x+151}{49 \cdot (x+2) \cdot (x-5)} + C = \\
 &= \frac{30}{343} \cdot \operatorname{Ln} \left| \frac{(x-5)}{(x+2)} \right| + \frac{-19x+151}{49 \cdot (x+2) \cdot (x-5)} + C =
 \end{aligned}$$

Ahora lo que falta es comprobar que el segundo sumando se corresponde con los dos últimos sumandos de la respuesta propuesta:

$$\frac{-19x+151}{49 \cdot (x+2) \cdot (x-5)} = \frac{8}{49(x-5)} - \frac{27}{49(x+2)}$$

$$\frac{-19x+151}{49 \cdot (x+2) \cdot (x-5)} = \frac{8(x+2)-27(x-5)}{49(x-5)(x+2)}$$

$$\frac{-19x+151}{49 \cdot (x+2) \cdot (x-5)} = \frac{8x+16-27x+135}{49(x-5)(x+2)}$$

$$\frac{-19x+151}{49 \cdot (x+2) \cdot (x-5)} = \frac{-19x+151}{49 \cdot (x+2) \cdot (x-5)}$$

Se comprueba la igualdad.

Luego podemos afirmar que la respuesta propuesta para la integral es correcta:

$$I = \int \frac{x^2-8x+7}{(x^2-3x-10)^2} dx = \frac{30}{343} \operatorname{Ln} \left| \frac{x-5}{x+2} \right| + \frac{8}{49(x-5)} - \frac{27}{49(x+2)} + C$$

23.- Compruebe:
$$\int \frac{e^t dt}{(e^{2t} + 8e^t + 7)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{9} \cdot \left[\frac{e^t + 4}{\sqrt{(e^t + 4)^2 - 9}} \right] + C$$

Comprobando:

Resolviendo la integral. Considerando el siguiente cambio de variable: $x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt$

Aplicando el cambio:
$$I = \int \frac{dx}{(x^2 + 8x + 7)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 8x + 7)^3}} = \int \frac{dx}{(\sqrt{(x+4)^2 - 9})^3} = (*)$$

Esta integral se puede resolver por sustituciones trigonométricas.

Estudio de la forma:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+4)^2 - 9} &= \sqrt{b^2u^2 - a^2} \\ a^2 = 9 &\rightarrow a = 3 \\ b^2 = 1 &\rightarrow b = 1 \\ u^2 = (x+4)^2 &\rightarrow u = x+4 \end{aligned}$$

Cambio:

$$u = \frac{a}{b} \cdot \text{Sec } z \Rightarrow x + 4 = 3\text{Sec } z \Rightarrow dx = 3\text{Sec } z \cdot \text{Tg } z \, dz$$

Volviendo a la integral:

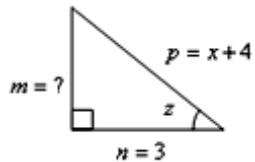
$$\begin{aligned} (*) = I &= \int \frac{3\text{Sec } z \cdot \text{Tg } z \, dz}{(\sqrt{9\text{Sec}^2 z - 9})^3} = \frac{1}{9} \int \frac{\text{Sec } z \cdot \text{Tg } z \, dz}{(\sqrt{\text{Sec}^2 z - 1})^3} = \frac{1}{9} \int \frac{\text{Sec } z \cdot \text{Tg } z \, dz}{\text{Tg}^3 z} = \frac{1}{9} \int \frac{\text{Sec } z \, dz}{\text{Tg}^2 z} = \frac{1}{9} \int \frac{\text{Cos } z}{\frac{\text{Sen}^2 z}{\text{Cos}^2 z}} \, dz = \\ &= \frac{1}{9} \int \frac{\text{Cos } z}{\text{Sen}^2 z} \, dz = \frac{1}{9} \int \frac{\text{Cos } z}{\text{Sen } z} \cdot \frac{1}{\text{Sen } z} \, dz = \frac{1}{9} \int \text{CoTg } z \cdot \text{Cosec } z \, dz = -\frac{1}{9} \cdot \text{Cosec } z + C = (*) \end{aligned}$$

$\text{Cosec } z = ?$

Devolviendo el cambio:

$$x + 4 = 3\text{Sec } z \Rightarrow \text{Sec } z = \frac{x+4}{3} = \frac{p}{n}$$

En el triángulo rectángulo tenemos:



Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} (x+4)^2 &= m^2 + 3^2 \\ m &= \sqrt{(x+4)^2 - 9} \end{aligned}$$

Luego:

$$\text{Cosec } z = \frac{p}{m} = \frac{x+4}{\sqrt{(x+4)^2 - 9}}$$

Volviendo a (*):

$$(*) = I = -\frac{1}{9} \cdot \left[\frac{x+4}{\sqrt{(x+4)^2 - 9}} \right] + C = -\frac{1}{9} \cdot \left[\frac{e^t + 4}{\sqrt{(e^t + 4)^2 - 9}} \right] + C$$

24.- Compruebe si:

$$\int \sqrt{\frac{2x}{x+1}} dx =$$

$$= \sqrt{2} \left\{ \operatorname{Ln} \left| \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} \right| - \operatorname{Cosec} \left[\operatorname{Cos}^{-1} \left(\sqrt{\frac{x+1}{x}} \right) \right] \sqrt{\operatorname{Cosec}^2 \left[\operatorname{Cos}^{-1} \left(\sqrt{\frac{x+1}{x}} \right) \right] - 1} + \operatorname{Ln} \left| \operatorname{Cosec} \left[\operatorname{Cos}^{-1} \left(\sqrt{\frac{x+1}{x}} \right) \right] + \sqrt{\operatorname{Cosec}^2 \left[\operatorname{Cos}^{-1} \left(\sqrt{\frac{x+1}{x}} \right) \right] - 1} \right| \right\} + C$$

Comprobando:

Resolviendo la integral. Se propone la siguiente sustitución:

Cambio : $t^2 = \frac{2x}{x+1} \wedge t = \sqrt{\frac{2x}{x+1}} \Rightarrow 2tdt = \frac{2 \cdot (x+1) - 2x}{(x+1)^2} dx = \frac{2x + 2 - 2x}{(x+1)^2} dx = \frac{2 dx}{(x+1)^2} \Rightarrow 2tdt = \frac{2 dx}{(x+1)^2} \Rightarrow tdt = \frac{dx}{(x+1)^2}$

pero : $x = -\frac{t^2}{t^2 - 2} \Rightarrow x+1 = -\frac{t^2}{t^2 - 2} + 1 \Rightarrow x+1 = \frac{-t^2 + t^2 - 2}{t^2 - 2} \Rightarrow x+1 = -\frac{2}{t^2 - 2}$

luego : $tdt = \frac{dx}{\left(-\frac{2}{t^2 - 2}\right)^2} \Rightarrow dx = tdt \cdot \left(-\frac{2}{t^2 - 2}\right)^2 \Rightarrow dx = \frac{4tdt}{(t^2 - 2)^2}$

Aplicando el cambio en la integral:

$$I = \int \sqrt{\frac{2x}{x+1}} dx = \int \sqrt{t^2} \cdot \frac{4tdt}{(t^2 - 2)^2} = 4 \int \frac{t^2 dt}{(t^2 - 2)^2} = 4 \int \frac{(t^2 - 2 + 2) dt}{(t^2 - 2)^2} = 4 \int \frac{dt}{t^2 - 2} + 8 \int \frac{dt}{(t^2 - 2)^2} = (*)$$

(I₁) (I₂)

Resolviendo las integrales por separado.

Resolviendo a I₁: Es de resolución inmediata.

Se aplica la fórmula elemental $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \operatorname{Ln} \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$; $a \neq 0$, y se devuelve el cambio.

$$I_1 = 4 \int \frac{dt}{t^2 - 2} = 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \operatorname{Ln} \left| \frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}} \right| + C_1 = \sqrt{2} \operatorname{Ln} \left| \frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}} \right| + C_1 = \sqrt{2} \operatorname{Ln} \left| \frac{\sqrt{\frac{2x}{x+1}} - \sqrt{2}}{\sqrt{\frac{2x}{x+1}} + \sqrt{2}} \right| + C_1 = \sqrt{2} \operatorname{Ln} \left| \frac{\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x+1}} - \sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{2}} \right| + C_1 =$$

$$= \sqrt{2} \operatorname{Ln} \left| \frac{\frac{\sqrt{2x} - \sqrt{2(x+1)}}{\sqrt{x+1}}}{\frac{\sqrt{2x} + \sqrt{2(x+1)}}{\sqrt{x+1}}} \right| + C_1 = \sqrt{2} \operatorname{Ln} \left| \frac{\sqrt{2x} - \sqrt{2(x+1)}}{\sqrt{2x} + \sqrt{2(x+1)}} \right| + C_1 = \sqrt{2} \operatorname{Ln} \left| \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} \right| + C_1.$$

Resolviendo a I₂:

$$I_2 = 8 \int \frac{dt}{(t^2 - 2)^2} = 8 \int \frac{dt}{[t^2 - (\sqrt{2})^2]^2} = 8 \int \frac{dt}{[t^2 - (\sqrt{2})^2]^2} = 8 \int \frac{dt}{[t^2 - (\sqrt{2})^2]^2} = 8 \int \frac{dt}{[t^2 - (\sqrt{2})^2]^2} + C = 8 \int \frac{dt}{[t^2 - (\sqrt{2})^2]^2} =$$

$$= 8 \int \frac{dt}{[t^2 - (\sqrt{2})^2]^2} = (**)$$

c.v₂ : $t = \sqrt{2} \operatorname{Sec} u \Rightarrow dt = \sqrt{2} \operatorname{Sec} u \operatorname{Tg} u du$

Volviendo a (**):

$$(**) = I_2 = 8 \int \frac{\sqrt{2} \operatorname{Sec} u \operatorname{Tg} u du}{[(\sqrt{2} \operatorname{Sec} u)^2 - (\sqrt{2})^2]^2} = 8 \int \frac{\sqrt{2} \operatorname{Sec} u \operatorname{Tg} u du}{(2 \operatorname{Sec}^2 u - 2)^2} = 2\sqrt{2} \int \frac{\operatorname{Sec} u \operatorname{Tg} u du}{(\operatorname{Sec}^2 u - 1)^2} = 2\sqrt{2} \int \frac{\operatorname{Sec} u \operatorname{Tg} u du}{\operatorname{Tg}^4 u} = 2\sqrt{2} \int \frac{\operatorname{Sec} u du}{\operatorname{Tg}^3 u} =$$

$$= 2\sqrt{2} \int \frac{\operatorname{Sec} u}{\operatorname{Tg} u} \cdot \frac{1}{\operatorname{Tg}^2 u} du + C = 2\sqrt{2} \int \frac{1}{\operatorname{Sen} u} \cdot \frac{\operatorname{Cos}^2 u}{\operatorname{Sen}^2 u} du = 2\sqrt{2} \int \operatorname{Cosec} u \cdot \operatorname{Cotg}^2 u du = 2\sqrt{2} \int \operatorname{Cotg} u \operatorname{Cosec} u \cdot \operatorname{Cotg} u du =$$

$$= 2\sqrt{2} \int \operatorname{Cotg} u \cdot [-d(\operatorname{Cosec} u)] + C = -2\sqrt{2} \cdot \left[\frac{1}{2} \operatorname{Cosec} u \sqrt{\operatorname{Cosec}^2 u - 1} - \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left| \operatorname{Cosec} u + \sqrt{\operatorname{Cosec}^2 u - 1} \right| \right] + C =$$

$$= 2\sqrt{2} \int \sqrt{\operatorname{Cosec}^2 u - 1} \cdot [-d(\operatorname{Cosec} u)] = -\sqrt{2} \cdot \operatorname{Cosec} u \sqrt{\operatorname{Cosec}^2 u - 1} + \sqrt{2} \operatorname{Ln} \left| \operatorname{Cosec} u + \sqrt{\operatorname{Cosec}^2 u - 1} \right| + C = (***)$$

NOTA: en (***) se aplicó la fórmula elemental $\int \sqrt{u^2 - a^2} du = \frac{1}{2} u \sqrt{u^2 - a^2} - \frac{1}{2} a^2 \operatorname{Ln} \left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| + C$.

Devolviendo el cambio 2:

$$t = \sqrt{2} \operatorname{Sec} u \Rightarrow \operatorname{Sec} u = \frac{t}{\sqrt{2}} \Rightarrow \operatorname{Cos} u = \frac{\sqrt{2}}{t} \Rightarrow u = \operatorname{ArcCos} \left(\frac{\sqrt{2}}{t} \right) = \operatorname{Cos}^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}}{t} \right)$$

Devolviendo el cambio 1:

$$u = \operatorname{Cos}^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}}{t} \right) \Rightarrow u = \operatorname{Cos}^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{2x}{x+1}}} \right) \Rightarrow u = \operatorname{Cos}^{-1} \left(\sqrt{\frac{x+1}{x}} \right)$$

Volviendo a (***):

$$I_2 = -\sqrt{2} \cdot \operatorname{Cosec} \left[\operatorname{Cos}^{-1} \left(\sqrt{\frac{x+1}{x}} \right) \right] \sqrt{\operatorname{Cosec}^2 \left[\operatorname{Cos}^{-1} \left(\sqrt{\frac{x+1}{x}} \right) \right] - 1} + \sqrt{2} \operatorname{Ln} \left| \operatorname{Cosec} \left[\operatorname{Cos}^{-1} \left(\sqrt{\frac{x+1}{x}} \right) \right] + \sqrt{\operatorname{Cosec}^2 \left[\operatorname{Cos}^{-1} \left(\sqrt{\frac{x+1}{x}} \right) \right] - 1} \right| + C_2.$$

Volviendo a (*):

$$(*) = I = 4I_1 + 8I_2 =$$

$$= \sqrt{2} \operatorname{Ln} \left| \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} \right| - \sqrt{2} \cdot \operatorname{Cosec} \left[\operatorname{Cos}^{-1} \left(\sqrt{\frac{x+1}{x}} \right) \right] \sqrt{\operatorname{Cosec}^2 \left[\operatorname{Cos}^{-1} \left(\sqrt{\frac{x+1}{x}} \right) \right] - 1} + \sqrt{2} \operatorname{Ln} \left| \operatorname{Cosec} \left[\operatorname{Cos}^{-1} \left(\sqrt{\frac{x+1}{x}} \right) \right] + \sqrt{\operatorname{Cosec}^2 \left[\operatorname{Cos}^{-1} \left(\sqrt{\frac{x+1}{x}} \right) \right] - 1} \right| + C$$

$$= \sqrt{2} \left\{ \operatorname{Ln} \left| \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} \right| - \operatorname{Cosec} \left[\operatorname{Cos}^{-1} \left(\sqrt{\frac{x+1}{x}} \right) \right] \sqrt{\operatorname{Cosec}^2 \left[\operatorname{Cos}^{-1} \left(\sqrt{\frac{x+1}{x}} \right) \right] - 1} + \operatorname{Ln} \left| \operatorname{Cosec} \left[\operatorname{Cos}^{-1} \left(\sqrt{\frac{x+1}{x}} \right) \right] + \sqrt{\operatorname{Cosec}^2 \left[\operatorname{Cos}^{-1} \left(\sqrt{\frac{x+1}{x}} \right) \right] - 1} \right| \right\} + C$$

L.Q.Q.C.

Ejercicios propuestos.-

I. - Comprobar que:

- 1) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4+x^2}} = -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + C$
- 2) $\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x} = 3 \operatorname{Ln} \left| \frac{3-\sqrt{9-4x^2}}{2x} \right| + \sqrt{9-4x^2} + C$
- 3) $\int \frac{dx}{x \sqrt{9+4x^2}} = \frac{1}{3} \operatorname{Ln} \left| \frac{\sqrt{9+4x^2}-3}{2x} \right| + C$
- 4) $\int \frac{dx}{x \sqrt{1+x^2}} = \operatorname{Ln} \left| \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \right| + C$
- 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+13}} = \operatorname{Ln} \left| \frac{\sqrt{9+(x-2)^2}+x-2}{3} \right| + C$
- 6) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} - \frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{3} + C$
- 7) $\int \frac{5e^x dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = 5 \operatorname{Ln} \left| \sqrt{1+e^{2x}} + e^x \right| + C$
- 8) $\int \frac{dx}{\left(\sqrt{4x^2-24x+27} \right)^3} = -\frac{x-3}{9 \cdot \sqrt{4x^2-24x+27}} + C$
- 9) $\int \frac{dx}{\sqrt{(4x-x^2)^3}} = \frac{x-2}{4 \cdot \sqrt{4x-x^2}} + C$
- 10) $\int x^3 \cdot \sqrt{a^2 x^2 + b^2} dx = \frac{\sqrt{(a^2 x^2 + b^2)^3}}{5a^4} - \frac{b^2 \cdot \sqrt{(a^2 x^2 + b^2)^3}}{3a^4} + C$
- 11) $\int \frac{dx}{x^4 \cdot \sqrt{16+x^2}} = -\frac{(16+x^2) \cdot \sqrt{16+x^2}}{768x^3} + \frac{\sqrt{16+x^2}}{256x} + C$

- 12) $\int \frac{dx}{(8-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{64 \cdot \sqrt{8-x^2}} + \frac{x^3}{192 \cdot (8-x^2) \cdot \sqrt{8-x^2}} + C$
- 13) $\int \frac{dx}{(\sqrt{4x^2-24x+27})^3} = \text{Ln} \left| \frac{2x-9}{\sqrt{4x^2-24x+27}} \right| + C$
- 14) $\int \frac{x^2}{\sqrt{81-x^2}} dx = \frac{81}{2} \text{ArcSen} \left(\frac{x}{9} \right) - \frac{x \cdot \sqrt{81-x^2}}{2} + C$
- 15) $\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{9-x^2}} = -\frac{1}{9} \cdot \sqrt{\frac{9-x^2}{x^2}} + C$
- 16) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2-16}} dx = \sqrt{x^2-16} + \text{Ln} \left(x + \sqrt{x^2-16} \right)^2 + C$
- 17) $\int \frac{dx}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{x^2+4}} + C$
- 18) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \text{ArcSen} \left(\frac{\sqrt{5}x}{5} \right) + C$
- 19) $\int \frac{dx}{(x+2) \cdot \sqrt{x^2+4x+8}} = \text{Ln} \left| \sqrt{\sqrt{4+(x+2)^2} + x+2} \right| + C$
- 20) $\int \sqrt{v^2+3} dv = \frac{v \cdot \sqrt{3+v^2}}{2} + \text{Ln} \left| \sqrt{3+v^2} + v \right| + \text{Ln} \left| \sqrt{\sqrt{3+v^2} + v} \right| + C$
- 21) $\int \frac{dx}{x^4+4x^2+4} = \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \text{ArcTg} \left(\frac{\sqrt{2}x}{2} \right) + \frac{x}{2 \cdot (x^2+2)} + C$
- 22) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}} dx = \text{ArcSen} \left(\frac{\sqrt{2}x}{2} \right) - \frac{x \cdot \sqrt{2-x^2}}{2} + C$
- 23) $\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x} dx = 3 \cdot \text{Ln} \left| 3 - \sqrt{9-4x^2} \right| - \text{Ln} \left| 8x^3 \right| + \sqrt{9-4x^2} + C$
- 24) $\int \sqrt{2x-x^2} dx = \frac{1}{2} \text{ArcSen} \left(\sqrt{\frac{x}{2}} \right) - \frac{(1-x) \cdot \sqrt{2x-x^2}}{2} + C$
- 25) $\int \frac{x^2 dx}{(4+x^2)^2} = \frac{1}{16} x \cdot \sqrt{4+x^2} - \frac{1}{4} \text{Ln} \left| \sqrt{4+x^2} + x \right| + C$
- 26) $\int \frac{x}{\sqrt{4x-x^2}} dx = 4 \cdot \text{ArcSen} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} \right) - \sqrt{4x-x^2} + C$
- 27) $\int \frac{(25-x^2)^{\frac{3}{2}}}{x} dx = 125 \text{Ln} \left| \frac{5-\sqrt{25-x^2}}{x} \right| + \frac{249}{5} \cdot \sqrt{25-x^2} + \frac{\sqrt{(25-x^2)^3}}{3} + C$
- 28) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4x+2}} dx = (x-6) \cdot \sqrt{x^2-4x+2} + 5 \text{Ln} \left| x-2 + \sqrt{x^2-4x+2} \right| + C$
- 29) $\int \left(\frac{\sqrt{9-4x^2}}{x} + \frac{1}{x \cdot \sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+2x-3}} \right) dx = \text{Ln} \left| \frac{(3-\sqrt{9-4x^2})^3 \cdot (\sqrt{1+x^2}-1) \cdot [(x+1)+\sqrt{x^2+2x-3}]}{8x^4} \right| + \sqrt{9-4x^2} + C$
- 30) $\int \left(\frac{x-2}{\sqrt{9-3x^2}} + \frac{x}{\sqrt{5+2x^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2-5}} \right) dx = \frac{1}{2} \sqrt{5+2x^2} - \sqrt{x^2-5} - \frac{\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \text{ArcSen} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} x \right) + C$
- 31) $\int \frac{dx}{x^6+3x^4+3x^2+1} = \frac{3}{8} \text{ArcTg}(x) + \frac{x}{2 \cdot (1+x^2)} \cdot \left[1 + \frac{1-x^2}{4 \cdot (1+x^2)} \right] + C$

II.- Utilizando la técnica de Integración por Sustituciones Trigonómicas, comprobar las siguientes igualdades:

$$1) \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \text{ArcSen} \frac{u}{a} + C$$

$$2) \int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \text{Ln} \left| u + \sqrt{a^2 + u^2} \right| + C$$

$$3) \int \sqrt{u^2 - a^2} du = \frac{1}{2} u \sqrt{u^2 - a^2} - \frac{1}{2} a^2 \text{Ln} \left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| + C$$

$$4) \int \frac{du}{u \sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \text{ArcSec} \frac{u}{a} + C$$

$$5) \int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{1}{2} u \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{1}{2} a^2 \text{ArcSen} \frac{u}{a} + C$$

$$6) \int \sqrt{u^2 + a^2} du = \frac{1}{2} u \sqrt{u^2 + a^2} + \frac{1}{2} a^2 \text{Ln} \left(u + \sqrt{u^2 + a^2} \right) + C$$

III.- Obtenga:

$$1) \int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$2) \int \frac{xdx}{\sqrt{7 + 3x^2}}$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{9 - 4x^2}}$$

$$4) \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 5}}$$

$$5) \int \frac{(x - 2)dx}{\sqrt{8x^2 - 16}}$$

$$6) \int \frac{\sqrt{x^2 + 1} \cdot dx}{x}$$

$$7) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{5 - x^2}}$$

$$8) \int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} \cdot dx$$

$$9) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}}$$

$$10) \int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x} \cdot dx$$

$$11) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$12) \int \frac{xdx}{\sqrt{-x^2 + 4x + 4}}$$

$$13) \int \frac{\sqrt{36 - (x + 3)^2}}{x + 3} dx$$

$$14) \int \frac{dx}{(81 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$15) \int \frac{dx}{(81 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$16) \int (x^2 - 7)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$17) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$18) \int (x^2 + 121)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$19) \int \frac{dx}{(25 - x^2)^2}$$

$$20) \int \frac{dx}{x(x^2 - 36)^2}$$

$$21) \int (x^2 - 6)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$22) \int (17 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$23) \int (35 - x^2)^{\frac{5}{2}} dx$$

$$24) \int \frac{dx}{(x^2 + 8x + 21)^{\frac{3}{2}}}$$

$$25) \int \frac{dx}{(-x^2 + 6x + 5)^{\frac{3}{2}}}$$

$$26) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 10x + 10}}$$

$$27) \int \frac{(x - 1)^2 dx}{\sqrt{8 - x^2 + 2x}}$$

$$28) \int \sqrt{x^2 + 14x + 52} dx$$

$$29) \int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2x - 8}} dx$$

$$30) \int \frac{dz}{(z^2 - 6z + 18)^{\frac{3}{2}}}$$

$$31) \int \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 25}} dx$$

(Sugerencia : Haga $e^x = v$ y factorice el radicando)

$$32) \int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} + 2e^x - 3}}$$

(Sugerencia : Haga $e^x = v$ y factorice el radicando)

$$33) \int e^x \sqrt{e^{2x} + 2e^x + 5} dx$$

(Sugerencia : Haga $e^x = v$ y factorice el radicando)

$$34) \int \frac{e^{-x} dx}{(9e^{-2x} + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

(Sugerencia : Haga $e^x = v$)

$$35) \int \frac{\sqrt{16 - e^{2x}}}{e^x} dx$$

(Sugerencia : Haga $e^x = v$)

FÍSICOS NOTABLES

Hideki Yukawa

Nació el 23 de enero de 1907 en Tokio, y murió el 8 de septiembre de 1981 en Kioto, Prefectura de Kioto; ambas localidades en Japón.

Ganador en 1949 del Premio Nobel en Física.

Por formular la hipótesis de los mesones, basada en trabajos teóricos sobre fuerzas nucleares.



HIDEKI YUKAWA
(1907-1981)

Fuente: Biografiasyvidas - Wikipedia

Tras licenciarse por la Universidad Imperial de Kioto en 1929, empezó a desempeñar allí tareas docentes, hasta que, en 1933, se trasladó a la Universidad Imperial de Osaka, donde trabajó como profesor ayudante (1936-1939) y obtuvo el grado de doctor (1938).

En 1939 regresó a la Universidad de Kioto como catedrático de Física Teórica, cargo que desempeñó hasta que, en 1950, pasó a ser Profesor Emérito. Tras una estancia en el Institute for Advanced Study de Princeton (1948), fue profesor visitante en la Columbia University de Nueva York (1949-1953), para regresar de nuevo al Japón como director del Instituto de Investigación para la Física Fundamental de Kioto (1953-1970).

Atraído por la investigación teórica en el campo de la física atómica desde 1929, Hideki Yukawa elaboró una nueva teoría de las fuerzas nucleares y, en 1935, predijo la existencia de un nuevo tipo de partículas, los mesones, con masa intermedia entre la del protón y la del electrón, y responsables de mantener a protones y neutrones unidos en el núcleo atómico.

En 1937 se descubrió la existencia en los rayos cósmicos de partículas con masa intermedia entre el electrón y el protón; en 1947, C. F. Powell identificó fotográficamente los llamados mesones pi o piones. Yukawa mereció el Premio Nobel de Física en 1949. Ese mismo año, en el mes de julio, había publicado en la *Review of Modern Physics* un artículo con el título de *Modelos y métodos en la teoría mesónica*.



HIDEKI YUKAWA

Imágenes obtenidas de:



QUÍMICOS DESTACADOS

Glenn Theodore Seaborg

Nació el 19 de abril de 1912 en Ishpeming, Michigan; y murió el 25 de febrero de 1999 en Lafayette, California; ambas localidades en EE. UU.

Ganador del Premio Nobel en Química en 1951.

Por sus descubrimientos en la química de los elementos transuránicos.

Compartió el premio con Edwin Mattison McMillan.

FUENTES: www.mcnbiografias.com - Biografiasyvidas - Wikipedia



GLENN THEODORE SEABORG
(1912-1999)

Cursó estudios en la Universidad de California. Desde 1939 ejerció como profesor de química en la universidad y fue profesor ayudante en 1941 y profesor titular en 1945. Seaborg se integró en 1941 en el Proyecto Manhattan, cuando ya era un investigador de prestigio en la Universidad de California en Berkeley, donde se había doctorado en 1937. Entre 1942 y 1946 estuvo al mando de la investigación sobre física y química nuclear relacionada con el Proyecto Manhattan en el Laboratorio Metalúrgico de la Universidad de Chicago.

Demostó que era posible el aislamiento de grandes cantidades de elementos pesados, con el núcleo repleto de un alto volumen de protones. Un año más tarde, logró la cantidad suficiente de un nuevo elemento, el plutonio-239 (número de protones), creado a partir de la transmutación de un isótopo de uranio, capaz de ser visto a través de un microscopio. Esta sustancia fue utilizada en 1945 en la bomba que destruyó la ciudad japonesa de Nagasaki (en Hiroshima se usó una bomba gemela de uranio).

Entre 1961 y 1967 fue Presidente de la Comisión de Energía Atómica, algún tiempo después ejerció como profesor de la Universidad de California, Berkeley, y director adjunto del Laboratorio Lawrence Berkeley. Reconocido, por hallar la caracterización de muchos isótopos radiactivos y por su participación en el descubrimiento de elementos transuránicos tales como el plutonio, el americio, el curio, el berquelio, el californio, el einstenio, el fermio, el mendelevio y el nobelio.

Le concedieron en 1951 el Premio Nobel de Química, que compartió con el físico estadounidense Edwin McMillan.



GLENN THEODORE SEABORG

Imágenes obtenidas de:



QUÍMICOS DESTACADOS

Edwin Mattison McMillan

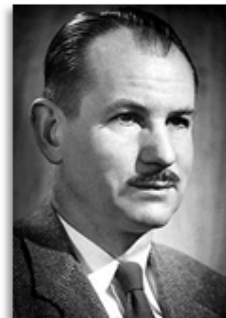
Nació el 18 de septiembre de 1907 en Redondo Beach; y murió el 7 de septiembre de 1991 en El Cerrito; ambas localidades en California, EE. UU.

Ganador del Premio Nobel en Química en 1951.

Por la creación de los primeros elementos transuránicos.

Compartió el premio con Glenn Theodore Seaborg.

FUENTE: Wikipedia



EDWIN MATTISON McMILLAN
(1907-1991)

Físico nuclear y químico. Formado en el California Institute of Technology, McMillan se doctoró por la Universidad de Princeton en 1932. En 1946 logró una plaza de profesor en la Universidad de California, en el campus de Berkeley.

En el desarrollo de sus estudios sobre la fisión del núcleo atómico, descubrió el neptunio, uno de los productos de desintegración del isótopo 239 del uranio. En 1940, en colaboración con Philip H. Abelson, logró aislar este nuevo elemento, el primero perteneciente a la serie de los transuránicos, de particular importancia en energía nuclear.

Durante la Segunda Guerra Mundial, McMillan colaboró en el perfeccionamiento del sonar y de los radares de espionaje, y participó en la fabricación de la primera bomba atómica. En 1945 consiguió superar los límites teóricos de las velocidades de las partículas aceleradas en un ciclotrón y, de forma independiente del científico ruso Vladimir I. Veksler, encontró el modo de mantener la sincronización para velocidades indefinidas.

Desde 1954 hasta 1958 formó parte de la comisión gubernamental de Estados Unidos para el estudio de la energía atómica y, en 1958, fue nombrado director del Lawrence Radiation Laboratory, desde donde puso en marcha varias investigaciones. Presidió, además, la estadounidense Academia Nacional de las Ciencias, entre 1968 y 1971.

McMillan apostó durante toda su carrera por el progreso de la energía atómica y por sus posibles aplicaciones *a posteriori*. En reconocimiento a su labor científica, compartió el Premio Nobel de Química con su compatriota Glenn T. Seaborg, en la edición de 1951. Se retiró del mundo académico en 1973 y, en 1976, publicó un libro de memorias titulado *Early days in the Lawrence Laboratory (Los primeros días en el Laboratorio Lawrence)*. Gran parte de sus teorías científicas quedaron plasmadas en la obra colectiva *Lecture in nuclear physics (Conferencias sobre física nuclear)*, editada en el año 1947. Cabe citar también su obra *El sincrotrón. Propuesta para un acelerador de partículas de alta energía*.



EDWIN MATTISON McMILLAN

Imágenes obtenidas de:



Grandes aventureros de la ciencia

POR: Javier Yanes (@yanes68) para Ventana al Conocimiento

Ciencia y exploración siempre han formado una simbiosis provechosa. Desde que existe la historia, el ser humano ha aplicado el conocimiento de cada época al descubrimiento de nuevos mundos, y a su vez la exploración ha contribuido al progreso de la ciencia, ayudándonos a comprender la naturaleza y a desarrollar nuevas tecnologías. Aunque hoy ya no quedan espacios blancos en el mapa, continuamos explorando nuestras últimas fronteras, los fondos oceánicos y el espacio extraterrestre. Parte de nuestra ciencia actual se la debemos a ellos: estos son algunos de los grandes aventureros que prestaron sus hombros para que podamos seguir mirando más allá.

CHARLES DARWIN.

A **Charles Darwin** (12 de febrero de 1809 – 19 de abril de 1882) difícilmente lo definiríamos como un aventurero. Y sin embargo, en un momento crucial de su vida en el que su mente práctica le llevó a elaborar una lista con las ventajas e inconvenientes de la decisión de casarse con su prima **Emma Wedgwood**, no solamente consideró que el matrimonio le robaría tiempo de sus lecturas o de sus discusiones científicas; también temió que unirse a una mujer le impediría “ver el continente, ir a América, volar en globo o hacer un viaje en solitario a Gales”, como él mismo escribió.

Lo cierto es que el naturalista inglés combinaba las cualidades del **académico** y el **explorador**: era un observador minucioso, un hombre pragmático y sistemático, pero durante su juventud le interesaba más cazar y montar a caballo que dedicarse a sus estudios. Solo realizó un único gran viaje en su vida; pero durante su periplo de casi cinco años alrededor del mundo a bordo del **HMS Beagle**, de 1831 a 1836, escaló montañas y recorrió a pie amplias regiones de Suramérica, donde no le faltó aventura: terremotos, enfermedades, erupciones volcánicas, incidentes con aborígenes e incluso insurrecciones.

La expedición del *Beagle* tenía como objetivo primario la **confección de cartas náuticas**. Pero su labor como naturalista le proporcionó el material científico necesario para gestar su gran obra, **la idea de la selección natural** como fuerza motriz de la evolución de las especies; **una teoría que revolucionó la comprensión humana de la naturaleza**.



RETRATO DE CHARLES DARWIN, A SU VUELTA DEL VIAJE EN EL BEAGLE. AUTOR: GEORGE RICHMOND.

JAMES COOK.

El capitán de la Royal Navy **James Cook** (7 de noviembre de 1728 – 14 de febrero de 1779) no parecía destinado por nacimiento a circunnavegar el globo y descubrir nuevos territorios, sino a ser granjero; esta era la ocupación de su padre, que ni siquiera era propietario de la tierra en la que trabajaba. Pero al joven Cook la vida campesina se le quedaba pequeña, y fue a los 16 años, trabajando como mozo en una mercería de una localidad costera, cuando sintió la llamada del mar. Comenzó su carrera en la marina mercante, y no sería hasta los 26 años cuando ingresó en la Armada británica.

Desde entonces su carrera despegó, gracias a su participación en la Guerra de los Siete Años (1756-1763) y a su formación **autodidacta en matemáticas y astronomía**. En 1766 el Almirantazgo le puso al mando de **una expedición científica al Pacífico**, cuyo propósito principal era registrar el tránsito de Venus frente al Sol para diseñar un método de medición de la longitud. En total Cook realizó **tres viajes alrededor del mundo** al mando de los navíos *Endeavour* y *Resolution*, de 1768 a 1779. En el segundo se le encomendó la misión, que resultaría infructuosa, de buscar el hipotético gran continente meridional conocido como *Terra Australis*.

A su regreso de esta expedición se le concedió un retiro honorario, pero Cook no pudo resistirse a embarcarse en un tercer viaje, destinado a encontrar el paso del noroeste que permitiría abrir una nueva ruta de navegación rodeando América por el norte. No lo logró, y durante aquella travesía encontró su fin: el 14 de febrero de 1779 caía abatido durante un conflicto con los nativos de Hawái.



RETRATO OFICIAL DEL CAPITÁN JAMES COOK. AUTOR: NATHANIEL DANCE-HOLLAND

SCOTT, Y AMUNDSEN.

Roald Amundsen fue uno de los grandes aventureros de la ciencia. Nacido hace hoy 145 años, interrumpió su carrera de Medicina para lanzarse a la conquista de los polos: localizó el Polo Norte magnético y fue el primero en llegar al Polo Sur, tras una legendaria pugna con Scott. Falleció en un rescate aéreo en el Ártico.

La carrera por **la conquista del Polo Sur** es uno de los episodios más conocidos de la historia de la exploración, y el momento culminante de la que ha venido en llamarse **la edad heroica de la exploración antártica**. Aquella competición histórica tuvo gloria y tragedia; la primera, para el noruego **Roald Amundsen**, que ganó la competición y regresó triunfante a Europa. Su oponente, el británico **Robert Falcon Scott**, no solo perdió la carrera, sino también la vida.



SCOTT (DE PIE, EN EL CENTRO) Y SU EQUIPO EN EL POLO SUR, DESPUÉS DE HABER DESCUBIERTO QUE AMUNDSEN HABÍA LLEGADO ANTES. AUTOR FOTOGRAFIA: HENRY BOWERS.



ROALD AMUNDSEN

Scott (6 de junio de 1868 – 29 de marzo de 1912) era un oficial de la marina cuando se presentó voluntario para liderar la expedición británica a la Antártida; según sus biógrafos, más por un deseo de progresar en su carrera que por vocación de exploración polar. Su primer viaje, entre 1901 y 1904, logró establecer un récord de latitud sur, pero sin conquistar el polo. En su segundo intento en 1910, Scott se encontró enfrentado a un poderoso rival.

Amundsen (16 de julio de 1872 – 18 de junio de 1928) era un marino, de familia de marinos, que también contaba con experiencia antártica y que pocos años antes había abierto por primera vez el paso del noroeste rodeando América por el Ártico. Amundsen clavaría la bandera noruega en el Polo Sur el 14 de diciembre de 1911. La partida de Scott, retrasada por las decisiones erróneas y el infortunio, fue siempre por detrás, y llegaría para descubrir el triunfo de su rival el 17 de enero de 1912. Amundsen logró regresar sin problemas, mientras que Scott y sus cuatro compañeros sucumbieron al agotamiento, el hambre y el frío. Sus cuerpos fueron recuperados en noviembre de aquel año.

ERNEST SHACKLETON.

La figura de **Ernest Shackleton** (15 de febrero de 1874 – 5 de enero de 1922) quedó eclipsada en su día por la pugna entre Amundsen y Scott. Y sin embargo, el tiempo ha conservado su hazaña de supervivencia en el hielo como una de las mayores gestas del espíritu humano. El angloirlandés Shackleton tuvo vocación aventurera desde joven, y a los 16 años se enroló en la marina. Su primera acción destacada fue como tercer oficial de la expedición de Robert Falcon Scott en 1901 al Polo Sur, de la que tuvo que regresar prematuramente en 1903 por enfermedad; aunque algunos biógrafos sospechan que Scott quiso deshacerse de él por los celos que le producía su popularidad. Shackleton era un líder, y a su regreso a Inglaterra no encontró acomodo en ninguna de las ocupaciones que tanteó, desde el periodismo a la política o la empresa.

Todo ello le llevó a partir de nuevo en 1907 con la intención de alcanzar el Polo Sur, sin éxito. En 1914, y con el polo ya conquistado por el noruego Roald Amundsen, Shackleton emprendió la ambiciosa **Expedición Imperial Transantártica**, con el objetivo de cruzar el continente blanco en un viaje de 2.900 kilómetros. Pero la verdadera odisea del explorador comenzó el 19 de enero de 1915, cuando su buque, el **Endurance**, quedó atrapado en el hielo. Así comenzó una angustiosa lucha por la supervivencia durante 497 días, hasta que la expedición pisó tierra firme en la isla Elefante, a 557 kilómetros del lugar del naufragio.

Shackleton regresó a Inglaterra en 1917, ya enfermo del corazón, que finalmente le falló durante su último viaje en las islas Georgias del Sur. Un estudio reciente ha sugerido que tal vez el explorador padecía un defecto cardíaco congénito, una malformación que le comunicaba ambas aurículas.



SHACKLETON DURANTE SU EXPEDICIÓN NIMROD A LA ANTÁRTIDA (1907-1909). CRÉDITO IMAGEN: ALFRED WEGENER INSTITUTE FOR POLAR AND MARINE RESEARCH.

THOR HEYERDAHL.

El nombre del noruego **Thor Heyerdahl** (6 de octubre de 1914 – 18 de abril de 2002) está inevitablemente ligado al de su embarcación, la **Kon-Tiki**, y a la travesía que esta logró completar en 1947 desde la costa de Perú al archipiélago de Tuamotu en la Polinesia Francesa; un viaje transpacífico de 101 días y 6.900 kilómetros en una balsa de madera construida artesanalmente. Suele decirse que se completó utilizando exclusivamente equipo y tecnología precolombinos. Lo cual no es del todo cierto, ya que Heyerdahl y sus cinco acompañantes llevaban algunos instrumentos modernos, como radio, cuchillos, relojes y sextantes, además de apoyarse en cartas de navegación y de contar con bidones de agua y alimentos enlatados.

Tampoco ha oscurecido su leyenda el hecho de que probablemente la teoría que trataba de demostrar era errónea. Heyerdahl se interesó desde joven por la antropología y la zoología del Pacífico, y sus estudios le llevaron a proponer la idea de que la Polinesia se colonizó desde la costa de Suramérica. El éxito de la expedición *Kon-Tiki* demostró que el viaje era factible; pero las pruebas genéticas, no disponibles en aquella época, han avalado la hipótesis tradicional de que **la Polinesia se pobló de oeste a este, desde la costa de Asia**.

Aunque Heyerdahl puso gran empeño en la demostración de sus teorías antropológicas, sus postulados nunca han sido probados, y su relación con la comunidad científica siempre fue incómoda. Hoy se le recuerda más como **gran explorador y aventurero** que como un investigador académico solvente.

ALFRED WEGENER.

Si Alfred Lothar Wegener (1 de noviembre de 1880 – ¿? noviembre de 1930) volviera a la vida, tal vez no se sorprendería de que su **teoría de la deriva continental** hoy figure en todos los libros de texto de ciencias; él nunca flaqueó en el convencimiento de que su hipótesis era correcta, que todos los continentes actuales estuvieron un día unidos en una sola masa de tierra, **Pangea**. Y ello a pesar de que este meteorólogo alemán sufrió una de las campañas de descalificación más duras de la historia de la ciencia. Fue acusado de ser un arribista sin conocimientos de geología que padecía la “enfermedad de la corteza móvil”. Y esto por todo el estamento científico de su época, con pocas excepciones.

Pero cuando en 1910 Wegener hojeaba el atlas de un amigo, no pudo ignorar la observación de que **los bordes de los continentes encajaban entre sí como las piezas separadas de un puzzle**. No fue el primero en advertirlo, pero hasta entonces nadie se había atrevido a cuestionar **el dogma de que la geografía terrestre era estática**. Wegener se propuso montar el puzzle, y con él montó el escándalo. En 1912 presentó por primera vez su teoría, en conferencia y por escrito, y en 1915 la publicó en su libro *Die Entstehung der Kontinente und Ozeane (El origen de los continentes y los océanos)*, que continuaría revisando y actualizando hasta su muerte.

Wegener nunca vio aceptada su teoría en vida; sólo los **estudios de paleomagnetismo** en la década de 1950 comenzaron a convencer a todos de que los continentes se han desplazado a lo largo de la historia de la Tierra y aún continúan haciéndolo. Esto tal vez no habría sorprendido a Wegener, pero sí el hecho de que hoy no se le recuerde tanto como **explorador polar**. Porque no sólo participó en cuatro expediciones a Groenlandia, sino que en la última de ellas perdió la vida, cuando regresaba desde el interior de la isla a la costa. De hecho, y aunque su cuerpo fue encontrado el 12 de mayo de 1931 enterrado en la nieve por su acompañante inuit, nunca fue retirado de aquel lugar, y hoy su ubicación se ha perdido. También sus últimas notas, que su compañero nativo se llevó consigo antes de sufrir el mismo destino y perderse en el hielo para siempre.



FOTO COLOREADA DE LA EMBARCACIÓN KON-TIKI (1947). CRÉDITO IMAGEN: BIBLIOTECA NACIONAL DE NORUEGA.



FOTOGRAFÍA DE LA ÚLTIMA EXPEDICIÓN DE WEGENER EN GROENLANDIA. CRÉDITO IMAGEN: ARCHIVO DEL ALFRED WEGENER INSTITUTE.

El Maestro “Patepalo” y José Félix Ribas ⁽¹⁾

Por: LUIS ALBERTO LÓPEZ (alberticoelhijodenachalopez@yahoo.com)

La Real Epidemia de La Lengua

TOMADO DE: noticias-universitarias 15-08-2017

Cumpliendo fielmente con su sagrado oficio de maestro de escuela de pueblo rural, en tiempos de la dictadura Pérezjimenista y, contando con la aprobación de los representantes, el Maestro “Patepalo” imponía a fuerza de palmetazos, jalones de orejas, tinglones por las patillas⁽²⁾ y de arrodilladas prolongadas sobre nidos de bachacos, el rigor del orden y la obediencia.

Al Maestro “Patepalo”, lo llamaban así porque tenía una pierna amputada, donde se colocaba una estructura de madera similar a una pierna, hecha por el mismo, que le permitía desplazarse con soltura y elegancia. A pesar, de que su pierna la tenía amputada hasta la altura de la rodilla derecha, el Maestro “Patepalo” era un tremendo bailarín. Bailaba muy bien los vals de quince años, donde era solicitada su presencia. Cuando estaba pasado de tragos, exigía que le pusieran en el picó⁽³⁾ un disco llamado *Mambo Loco* que tocaba el músico colombiano Aníbal Velázquez. El furor de las fiestas alcanzaba niveles de paroxismos, cuando el Maestro “Patepalo”, en la mitad del baile de Mambo Loco, lanzaba el paso de la tijereta y abriendo las piernas hacia los lados, se dejaba caer al suelo y luego, meneando la cintura, sin ayuda de nadie, con las manos arribas, comenzaba a levantarse. Todo un espectáculo.

El Maestro “Patepalo”, sabía leer, escribir y las cuatro operaciones básicas de las matemáticas. Hablaba de las Guerras de la Independencia, del Río Orinoco, del Lago de Maracaibo, de Cristóbal Colón, de Santiago Mariño y, aun cuando era peligroso decir que se era Adeco, todo el mundo en el pueblo lo sabía. No se podía echar cuatro tragos de ron, cuando se le oía cantar: “En Venezuela hay un hombre, el hombre de las circunstancias y ese hombre y ese hombre es Don Rómulo Gallegos”.

El Maestro “Patepalo”, no me podía ver. Siempre me colocaba en sitios donde no me viera. Pero, no me pelaba: “Albertico: ¡Salga de ahí!” y comenzaba a preguntarme la tabla de multiplicar de manera salteada, como para que me equivocara intencionalmente, para luego pasarme a la sala de tortura: “Arrodílese en la esquina y diga bien alto: ¡No me vuelvo a portar mal!”. Primero, pase por aquí, que le voy a dar cien palmetazos en la mano izquierda y cien en la derecha. Ese era un castigo suave. Había otros castigos, donde, por lo general, algunos niños se orinaban, otros se desmayaban y hasta se defecaban en los pantalones. ¡Toda una gama de castigos ejemplares!

En una oportunidad, el Maestro “Patepalo” me cazó sobre una mata de “cirgüelas”⁽⁴⁾, llamó a todos los estudiantes y les pidió que se colocaran debajo del frondoso árbol, porque ahora sí que yo iba a conocer lo que era respetar. Cogiendo una varilla de guayaba entre sus manos, de esas que levantan la piel con cada pegada, me mandó que bajara de la mata y me arrodillara. Yo no sabía si evaporarme o salir volando. Temblando, baje hasta el suelo. Como pude, saque fuerzas, le quede mirando fijamente a los ojos y le grité en voz alta: ¡Si usted me pega, le juro que cuando yo sea grande le voy a hacer lo mismo que le hicieron al General José Félix Ribas! El Maestro “Patepalo” me quedó mirando con los ojos bien abiertos, se echó hacia atrás, se puso la mano izquierda en la barbilla, quedó en silencio durante un rato, miró a todos los estudiantes y a unas señoras que estaban asomadas por las empalizadas del patio y, en voz baja, me dijo al oído: “Puede irse para su casa”.

Al otro día, la escuela del Maestro “Patepalo” estaba cerrada. Nunca más supimos de él.

(1) **José Félix Ribas** (Caracas, 19 de septiembre de 1775 - Tucupido, Guárico, 31 de enero de 1815). Ilustre militar. General en Jefe y prócer de la Independencia de Venezuela de la corona española. La historia hace referencia que luego de ser derrotado en la Batalla de Maturín por el jefe realista Francisco Tomás Morales, al intentar huir fue capturado en los alrededores de la población de Valle de la Pascua, estado Guárico. El 31 de enero de 1815 fue fusilado en la Plaza mayor de la población guariqueña Tucupido. Su cuerpo fue desmembrado y su cabeza enviada a Caracas, donde las autoridades realistas la frieron y la colocaron en exhibición para desalentar a los patriotas.

(2) **“tinglones por las patillas”**: sujetar con los dedos de la mano el cabello de una de las sienes de una persona y jalar fuertemente causando dolor.

(3) **“picó”**: Nombre popular dado al equipo de sonido (básicamente constituido por un plato giratorio y un brazo con una aguja lectora que permitía la salida del sonido por cornetas de audio) utilizado con mucha frecuencia en los años finales del siglo XX para reproducir discos de acetatos, anteriores a los actuales CD.

(4) **“cirgüelas”**: Nombre criollo para la fruta del ciruelo, nombre común de varias especies arbóreas pertenecientes al subgénero *Prunus*. La ciruela es una drupa, es decir, un fruto carnoso con una única semilla rodeada de un endocarpo leñoso.

Venezuela, personajes, anécdotas e historia.

Antonio Guzmán Blanco



Antonio Guzmán Blanco nació en Caracas el 28 de febrero de 1829. Este año se cumplieron 190 años de su nacimiento. Fue presidente de la República en varias ocasiones entre 1870 y 1888. Se le reconoce como político y estadista. Fue jefe militar de la Guerra Federal, caudillo del Partido Liberal Amarillo. Contradictoriamente, a través de la historia se le reconoce como el "Autócrata Civilizador", el "Ilustre Americano", y el "Regenerador y Pacificador". Murió en París el 28 de julio de 1899 por lo que en este año también se ha de conmemorar 120 años de su fallecimiento.

Realizó estudios de Derecho en la Universidad Central de Venezuela. Sus posteriores viajes al extranjero le dieron experiencia en la política y en la administración pública. Estuvo en Estados Unidos como Secretario de la Legación de Venezuela en Washington.

Inició su carrera política y militar en 1859, cuando se originó la Guerra Federal y él se alineó al lado de Juan Crisóstomo Falcón y Ezequiel Zamora.

En 1873 fue electo Presidente de la República gobernando hasta 1877; este período se conoce como el nombre de Septenio; luego lo sucede Linares Alcántara, quien muere repentinamente encargándose Guzmán Blanco nuevamente de la Presidencia, desde 1879 hasta 1884, período conocido como el Quinquenio; de 1884 a 1886 gobernó Joaquín Crespo, tornando a mandar nuevamente Guzmán Blanco desde 1886 a 1888, período conocido con el nombre de Bienio.

En estos tres períodos presidenciales, a Guzmán Blanco se le consideró un autócrata, caracterizado por un gobierno personalista, en el que acomodaba la Constitución a sus intereses. A su favor, sin embargo, la historia lo reconoce como un civilizador, modernizador de la Venezuela de su época. Incrementó las vías de tránsito en el país, fomentó la agricultura y la instrucción, debiéndosele a él el decreto de instrucción pública, obligatoria y gratuita promulgado de 1870, además estimuló el comercio; además en la capital Caracas construyó el hoy Panteón Nacional, el Capitolio, teatros, iglesias, etc.

Entre las principales obras de gobierno guzmancista figuraron la declaratoria oficial del Gloria al Bravo Pueblo como himno nacional en 1881, la realización del II Censo Nacional, la inauguración del ferrocarril Caracas-La Guaira y la instalación de la Academia Venezolana de la Lengua en 1883.

También introdujo el servicio telefónico entre Caracas-La Guaira, mejoró la red de carreteras, ferrocarriles, líneas de navegación, correos y telégrafos. Estableció el sistema métrico de pesas y medidas y fundó un servicio nacional de estadísticas. Hizo levantar mapas, censos e inventarios de la nación, y de esta manera, estableció una economía, si no floreciente, al menos estable.

Guzmán Blanco rebajó los impuestos de importación en un 70% y eliminó prácticamente los de exportación. Igualmente suprimió los peajes y derechos de cabotaje que se cobraba al comercio interior, por llevar las mercancías de un sitio a otro de la República.

Mitos universales develados (Parte 2 y última)

TOMADO DE: MSN

Algunas cosas que son repetidas hasta el cansancio no son ciertas y esto aplica para la ciencia, la historia y la cultura. Mira la verdad de algunos mitos universales que escuchas todos los días.

¡DESPIERTA!

Comúnmente se dice que despertar a un sonámbulo puede generarle un shock, pero los especialistas señalan que corren más peligro de hacerse daño si no se les despierta.



LOS CUERNOS LLEGARON DESPUÉS.

Los vikingos no usaban cascos con cuernos, ese tipo de casco fue diseñado para una ópera en el siglo XIX.



¿100 AÑOS?

La guerra de los 100 años en realidad duró 116.



¿BAJITO?

Napoleón Bonaparte no era precisamente bajito, se cree que medía 1,68 metros. Lo que al parecer no era superior al promedio de estatura de un francés de la época.



CONFUSIÓN DESAFORTUNADA.

El asesino conocido como el estrangulador de Boston sólo mató de esa manera a su primera víctima, las otras 12 murieron a golpes o a puñaladas.



MILLONES DE AÑOS DE DIFERENCIA.

El ser humano nunca convivió con los dinosaurios, aunque muchos tienen la idea de que así fue. Entre la extinción de los dinosaurios y la aparición de los humanos, hay unos 64 millones de años de diferencia.



MENTIRAS DEL CINE.

El actor Dooley Wilson no tocó el piano en la película Casablanca, en donde interpretó el papel de “Sam”. Él solo cantó.



ALTERNATIVA, NO INVENCIÓN.

La guillotina no es un invento del francés Joseph Ignace Guillotin, lo que hizo fue proponerla como método de ejecución a la Asamblea Nacional Francesa para evitar el sufrimiento de los condenados.



EL PRIMER ANIMAL EN EL ESPACIO NO FUE LAIKA.

Aunque se cree que la perrita Laika fue el primer animal en ir al espacio, no fue así. Antes de ella, los estadounidenses enviaron fuera de la órbita a una mosca de fruta dentro de un cohete.



DESIERTO HELADO.

De acuerdo con su promedio de precipitación anual (de 5 milímetros al año), podría considerarse al Polo Sur el desierto más grande del mundo. En el Sahara el promedio de precipitación es de 127 milímetros anuales.



SÍ HAY ALGO MÁS ALTO QUE EL EVEREST.

Mauna Kea es el nombre de un volcán que es más grande que el Everest, mide unos 10 mil metros, pero como unos 6 mil de esos metros está bajo el agua, se sigue considerando al famoso Everest el más alto del mundo.



PUNTO DE EBULLICIÓN.

El agua no hierve siempre a 100 grados centígrados, en el Everest lo hace a 71 grados debido a la altitud.



ORIGEN LEJANO.

Los tulipanes no son originarios de Holanda, llegaron a dicho país llevados por un jardinero vienés, pero en realidad son de origen turco.



LAS AVES TIENEN LIMITADO EL OLFATO.

Los pájaros bebés no serán abandonados por sus padres si huelen a humano. Las aves tienen limitado su sentido del olfato y el olor de una persona no alteraría su comportamiento con las crías.



¿ESCOCESA?

La gaita no es de origen Escocés, sino de Medio Oriente.



EL ORIGEN DE LA PASTA.

Fueron los árabes los que llevaron la pasta al continente europeo, no Marco Polo como se cree.



DESEMPEÑO DE ATLETAS.

No hay evidencia de que la actividad sexual disminuya la habilidad de un atleta, incluso el hecho de que durante la práctica se incrementa la testosterona podría sugerirse que les ayudaría a su desempeño.



NO ERA DE IRLANDA.

San Patricio en realidad era de Escocia, pero en su adolescencia fue raptado por piratas y llevado a Irlanda, en donde lo vendieron como esclavo.



EL CREADOR DE MICKEY.

Aunque muchos todavía creen que el famoso ratón “Mickey Mouse” fue creado por Walt Disney, la realidad es que el genio de las películas infantiles no sabía dibujar. El creador del personaje fue el dibujante Ub Wickers.



GALERÍA



Srinivasa Varadhan*

Imágenes obtenidas de:



Nació el 2 de Enero de 1940 en Madrás (ahora Chennai), India.

*Para el momento que se elaboró esta reseña biográfica de Srinivasa Varadhan, año 2017, no se tenía información sobre si había fallecido o no.

Sathamangalam Ranga Iyengar Srinivasa Varadhan. Es conocido como S. R. S. Varadhan para abreviar su nombre y llamado Raghu por sus amigos y colegas. Su padre, Ranga Iyengar, fue profesor de Ciencias quien se convirtió en el director de la Junta Preparatoria en Ponneri, un pequeño pueblo cerca 30 kilómetros de Chennai (antiguamente llamado Madrás). Varadhan, en la referencia [12], agradeció a sus padres por su apoyo cuando él estaba creciendo:

La educación siempre tuvo alta prioridad en nuestra casa y recibí el aliento constante de mis padres.

Explicó en la referencia [10], cómo llegó a interesarse por las matemáticas en el Colegio:

En secundaria tuve un profesor de matemáticas excelente quien pidió a algunos de sus mejores estudiantes que fuéramos a su casa durante los fines de semana, el sábado o el domingo y nos asignó problemas extras para trabajarlos. Pensamos en estos problemas tan intelectuales como juegos a jugar, y no como un examen; fueron más para el disfrute. Eso me dio la idea de que las matemáticas son algo que puedes hacer como jugar al ajedrez o resolver rompecabezas. Esta actitud nos hizo las matemáticas un tema mucho más agradable, no algo que temer y que jugó un papel importante en mi interés por ellas.

Después de graduarse en la secundaria en 1955, Varadhan entró al Colegio Universitario Presidencial de la Universidad de Madrás. Eligió estudiar para graduarse en estadística en lugar de matemáticas. La razón de esto fue que el grado de matemáticas consistía en matemática pura y aplicada mientras que el grado de estadística incluía matemática aplicada a la estadística y también los mismos cursos de matemática pura. En esta etapa de su carrera Varadhan pensó que esta formación le permitiría entrar a trabajar en la industria después de graduarse y sentía que sus perspectivas eran mucho mejores con el grado de estadística. Logró su Licenciatura en Estadísticas con honores en 1959 y continuó un quinto año más de estudio, lo que le permitió obtener una Maestría en 1960. Luego pasó al Instituto Estadístico Indio en Kolkata (Calcuta) aunque en esta etapa todavía mantenía la idea que podía encontrar un trabajo en la industria [10]:

Me dijeron que debía trabajar en control de calidad estadístico, por lo que pasé cerca de 6 u 8 meses estudiándolo; lo que al final, me dejó totalmente satisfecho. Luego conocí a Varadarajan, Parthasarathy y Ranga Rao, quienes trabajaban en probabilidad desde un punto de vista totalmente matemático. Me convencieron que yo no malgastara mi tiempo útil, y que mejor aprendiera algo de matemáticas si quería hacer cualquier cosa en todo. Me interesé, y creo que al segundo año de estar allí, nos dijimos nosotros mismos: Pongámonos a trabajar en un problema. Elegimos un problema relativo a distribuciones de probabilidad sobre grupos. Lo iniciamos; finalmente resolvimos el problema y en el proceso también aprendimos las herramientas que eran necesarias para hacerlo.

En el Instituto Estadístico Indio, el tutor de Varadhan fue Calyampudi Radhakrishna Rao pero esto fue sólo un formalismo porque la tesis de Varadhan fue elaborándose como producto de las interacciones que mantenía con sus colegas. Recibió su doctorado por su tesis *Convolution Properties of Distributions on Topological Groups* (Propiedades de convolución de las distribuciones sobre grupos topológicos) en 1963. De hecho, Andrei Nikolaevich Kolmogorov pasó un mes en el Instituto de Estadística Indio en 1962 y fue nombrado como miembro del jurado examinador de la tesis de Varadhan. Él se regresó a Moscú con la tesis y después envió su informe (referencia [10]), en el que decía:

Este no es el trabajo de un estudiante, sino de un maestro maduro.

Después de obtener el doctorado, Varadhan fue como visitante posdoctoral al Instituto Courant de Ciencias Matemáticas en la Universidad de Nueva York, cargo que desempeñó durante tres años (1963-1966). Daniel Stroock, quien colaboró con él durante muchos años, escribió sobre la llegada de Varadhan (referencia [11]):

Varadhan, a quien todo el mundo llama Raghu, llegó a estas costas desde su nativa India en el otoño de 1963. Llegó en avión al aeropuerto de Idlewild y procedió ir a Manhattan en bus... Su destino era esa famosa institución con el modesto nombre de Instituto Courant de Ciencias Matemáticas, donde, a instancias de Donsker Monroe, le habían dado una beca postdoctoral.

En 1964 se casó con Vasundra, quien nació en 1947 en Chennai, India, pero había pasado la mayor parte de los primeros doce años de su vida en Nueva York. Vasu, como Srinivasa Varadhan, se convirtió en profesora de la Universidad de Nueva York. Tuvieron dos hijos, Gopal (nacido en 1969) y su hermano menor Ashok. Gopal se unió a Cantor Fitzgerald como Director General de sus negocios derivados de las tasas de interés en Estados Unidos en agosto de 2001, muriendo poco después en la Torre Norte del World Trade Center tras el atentado terrorista del 11 de septiembre de 2001.

Volviendo a la reseña de la carrera de Varadhan, fue nombrado Profesor Asistente en la Universidad de Nueva York en 1966. Esto fue el resultado de una carta de recomendación que Louis Nirenberg hizo llegar a Monroe Donsker en 1965 (referencia [12]):

Valoro muy en alto a Varadhan y pronostico un gran futuro para él. Ees muy joven, y creo que en muchas maneras podría ser la mejor designación como Profesor Asistente en probabilidad que podríamos tener.

Varadhan fue ascendido a Profesor Asociado en 1968 y se convirtió en Profesor Titular de la Universidad de Nueva York en 1972.

Aunque las investigaciones de Varadhan han oscilado extensamente sobre diferentes áreas de la teoría de probabilidades, se pueden singularizar dos corrientes de esta investigación. Su trabajo en estas dos áreas ha sido reconocido en las notificaciones de los grandes premios que Varadhan ha recibido y se dan breves detalles de estas áreas en las notificaciones de estos premios. En 1996 a Varadhan se le concedió el Premio Leroy P. Steele de la Sociedad Matemática Americana por su contribución fundamental a la investigación en conjunto con su colaborador Daniel Stroock. En la notificación se lee (referencia [1]):

A Daniel Stroock y a Srinivasa Varadhan por sus cuatro trabajos cuatro papeles “Procesos de difusión con coeficientes continuos, I y II” (1969), “Sobre el apoyo de procesos de difusión con aplicaciones al principio del máximo esfuerzo” (1970), “Procesos de difusión Multidimensional” (1979), en la cual introdujeron el nuevo concepto de una solución martingala a una ecuación diferencial estadística, lo que les permite demostrar la existencia, unicidad y otras propiedades importantes de las soluciones a ecuaciones que podrían no ser tratadas por métodos puramente analíticos; su formulación ha sido utilizada ampliamente para probar la convergencia de varios procesos de difusiones.

Al recibir el premio, Varadhan habló sobre sus compañeros y el medio ambiente en el Instituto Courant en la década de 1960 [1]:

Me complace que mis colegas han elegido señalar algunos de mis trabajos con Dan Stroock a finales de los sesenta como importantes. El Instituto Courant, en donde se realizó la mayor parte de la obra, nos proporcionó un ambiente intelectual ideal. Hemos tenido el estímulo activo y apoyo de nuestros colegas senior, especialmente Louis Nirenberg y Monroe Donsker. Con la presencia de Henry McKean y Mark Kac, el Rockefeller, en Nueva York, fue un lugar muy emocionante para un aspirante a probabilista. Dan y yo trabajamos muy de cerca durante este período, y para mí fue muy interesante y fructífero. Agradezco a él, no sólo porque fue una gran persona para trabajar juntos, sino también por los años de amistad. Me complace compartir este premio con él.

La segunda de las dos áreas de trabajo de Varadhan que se singulariza, son sus notables contribuciones a la teoría de las grandes desviaciones. En 2007 obtuvo el premio de gran prestigio Abel y la notificación de la concesión del mismo, da algunos detalles de su trabajo en esta área (referencia [12]):

En su histórico trabajo “Probabilidades asintóticas y ecuaciones diferenciales” de 1966 y su sorprendente solución del problema polaron de la teoría del campo cuántico euclidiano en 1969, Varadhan comenzó a formar una teoría general de las desviaciones grandes que era mucho más que una mejora cuantitativa de las tasas de convergencia. Trata sobre una pregunta fundamental: ¿Cuál es el comportamiento cualitativo de un sistema estocástico, si se desvía del comportamiento ergódico previsto por alguna ley de grandes números o si se presenta como una pequeña perturbación de un sistema determinista? La clave de la respuesta es un poderoso principio variacional que describe el comportamiento inesperado en términos de un nuevo modelo probabilístico minimizando una distancia conveniente de la entropía a la medida de la probabilidad inicial. En una serie de documentos escritos conjuntamente con Monroe D. Donsker, explorando la jerarquía de las grandes desviaciones en el contexto de los procesos de Markov, Varadhan demostró la importancia y el poder de este nuevo enfoque. Una aplicación llamativa es su solución de una conjetura de Mark Kac concerniente a asintóticas de tiempo largo de una vecindad tubular de la trayectoria del movimiento browniano, la llamada “salchicha Wiener”. Teoría de Varadhan de grandes desviaciones, proporciona un método eficiente y unificador para la clarificación de una rica variedad de fenómenos que se presentan en complejos sistemas estocásticos, en campos tan diversos como el de la teoría de campo cuántico, la física estadística, la dinámica poblacional, la econometría y las finanzas, la ingeniería de tráfico. También ha expandido nuestra capacidad de usar las computadoras para simular y analizar la ocurrencia de eventos raros. En las últimas cuatro décadas, la teoría de las desviaciones grandes se ha convertido en una piedra angular de la probabilidad moderna, pura y aplicada.

Varadhan ha sido galardonado, además de los premios antes mencionados, con su elección a la Academia Americana de Artes y Ciencias (1988), la Academia de Ciencias del Tercer Mundo (1988) y la Academia Nacional de Ciencias (1995). Fue elegido Miembro del Instituto de Estadística Matemática (1991) y de la Real Sociedad de Londres (1998). En 1994 recibió el Premio George David Birkhoff, otorgado conjuntamente por la Sociedad Matemática Americana y la Sociedad Industrial y Matemáticas Aplicadas:

... por importantes contribuciones a la caracterización de la martingala de los procesos de difusión, a la teoría de las grandes desviaciones para funcionales de tiempos de ocupación de los procesos de Markov y al estudio de los medios de comunicación al azar...

y recibió el Premio Margaret y Herman Sokol de la Facultad de Artes y Ciencias de la Universidad de Nueva York en 1995.

Varadhan es Profesor Frank J. Gould de Ciencias y Profesor de Matemáticas en el Instituto Courant de Ciencias Matemáticas en la Universidad de Nueva York. Había servido dos periodos como Director del Instituto, a saber, el de 1980-1984 y el de 1992-1994. Cuando Varadhan recibió el Premio Abel en 2007, el Presidente de la Universidad de Nueva York, John Sexton, dijo (referencia [9]):

Estamos tan felices y orgullosos de Raghu. No sólo él es un erudito excepcional, él es también un tipo y compañero maravilloso, un profesor dedicado y un ejemplar “Universitario”, sirviendo con dedicación y profesionalismo como director del Instituto Courant y en organismos como el Senado de la Universidad. Esta distinción es un honor muy merecido para un miembro de la Facultad cuya modestia y discreción es casi tan grande como sus contribuciones académicas. En el tiempo que Raghu ha estado en la NYU, nuestra Universidad ha cambiado mucho, pero es la presencia persistente de eruditos como él lo que nos ha permitido construir la Universidad de Nueva York en lo que es hoy y sigue atrayendo a eruditos superiores e investigadores a nuestro medio.

En 2008 Varadhan recibió el Premio Padma, otorgado por la India el día que el pueblo celebró su 59º Día de la República. Fue uno de los nueve ganadores en el campo de la literatura y la educación.

Ahora se harán algunas referencias sobre algunos de los libros escritos por Varadhan, muchos de los cuales se han basado en notas de las conferencias de posgrado impartidas en el Instituto Courant. Publica *Stochastic processes* (Procesos estocásticos) (1968) que fue revisado por J. R. Kinney que comienza su informe como sigue:

Estas son notas de las conferencias de un curso sobre procesos estocásticos impartido en el Instituto Courant durante 1967-1968. El autor pretende dar un resumen en lugar de entrar en detalles. ... Este conjunto de notas es un resumen muy legible del material disponible en otros lugares sólo en forma muy técnica.

El libro *Mathematical statistics* (Estadística matemática) (1974) se basó en las conferencias impartidas durante el año académico 1973-1974, pero su monografía (escrita conjuntamente con Daniel Stroock) *Multidimensional diffusion processes* (Procesos de difusión multidimensionales) (1979) fue una obra por la cual recibió el Premio Leroy P. Steele. A. D. Wentzell inicia un informe del mismo como sigue:

El libro es sobre el enfoque de la martingala en la teoría de procesos de Markov. Los autores demuestran este enfoque tratando cuidadosamente sólo uno de los problemas en lugar de mostrar al lector un gran número de ejemplos ampliamente diferentes. Este problema es la construcción de los procesos de difusión para la clase más amplia posible de los coeficientes a lo largo de las líneas iniciadas por los autores...

El libro de Varadhan, *Lectures on diffusion problems and partial differential equations* (Conferencias sobre problemas de difusión y ecuaciones diferenciales parciales) (1980) comienza con el movimiento browniano y conduce a los estudiantes a las ecuaciones diferenciales estocásticas y a la teoría de la difusión. François Bronner, tras revisar el libro de Varadhan *Large deviations and applications* (Grandes desviaciones y aplicaciones) (1984), explica que:

... cubre una gran cantidad de material no tratado en otras partes que no sean artículos de revistas. Por lo que es de gran interés leer este texto, escrito en un estilo agradable y claro, por un maestro de la teoría de las grandes desviaciones. En unas pocas páginas uno puede encontrar la configuración del problema, un estudio de las aplicaciones fundamentales, por ejemplo, la teoría de Wentzell y Freodlin y una construcción muy bien presentada de los límites superior e inferior en el caso de Markov.

El libro *Probability theory* (Teoría de las probabilidades) (2001) se basó en un primer curso de postgrado dado desde 1996 a 1999 en el Instituto Courant. El material presentado en este libro de gran éxito fue continuado en *Stochastic processes* (Procesos estocásticos) (2007), que también se basa en cursos dados en el Instituto Courant.

Señalando los intereses de Varadhan fuera de las matemáticas (referencia [10]):

Me gusta viajar. Me gusta el placer y la experiencia de visitar nuevos lugares, ver cosas nuevas y tener nuevas experiencias. En nuestra profesión, tienes la oportunidad de viajar, y siempre tomo ventaja de ello. Me gusta la música, tanto la clásica India como un poco de la música clásica occidental. Me gusta ir a conciertos, si tengo tiempo; me gusta el teatro, y Nueva York es un lugar maravilloso para el teatro. Me gusta ir al cine. Me gusta la literatura Tamil, que disfruto leyéndola. No muchas personas en el mundo están familiarizadas con el Tamil como lengua. Es un lenguaje que tiene 2.000 años, casi tan viejo como el sánscrito. Es quizás el único idioma que hoy no es muy diferente de lo que era hace 2.000 años. Por lo tanto, puedo tomar un libro de poesía escrito hace 2.000 años, y aún podré leerlo. En la medida que pueda, lo hago.

Para terminar esta reseña biográfica, se cita lo escrito en un artículo de 1997 por Daniel Stroock (referencia [11]):

No estoy reclamando que Varadhan no disfrute de su éxito; él lo hace. Ni soy quien va a decir que es una especie de Santo; nosotros no podríamos nunca haber sido sus amigos si lo fuera. Sin embargo, lo que distingue a Varadhan de casi todas las otras personas dotadas que he conocido es el comando notable que él ejerce sobre su propio don. En particular, ha aprendido cómo impedir que su poderoso inusual intelecto se vea afectado por imprevistas fallas intelectuales. Por ejemplo, Varadhan puede tolerar equivocarse, al menos de vez en cuando. Además, él no es uno de los muchos príncipes matemáticos que abrazan la idea de que puedan estar satisfechas todas sus obligaciones con la humanidad, hechas ya sus contribuciones a la investigación matemática.

Referencias.-

Artículos:

1. 1996 Steele Prizes, *Notices Amer. Math. Soc.* **43** (11), 1340-1347.
2. K B Athreya, Professor Srinivasa R S Varadhan, *Current Sci.* **78** (9) (2000), 1151-1152.
3. R Bhatia, A conversation with S R S Varadhan, *Math. Intelligencer* **30** (2) (2008), 24-42.
4. E Bolthausen and A-S Sznitman, Zur Verleihung des Abel-Preises 2007 an S R Srinivasa Varadhan, *Mitt. Dtsch. Math.-Ver.* **15** (3) (2007), 173-175.
5. M Freiberger, The Abel Prize 2007, *Plus magazine* (2 April 2007).
6. F den Hollander, Srinivasa Varadhan (Dutch), *Nieuw Arch. Wiskd.* (5) **9** (3) (2008), 192-196.
7. T L Lindstrom, S R S Varadhan.
8. R Ramachandran, Mathematician S R S Varadhan joins an illustrious line of scientists who have been awarded the Abel Prize, *Frontline* **24** (7) (2007).
9. NYU Mathematician Srinivasa Varadhan Named Winner of Abel Prize : Second NYU Winner of 'Nobel Prize' of Mathematics In Three Years, *New York University Press Release* (Thursday, March 22, 2007).
10. M Raussen and C Skau, Interview with Srinivasa Varadhan, *Notices Amer. Math. Soc.* **55** (2) (2008), 238-246.
11. D Stroock, Nomination for Srinivasa S R Varadhan, *Notices Amer. Math. Soc.* **44** (8) (1997), 955-957.
12. The Abel Prize 2007.
13. Varadhan receives 2007 Abel Prize, *Notices Amer. Math. Soc.* **54** (6) (2007), 738-739.

Versión en español por R. Ascanio H. del artículo en inglés de J. J. O'Connor y E. F. Robertson sobre "Srinivasa Varadhan" (Febrero 2010).

Fuente: MacTutor History of Mathematics [<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Varadhan.html>].