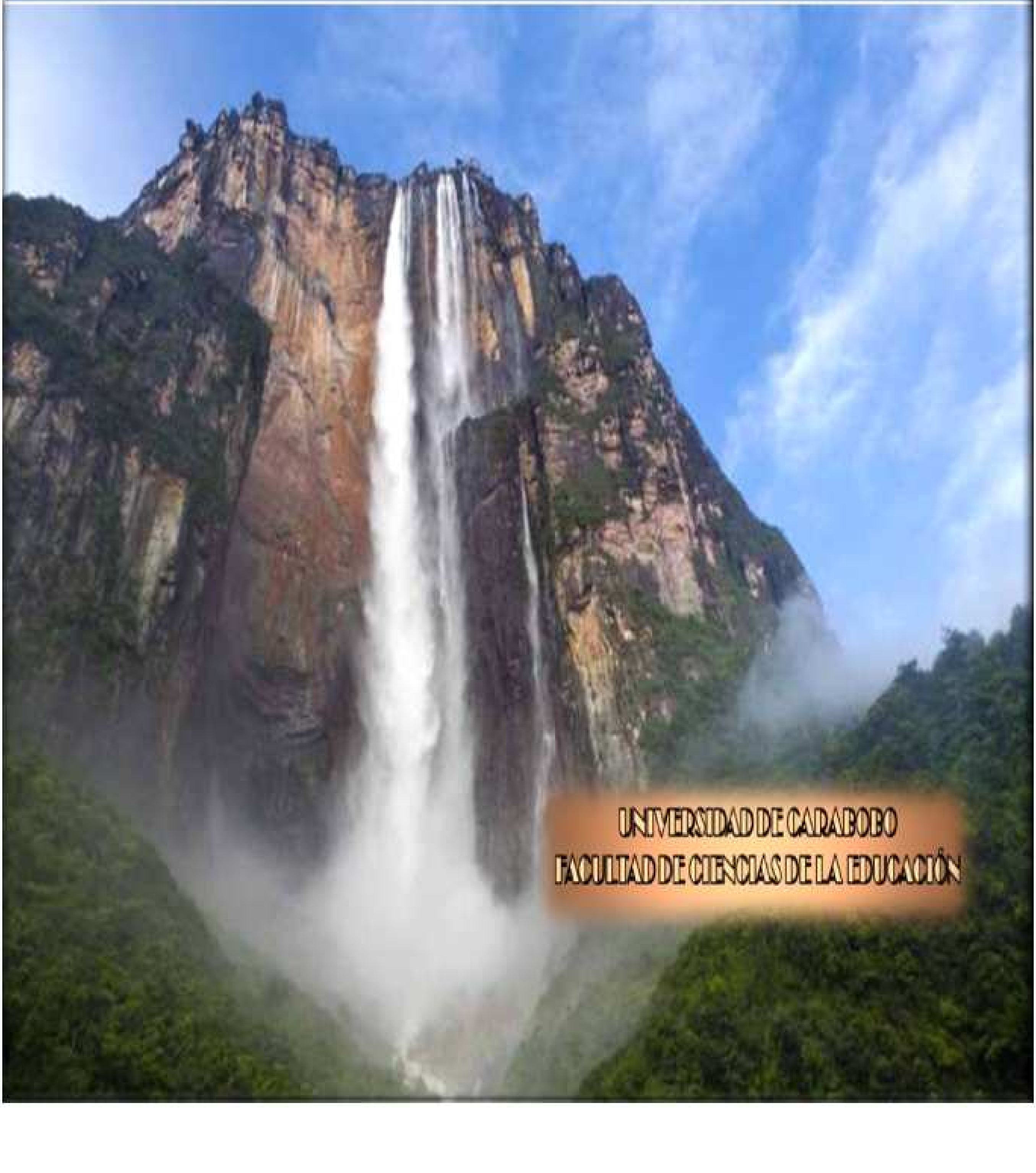
HOMOTECIA

CÁTEDRA DE CÁLCULO - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA y FÍSICA – FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN – UNIVERSIDAD DE CARABOBO

 Hecho el Depósito de Ley. Depósito Legal: PPi2012024055 – I. S. S. N.: 2244-7385

E- mail: homotecia2002@gmail.com - N° 10 – AÑO 15 Valencia, Lunes 2 de Octubre de 2017



DEUS LIBERTAS CULTURA
UNIVERSITAS CARABOBENSIS

HOMOTECIA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y FISICA - FACE - UC
ADVENTUS NOVUS CALCULUS
CÁTEDRA DE CÁLCULO

Índice

Diseño de Portada y Montaje Gráfico: R. A. A. H. Imagen de fondo: Parque Nacional Canaima. Sur-este de Venezuela. Zona venezolana que limita conjuntamente con las fronteras de Guyana y Brasil.

La mayoría de las imágenes que aparecen en esta publicación, son obtenidas de Google, Facebook y msn, vía Internet.

Para el acceso a todos los números publicados de la Revista HOMOTECIA, conectarse al enlace:
http:/servicio.bc.uc.edu.ve/homotecia/index.htm > Sección: MULTIDISCIPLINARIAS

Revista HOMOTECIA
© Rafael Ascanio H. – 2009
Hecho el Depósito de Ley.
Depósito Legal:
PPi2012024055
I. S. S. N.: 2244-7385

e-mail:
homotecia2002@gmail.com

Publicación Mensual
Revista de acceso libre

Publicada por:
CÁTEDRA DE CÁLCULO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DE CARABOBO

Nº 10 - AÑO 15 - Valencia, Lunes 2 Octubre de 2017

EDITORIAL

En el Editorial del número anterior, hicimos referencia a la *inclusión* y *exclusión escolar*; señalamos en esa oportunidad que hay momentos cuando al realizar el hecho pedagógico, al aplicar algunas estrategias dentro de la institución educativa, se incurre simultáneamente en una inclusión y en una exclusión donde los resultados, más que calificarlos de pocos satisfactorios, hay que considerarlos como de rotundo fracaso.

Para explicar esta situación lo mejor posible, trajimos a colación un caso del que nos enteramos mediante una conversación que sostuvimos con un docente de un determinado plantel, quien nos manifestó que al planificar la organización del periodo escolar en su lugar de trabajo, conformaron las secciones de octavo y noveno grados mediante una escala de jerarquía ordenándolas alfabéticamente de manera descendente, siguiendo el criterio de inscribir a los supuestos mejores alumnos tanto por rendimiento académico como por disciplina en las primeras secciones y continuando de tal manera que, al llegar a las últimas secciones, en estas estarían inscritos los alumnos de más bajo rendimiento en el curso precedente, con notorios problemas de disciplina, además de ser los cursantes de octavo y noveno de mayor edad y mayor estatura.

El caso que referimos en la anterior oportunidad, trató de una sección de octavo grado, la G, la que por el criterio de conformación que se aplicó en la institución debemos considerar que desde un principio ya se esperaba malos resultados o su fracaso. Por esta razón tratamos de indagar otros aspectos sobre qué otras situaciones se originaron del procedimiento aplicado, así que procedimos a preguntarle sobre qué había pasado con los alumnos crema y nata que ellos ubicaron en las secciones élites, e inició respondiéndonos lo siguiente:

- *Eso resultó también otra desafortunada parte de la estrategia. Pero el más grave incidente que tuvimos no fue en octavo sino con una sección de noveno.*

  Fue con la sección noveno A; ahí habíamos agrupado a lo mejor no solamente de los novenos sino de todo el liceo. Rindieron lo que se esperaba de ellos: excelentes calificaciones, en general un magnífico rendimiento académico, incluso en lo que respecta a disciplina: cero notas negativas en hojas de diario ni inconvenientes con profesores, personal administrativo o compañeros.

  Pero en el último lapso ocurrió lo deleznable, algo sumamente despreciable.

  Resultó ser que el profesor de Educación Física, considerando que habían sido buenos estudiantes durante el curso, en vez de evaluar el lapso como siempre lo hacía e hizo con las otras secciones, les informó que la evaluación de ese tercer trimestre sería mediante una coreografía, que iban a dedicar todo el tiempo del mismo a preparar un baile que ellos escogerían y que la evaluación sería en la fecha que la seccional fijara para el examen final de lapso, y él, el profesor, traería un jurado formado por tres personas expertas en este tipo de actividades.

  Todo estuvo muy bien hasta que sucedió lo rechazable. Resultó que el equipo donde quedaron los mejores alumnos de la sección, al iniciar la preparación de su coreografía, detalló que uno de ellos, una chica, era sumamente torpe para el baile. Como la idea era que todos participaran, practicaron y practicaron pero la joven no mejoró. Al observar a los otros equipos, advirtieron que ellos eran el equipo más deficiente por la inclusión en el mismo de su torpe compañera.

  Acostumbrados a obtener las mejores calificaciones del curso y de todo el liceo, necesitaban buscar un camino que les permitiera eliminar a su compañera del equipo. Después que sucedió lo lamentable y que más tarde comentaré, primero comenzaron a practicar a escondidas su coreografía, sin informarle a la compañera del problema sobre estas prácticas, aunque esto ocasionaba un mayor esfuerzo ya que para no crear sospecha también realizaban otras prácticas donde sí incluían a la joven causante de su preocupación.

  Cuando llegó el día de la evaluación el equipo se presentó pero extrañamente la compañera torpe no asistió. Demás está decir que el baile del equipo sin la ausente, fue todo un éxito: los calificaron con veinte puntos, la máxima nota, siendo los únicos que la alcanzaron. Al final, el promedio de cada uno de ellos durante el curso fue sumamente excelente, por encima de la mayoría.

Hasta este momento del relato, aparentemente o el resto del equipo convenció a la joven para que no asistiera o algún hecho fortuito le había impedido asistir al plantel. Le preguntamos al profesor sobre cómo hizo la muchacha para recuperar la evaluación perdida. El contestó:

- *Aquí es cuando comienza lo trágico. A los tres días después de la evaluación, se presentó la madre de la joven al plantel para hablar con el profesor de Educación Física sobre cómo sería posible que su hija recuperara la evaluación perdida.*

  El profesor le dijo a la señora que eso no era posible, que la joven no debió faltar, que había sido muy irresponsable con sus compañeros. Le informó que por no haber asistido a la evaluación del lapso, su calificación en el mismo era cero uno.

  Me imagino que la madre en ese momento pensó lo que aquella calificación perjudicaría el promedio de su hija. Inmediatamente comenzó a llorar. El profesor le dijo que no lo tomara así ya que lo que estaba pasando era culpa de su hija.

(CONTINÚA EN LA SIGUIENTE PÁGINA)

(VIENE DE LA PÁGINA ANTERIOR)

En eso la señora se calmó un poco y le comentó lo siguiente: "Mi hija no faltó a clase por propia voluntad. El día del examen amaneció con una diarrea tan fuerte que bien temprano en la mañana su papá y yo tuvimos que llevarla a la clínica que queda cerca de la casa. Fue tan grave la misma que la descompensó, tanto que tuvieron que hospitalizarla en terapia intensiva, los médicos estaban sumamente preocupados y nosotros asustados. Solo ayer respondió satisfactoriamente pero sigue hospitalizada. Esto se lo expliqué a los otros profesores y profesoras con los que también perdió los exámenes y ellos han convenido en hacérselos. No sé por qué usted se niega".

Ante esta explicación, el profesor le dijo que iba a considerar el caso y que buscaría la forma para que la joven recuperara la evaluación pero que no debía esperar que fuera como la del resto de sus compañeros de equipo.

Realmente parecía que no había ocurrido nada fuera de lo normal. Posiblemente una indigestión le había causado el problema intestinal. Se lo comentamos al profesor pero éste nos refirió lo siguiente:

- *También en un principio creíamos eso hasta que sucedió lo siguiente. Ya la joven había sido dado de alta de la clínica y solo algunos pocos nos enteramos de lo grave que estuvo. Unos días más tarde, dos de los miembros del equipo iban en un autobús que los llevaba a sus casas luego de clases. También sentada cerca de ellos iba una secretaria del plantel quien los escuchó decir esto: "¡Caramba! Creo que se nos pasó la mano con…, a veces pienso que casi la matamos".*

  La secretaria escuchó sorprendida lo dicho, tan es así que en la primera oportunidad que tuvo, se lo hizo saber a la jefe de la seccional de los novenos. Ésta, junto con el profesor de Educación Física al cual informó lo que le había dicho la secretaria, intrigados por la situación citaron a la oficina de la seccional a los miembros del equipo.

  Ante la insistencia de los profesores confesaron lo siguiente. Al percatarse que ya era imposible mejorar la coreografía con su compañera participando en la misma, decidieron que había que buscar la manera para que esta no asistiera el día de la presentación. Su preocupación se la manifestaron a una de las representantes de uno de los integrantes y esta les propuso que planificaran una última práctica el día antes de la evaluación, la cual podía ser en su casa. Así lo hicieron y al finalizar, la representante les ofreció un jugo de parchita pero con la peculiaridad que al de la joven causante del problema le agregó un purgante. Fue tal la cantidad del mismo que le produjo el inconveniente intestinal que estuvo a punto hasta de causarle la muerte. Por ello no asistió el día de la evaluación ni a los siguientes.

Quisimos indagar qué sucedió después, qué hicieron las autoridades del plantel, cómo reaccionaron los representantes de la joven afectada, qué medidas disciplinarias se tomaron con los integrantes del equipo. El profesor nos dijo:

- *Realmente no sé mucho. Aparentemente no les informaron a los representantes de la muchacha que habían averiguado qué fue lo que le causó el problema. Sobre el incidente, no se supo nada de lo ocurrido fuera de las paredes del liceo. El profesor de Educación Física muy salomónicamente decidió anular la evaluación del equipo, calificarlos en la asignatura con cero uno en el tercer lapso y calificar con veinte a la agraviada. Y hasta allí llegó el caso.*

Posiblemente alguien nos haga la referencia a que hubo una mala aplicación de lo que es la inclusión escolar puesto que buscando lograrla, se cayó en una exclusión. Con los de octavo "G" porque la misma institución los discriminó y particularmente los segregó en lo social, y los del noveno "A" fueron iniciados en la vil actitud de discriminar y segregar de esa manera cuando sus intereses son afectados. Lo cierto es que posiblemente la discriminación y la segregación fue en general: los alumnos élites probablemente fueron atendidos con ciertas preferencias o beneficios, mayor atención y un muy particular asesoramiento en caso de algún inconveniente. Los alumnos de mayor deficiencia posiblemente fueron tratados muy a la ligera y sin preocuparse por ellos puesto que probablemente se manejó la idea que lo más seguro en su futuro era el fracaso escolar.

Pero el problema es que la inclusión no debe solamente tratarse de aplicar para estudiantes tradicionalmente considerados socialmente excluidos por provenir de sectores poblacionales económicamente desfavorecidos, donde muchas veces nos encontramos con alumnos que presentan problemas de aprendizaje, problemas físicos o miembros de una familia disfuncional.

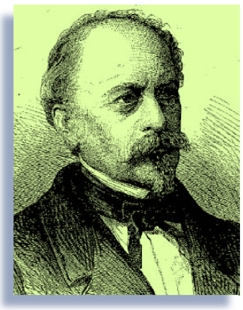
Las necesidades especiales de los estudiantes, es decir los factores en ellos que son necesarios atender educativamente, no solamente corresponden a alumnos con dificultades. Un alumno intelectualmente superdotado, miembro de una familia sin ningún problema interno ni en lo económico, lo sicológico o social, con un entorno familiar sumamente culto, es decir pertenece a una familia completamente funcional, también es un estudiante con necesidades especiales y el ambiente educativo del plantel que se le ha de ofrecer no debe producirle una involución. La institución educativa tiene que estar preparada para atender todas las situaciones, lo que lleva a planificar estrategias didácticas y de evaluación que no conduzcan ni la discriminación, ni a la segregación, ni a la exclusión y mucho menos al fracaso de hecho y emocional.

Reflexiones

"Todas la pasiones son buenas cuando uno es dueño de ellas, y todas son malas cuando nos esclavizan".

JUAN JACOBO ROUSEAU

Los Grandes Matemáticos



ARTHUR JULES MORIN
(1795 – 1880)

Nació el 19 de octubre de 1795, y murió el 7 de febrero de 1880; ambos momentos en París, Francia.

Matemático y Físico que llegó a ser General de División del Ejército.
Trabajó en una variedad de temas sobre matemáticas aplicadas.

Arthur Jules Morin creció en tiempos turbulentos de la historia francesa aunque París fue un sitio pacífico durante gran parte de su juventud. Tenía sólo cuatro años cuando Napoleón Bonaparte se convirtió en Primer Cónsul y en el año 1802 la paz reinaba en Europa. Sin embargo pronto las hostilidades estallaron otra vez y, a pesar de la derrota naval en Trafalgar de 1805, los ejércitos franceses ganaron victorias decisivas contra los ejércitos austriaco y ruso. Morin tenía quince años en 1810 cuando Napoleón estaba en las alturas del poder y París era próspera. La desastrosa campaña rusa de 1812 obligó a Napoleón regresar a París para fortalecer su poder y su ejército. Por este tiempo Morin estaba estudiando en la École Polytechnique y en los siguientes dos años vio la posición francesa deteriorarse y el ejército francés sufrió una humillante derrota en la batalla de Leipzig en octubre de 1813. Como los ejércitos aliados avanzaban hacia París en 1814, Morin tuvo que terminar sus estudios en el École Polytechnique y unirse a los esfuerzos que se hacían para defender a París. Mientras Napoleón condujo los restos del ejército francés hacia el este para atacar la retaguardia de las tropas enemigas que se acercaban a París, Talleyrand, como jefe del gobierno en París, ordenó a la ciudad capitular.

Tras el Tratado de Fontainebleau, que puso fin a las hostilidades, los deberes que obligaban a Morin defender al país terminaron, y así pudo entrar en la École d'Application de Metz, donde realizó estudios prácticos en ingeniería. Allí conoció a quien fue ingeniero militar, Jean-Victor Poncelet. Morin permaneció en Metz durante cuatro años y luego ingresó al ejército como teniente en la unidad de pontones que había sido creada en la década de 1790. Sin duda fue una unidad apropiada para un ingeniero con intereses como los de Morin y la unidad de pontón había sido una característica importante del ejército de Napoleón con pontones de madera, cobre u otro material [2]:

> *Su carrera militar estuvo marcada por un ascenso rápido y regular a través de los diferentes grados, terminando en su nombramiento como General de División de la Artillería en 1855.*

Fue el 7 de abril de 1855 que Morin alcanzó el grado de General de División, había ascendido a General de Brigada el 26 de marzo de 1852. Sin embargo, el tuvo una vida mucho más allá que la de militar de carrera. En la década de 1830 enseñó mecánica en Metz, fue nombrado en la recién creada Cátedra de Mecánica en el Conservatoire National des Arts et Métiers en 1839. Este Conservatorio Nacional de Artes y Oficios había sido abierto en 1802 y con la función de:

> *... mejorar la industria nacional, cultivar métodos de ingeniería, enseñar ampliamente e iluminar la ignorancia.*

La enseñanza de la mecánica en el Conservatoire National des Arts et Métiers había comenzado en 1819 y otras asignaturas teóricas habían sido introducidas en la década de 1820. Como profesor de mecánica Morin, quien nunca renunció a su comisión en el ejército, utilizó profusamente el trabajo teórico y práctico de su amigo y maestro Poncelet y el de otros funcionarios militares. También usó el Conservatoire National des Arts et Métiers para promover un flujo bidireccional de teoría y práctica entre la industria militar y la privada. Morin fue profesor de mecánica durante diez años, y luego en 1849 se convirtió en Director del Conservatorio. Sirvió como tal durante 30 años y mejoró la eficiencia y la influencia del Conservatorio. Uno de sus mayores logros fue abrir el primer laboratorio de enseñanza de la ingeniería en 1852.

Aquí cabe la pregunta: ¿cómo un militar se convirtió en profesor de mecánica? Había pasado mucho tiempo realizando investigaciones sobre problemas de mecánica y entre 1833 y 1835 había presentado un número importantes de memorias a la Academia de Ciencias. Estas memorias presentaban los resultados de una serie de experimentos cuidadosamente ejecutados sobre fricción los cuales había comenzado a preparar desde 1829. Debido al complicado aparato experimental utilizado, construido bajo la supervisión de Poncelet, los experimentos sólo se iniciaron en mayo de 1831. Luego continuaron sin interrupción hasta septiembre de ese año, cuando los fondos para investigación se agotaron. Los resultados confirmaron y ampliaron el trabajo de Coulomb sobre fricción, verificando sus tres leyes generales: la fricción es proporcional a la fuerza normal ejercida; la fricción depende de la naturaleza de las superficies en contacto, pero es independiente de la zona de contacto; y, dentro de grandes límites, la fricción es independiente de la velocidad. También ideó un aparato para estudiar las leyes de la caída de los cuerpos. Consistía en un cilindro giratorio al lado del cuerpo que cae, configurado de tal manera que un marcador en el cuerpo en caída describe una curva en el cilindro. Él fue capaz de dar una prueba experimental precisa del resultado de Galileo en cuanto a que las distancias recorridas por un cuerpo en caída se incrementa el cuadrado de las veces. En 1849 Morin, trabajando con Poncelet, inventó el dinamómetro de rotación, que junto con refinamientos posteriores, se convirtió en la herramienta de investigación básica en el estudio de trabajo mecánico. Ya había publicado trabajos sobre dinamómetros en *Notice sur divers appareils dynamometriques* (París, 1841), una obra que describe el mecanismo de grabado sobre papel, así como la descripción de un integrador mecánico utilizado para que los resultados de los experimentos más extensos podían leerse directamente. Sus resultados en mecánica fueron todos publicados en la obra de cinco volúmenes *Leçons de mécanique pratique à l'usage des auditeurs des cours du Conservatoire des arts et métiers* (1846-1853). Joseph Bennett hizo una traducción al inglés bajo el título *Fundamental ideas of mechanics and experimental data* que se publicó en 1860.

(CONTINÚA EN LA SIGUIENTE PÁGINA)

(VIENE DE LA PÁGINA ANTERIOR)

Entre 1853 y 1856 Morin emprendió una serie de experimentos sobre la resistencia de materiales de construcción que publicó en una serie de documentos. Este trabajo fue importante por tener aplicaciones prácticas para la arquitectura. Publicó los resultados en forma de libro en 1863, cuando apareció el trabajo de dos volúmenes *Résistance des matériaux*. Una selección de sus obras es: *Nouvelles expériences sur le frottement, faites à Metz en 1831* (1832), *Expériences sur les roues hydrauliques à axe vertical appelées turbines* (1838), *Expériences sur le tirage des voitures, faites en 1837 et 1838* (1839), *Notice sur divers appareils dynamométriques* (1841), *Conservatoire des Arts et Métiers. Catalogue des collections* (1851), *Notions géometriques sur les mouvement et leurs transformations, o élémens de cinématique* (1857), *Rapport de la commission sur le chauffage et la ventilation du Palais de Justice* (1860), *Etudes sur la Ventilation* (1863), *Des machines et appareils: destines a l'elevation des eaux* (1863), *Notes sur les appareils de chauffage* (1866) y *Salubrité des habitations. Manuel pratique du chauffage et de la ventilation* (1868). Su trabajo sobre ventilación le hizo un destacado experto mundial sobre el tema, y usó este conocimiento en la realización de investigaciones sobre monóxido de carbono en habitaciones calentadas por estufas de hierro en 1869 y la investigación en la preservación de la harina en 1870.

Otra función importante que Morin llevó a cabo fue el de ser Presidente de la Comisión para la Primera Exposición Universal que se inauguró en París en mayo de 1855. La Comisión había pasado más de dos años preparando la elaboración de la exposición, que fue diseñada como símbolo de paz y cultura. El objetivo era impresionar a quienes visitaran las enormes salas donde se mostraban los logros de Francia en el comercio y en la industria [4]:

> *Los edificios de la exposición fueron diseñados para aprovechar el uso de metal y vidrio como materiales estructurales. Lo exhibido por ellos estaban similarmente dominadas por una fascinación común con novedad y una fe estrechamente relacionada con la promesa material de progreso tecnológico. ... en el esfuerzo por ser más universal, sus organizadores incluyeron junto con su muestra industrial una gran exposición retrospectiva de pinturas, esculturas, grabados y arquitectura para recordar los logros de los hombres en las artes, así como en la ciencia, la tecnología y los negocios.*

Morin no sólo participó como Presidente de la Comisión, sino que también expuso algunas de sus invenciones. Por ejemplo, expuso [3]:

> *... un anemómetro totalizador, uno de una serie que debía instalarse en las chimeneas de los nuevos edificios del Palacio de Justicia con el fin de controlar la ventilación. ... era una pieza substancial, que consistía de seis paletas de aluminio dispuestas en una hélice... y puesta sobre un eje de acero. Las revoluciones eran contadas a través de una serie de ruedas dentadas, con el fin de indicar el volumen de aire que pasaba a través del eje en un período de tiempo. A pesar de su tamaño considerable y el largo tren de engranajes, el anemómetro fue extremadamente sensible.*

Morin recibió numerosos honores por sus contribuciones. Fue elegido a la sección de mecánica de la Academia de Ciencias en 1843 para suceder a Gaspard-Gustave de Coriolis, quien había muerto en septiembre de ese año. Fue condecorado con la Legión de Honor en 1858 y luego en 1862 fue elegido a la Sociedad Francesa de Ingenieros Civiles y más tarde nombrado su Presidente.

Entre la edición de *Nature* aparecida el 5 de febrero de 1880, se encuentra el siguiente informe:

> *Lamentamos señalar que el General Morin, conocido Director del Conservatoire des Arts et Métiers, está en un estado muy precario como consecuencia de un resfriado severo. Gran ansiedad por él se siente en el Instituto, de la que es uno de los miembros más respetados y populares. El General tiene 85 años de edad.*

En la siguiente edición de *Nature* [2], se informó sobre su muerte en París el 7 de febrero.

Referencias.-

Artículos:

1. C Fontanon, Un ingenieur militaire au service de l'industrialisation : Arthur-Jules Morin (1795-1880), *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences* **29** (1990), 90-118.
2. T H N, Arthur Jules Morin, *Nature* **21** (537) (1880), 349-350.
3. A McConnell, Aluminium and its Alloys for Scientific Instruments, 1855-1900, *Annals of Science* **46** (1989), 611-620.
4. F A Trapp, The Universal Exhibition of 1855, *The Burlington Magazine* **107** (747) (1965), 300-305.

ARTHUR JULES MORIN

Imágenes obtenidas de:

Google

Versión en español por R. Ascanio H. del artículo en inglés de J. J. O'Connor y E. F. Robertson sobre "Arthur Jules Morin" (Diciembre 2008).
FUENTE: MacTutor History of Mathematics. [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/References/Morin.html].

Aportes al conocimiento

Elementos Básicos del Cálculo Diferencial (27)

Por: Prof. Rafael Ascanio Hernández - Prof. Próspero González Méndez

ÍNDICE.-

LÍMITES DE FUNCIONES.-

DEFINICIÓN FORMAL DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN.-

Sea la función $f : R \to R$ tal que *f(x)* = 3x - 1. Si se considera, por ejemplo, que $f(x) \in E_1(8)$, cabe preguntarse a qué entorno pertenece *x*; es decir, cuáles son los valores de la variable que permiten cumplir esta condición. Por definición de entorno se tiene que:

$$f(x) \in E_1(8) \to |f(x) - 8| < 1$$

y por lo cual:

$$\begin{aligned} &|(3x - 1) - 8| < 1 \\ &|3x - 9| < 1 \\ &|3 \cdot (x - 3)| < 1 \\ &|3| \cdot |x - 3| < 1 \\ &3 \cdot |x - 3| < 1 \\ &|x - 3| < \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto $x \in E_{\frac{1}{3}}(3)$; es decir que:

$$\textit{Si} \quad x \in E_{\frac{1}{3}}(3) \ \textit{entonces} \ f(x) \in E_1(8), \ \textit{siendo} \ f(x) = 3x - 1.$$

Pero también se hace evidente que al tomar *f(x)* valores en cualquier entorno de 8, es decir, $f(x) \in E_\varepsilon(8)$ donde ε es un número real positivo y que puede tomar valores tan pequeños que permiten a *f(x)* acercarse a 8, es posible hallar un entorno reducido de 3 tal que si $x \in E^*_\delta(3)$, entonces el valor de *f(x)* tiende a 8; siendo δ un número real positivo cuyo valor va a depender del valor de ε.

A manera de ejemplo, cabe preguntarse cuál será el valor de δ si $\varepsilon = 0{,}025$. La solución es la siguiente:

$$\textit{Si} \ |f(x) - 8| < 0{,}025 \ \textit{entonces} \ 0 < |x - 3| < \delta$$

Desarrollando $|f(x) - 8| < 0{,}025$, se tiene que:

$$\begin{aligned} &|(3x - 1) - 8| < 0{,}025 \\ &|3x - 9| < 0{,}025 \\ &|3 \cdot (x - 3)| < 0{,}025 \\ &|3| \cdot |x - 3| < 0{,}025 \\ &3 \cdot |x - 3| < 0{,}025 \\ &|x - 3| < \frac{0{,}025}{3} \\ &|x - 3| < 0{,}008333\ldots \end{aligned}$$

concluyéndose que $\delta = 0{,}008333\ldots$

De aquí se deduce que dado un $\varepsilon > 0$ entonces es posible determinar un $\delta > 0$, para que se cumpla:

$$|f(x) - 8| < \varepsilon \ \textit{siempre que} \ 0 < |x - 3| < \delta$$

Esto permite afirmar que $f(x) = 3x - 1$ tiende al valor 8 cuando *x* tiende a 3, o expresado de otra forma: ***El límite de*** *f(x) = 3x – 1* ***es 8 cuando x tiende a 3***, y que se puede escribir:

$$\lim_{x \to 3} (3x - 1) = 8$$

quedando garantizada su existencia cuando se verifica que se da la relación entre ε y δ, que se identifica de la siguiente manera: $\varepsilon R \delta$.

En definitiva, lo que se tiene es:

$$\lim_{x\to 3} (3x-1) = 8 \Leftrightarrow f(x) \in E_{\varepsilon}(8) \text{ siempre que } x \in E^*_{\delta}(3)$$

que también se puede expresar:

$$\lim_{x\to 3} (3x-1) = 8 \Leftrightarrow |f(x)-8| < \varepsilon \text{ siempre que } 0<|x-3|<\delta$$

En general, si se considera una función real f cualquiera tal que $f(x) \in E_{\varepsilon}(L)$ con $L \in \mathbf{R}$, se va a tener que siempre que $x \in E^*_{\delta}(k)$, donde también $k \in \mathbf{R}$, entonces $\lim_{x\to k} f(x) = L$; que en definitiva se expresa:

$$\lim_{x\to k} f(x) = L \Leftrightarrow f(x) \in E_{\varepsilon}(L) \text{ siempre que } x \in E^*_{\delta}(k)$$

Esta expresión también se puede escribir así:

$$\lim_{x\to k} f(x) = L \Leftrightarrow |f(x)-L| < \varepsilon \text{ siempre que } 0<|x-k|<\delta,\ \varepsilon>0 \wedge \delta>0$$

y es la que más se utiliza en la ejercitación sobre límites de funciones, cuya presentación más práctica es la siguiente:

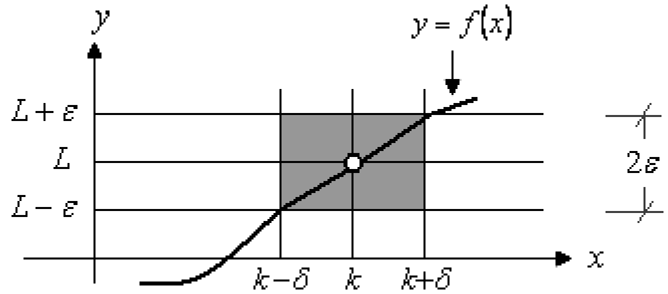
$$\boxed{\lim_{x\to k} f(x) = L \Leftrightarrow |f(x)-L| < \varepsilon \quad sq \quad 0<|x-k|<\delta,\ \varepsilon>0 \wedge \delta>0}$$

Los aspectos desarrollados en el aparte anterior, permiten dejar establecido que cuando se tiene una función $f: R \to R$ definida para valores de $x \in E^*_{\delta}(k)$, el estudio del comportamiento de la función permite observar que los valores de $f(x) \in E_{\varepsilon}(L)$. Sobre la base de esto, se puede enunciar una definición de límite de una función:

Sea f una función real definida en todo punto de un intervalo abierto que contiene al punto "k", posiblemente no definida en el mismo "k". Entonces, el límite de f(x) cuando x se aproxima al punto "k" es "L", de tal manera que si se considera un $\varepsilon>0$ y tan pequeño como se quiera, es posible encontrar un $\delta>0$ para que se cumpla:

$$|f(x)-L| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |x-a| < \delta.$$

La interpretación gráfica de la anterior definición se muestra en la siguiente gráfica: Dado un ε >0 se puede elegir un entorno reducido del punto *"k"* para los valores de *x* de tal manera que los valores de *f(x)* difieran de *L* menos de ε. Si se fija una banda de ancho *2*ε, limitada por las rectas $y = L-\varepsilon$ e $y = L+\varepsilon$, los puntos correspondientes a un entorno suficientemente pequeño de *"k"*, quedan comprendidos en dicha banda, excepto el punto de abscisa *"k"*.



Pero la definición anterior, como se puede entender, se hace considerando que *K* es un número finito y determinado. Cabe ahora preguntarse qué sucede cuando *x* tiende a infinito, es decir, cuando crece y decrece hacia infinito. Naturalmente, esta situación debe corresponder con la definición dada aunque necesariamente amerita ser especificada:

Una función f(x) tiene límite L cuando x crece o decrece infinitamente, es decir cuando x tiende a infinito, lo que se expresa $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, si dado un $\varepsilon>0$ y tan pequeño como se quiera, se puede determinar un número N de modo que para todo punto x tal que $|x|>N$, se verifique $|f(x)-L|<\varepsilon$.

DEMOSTRACIONES ÉPSILON – DELTA $(\varepsilon - \delta)$.-

Ejercicios resueltos.-

1.- Si la función $g: R \to R$ está definida por $g(x) = 4x - 1$, determinar un entorno reducido adecuado para x de tal manera que $\varepsilon R \delta$ garantice la existencia del límite para $g(x)$.

Solución:

La determinación de un intervalo reducido adecuado para *x* se comienza calculando la imagen de cualquier $x \in Dom_g$, por ejemplo *g(3)*:

$$g(3) = 4 \cdot 3 - 1 = 11 \Rightarrow g(3) = 11$$

Con base en esto, se puede afirmar que $g(x) \in E_\varepsilon(11)$ siempre que $x \in E^*_\delta(3)$; es decir, el límite de $g(x) = 4x - 1$ cuando ***x*** tiende a 3 es 11. Ahora se aplica la definición de límite para determinar $\varepsilon R \delta$ que valida esta conclusión:

$$\lim_{x \to 3}(4x-1) = 11 \Leftrightarrow |(4x-1) - 11| < \varepsilon \quad sq \quad 0 < |x-3| < \delta, \ \ \varepsilon > 0 \wedge \delta > 0$$

Desarrollando el consecuente, se tiene:

$$|4x - 12| < \varepsilon \quad sq \quad 0 < |x-3| < \delta$$

$$|4 \cdot (x-3)| < \varepsilon \quad sq \quad |x-3| < \delta$$

$$4 \cdot |x-3| < \varepsilon \quad sq \quad |x-3| < \delta$$

$$|x-3| < \tfrac{\varepsilon}{4} \quad sq \quad |x-3| < \delta$$

La comparación de los miembros a ambos lados del ***"siempre que"***, establece que existe $\varepsilon R \delta$.

Como ejemplo, si ε =0,008, entonces: $\delta = \dfrac{0{,}008}{4} = 0{,}002 \quad \Rightarrow \quad \delta = 0{,}002$

2.- Dada la función $f: R \to R$ definida por $f(x) = 3 - x^2$, determine un entorno reducido adecuado para *x* de tal manera que la relación entre ε y δ ($\varepsilon R \delta$) garantice la existencia del límite correspondiente para *f(x)*.

Solución:

Considérese que $x \in E^*_\delta(1)$ donde $x \in Dom_f$. Calculando *f* (1) resulta:

$$f(1) = 3 - (1)^2 = 2 \Rightarrow f(1) = 2$$

Se puede afirmar, entonces, que el límite de $f(x) = 3 - x^2$ es 2 cuando ***x*** tiende a 1. Para determinar $\varepsilon R \delta$ se aplica la definición de límite:

$$\lim_{x \to 1}(3 - x^2) = 2 \Leftrightarrow |(3 - x^2) - 2| < \varepsilon \quad sq \quad 0 < |x-1| < \delta, \quad \varepsilon > 0 \wedge \delta > 0$$

Desarrollando el consecuente:

$$|1 - x^2| < \varepsilon \quad sq \quad 0 < |x-1| < \delta$$

$$|-(x^2 - 1)| < \xi \quad sq \quad |x-1| < \delta \quad \text{(resumiendo la expresión)}$$

$$|x^2 - 1| < \varepsilon \quad sq \quad |x-1| < \delta$$

$$|(x+1) \cdot (x-1)| < \varepsilon \quad sq \quad |x-1| < \delta$$

$$|x+1| \cdot |x-1| < \varepsilon \quad sq \quad |x-1| < \delta \qquad (*)$$

En la expresión (*), el hecho de aparecer a la izquierda del ***"siempre que"*** el factor $|x+1|$ establece una diferencia entre la expresión relacionada con ε y la relacionada con δ. A este factor se le denomina ***"función sobrativa"*** (también llamada *función equivalente*) *y* el valor numérico que tome afectará a $\varepsilon R\delta$. Por conveniencia, $|x-1|$ se denomina ***"función comparativa".***

El procedimiento que permite calcular el valor numérico de la ***función sobrativa*** es el siguiente:

Si $x \in E_{\delta}^{*}(1)$, entonces $x \to 1$, y por lo tanto $|x-1| \to 0$.

De aquí que: $|x-1| < 1$.

En consecuencia: $-1 < x-1 < 1$, (aplicando propiedades del valor absoluto)

Despejando *x*: $0 < x < 2$.

Como interesa conocer el valor numérico que sustituya a la ***función sobrativa***, se desarrolla esta última parte hasta determinar un intervalo numérico satisfactorio:

$$0+1 < x+1 < 2+1$$

Resultando que: $1 < x+1 < 3$

Considerando valor absoluto para toda la expresión, se tiene:

$$|1| < |x+1| < |3|$$

Por lo que: $1 < |x+1| < 3$

Siendo la ***función sobrativa*** un factor, es el 3 el número que hace que el producto tome el mejor valor (menor más cercano o el mayor de los menores) para que se cumpla la relación indicada a la izquierda del ***"siempre que"***. Luego, sustituyendo en (*):

$$3 \cdot |x-1| < \varepsilon \quad sq \quad |x-1| < \delta$$

De donde: $$|x-1| < \frac{\varepsilon}{3} \quad sq \quad |x-1| < \delta$$

La aparición de la ***función sobrativa*** cambió la condición inicial $|x-1| < 1$, entonces a δ se le debe asignar el valor más pequeño entre 1 y $\frac{\varepsilon}{3}$, es decir que: $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{3}\right)$ para que exista el límite.

3.- Sea $f(x) = 2x^2 + 3x + 5\cdot$ **Obtenga: a)** $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$, ***b)*** $\varepsilon R\delta$.

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}\left(2x^2+3x+5\right) = 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 5 = 32 \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 32}$

$b)$ $\varepsilon R\delta = ?$

$$\lim_{X\to 3}\left(2x^2+3x+5\right) = 32 \Leftrightarrow \left|f(x) - 32\right| < \varepsilon \quad sq \quad 0 < |x-3| < \delta, \quad \varepsilon > 0 \wedge \delta > 0$$

$$\lim_{X\to 3}\left(2x^2+3x+5\right) = 32 \Leftrightarrow \left|2x^2+3x+5-32\right| < \varepsilon \quad sq \quad |x-3| < \delta$$

Desarrollando el consecuente:

$$\left|2x^2+3x-27\right| < \varepsilon \quad sq \quad |x-3| < \delta$$

$$\left|\frac{4x^2+6x-54}{2}\right| < \varepsilon \quad sq \quad |x-3| < \delta$$

$$\left|\frac{(2x-6)\cdot(2x+9)}{2}\right| < \varepsilon \quad sq \quad |x-3| < \delta$$

$$\left|(x-3)\cdot(2x+9)\right| < \varepsilon \quad sq \quad |x-3| < \delta$$

$$|x-3| \cdot |2x+9| < \varepsilon \quad sq \quad |x-3| < \delta \quad (*)$$

La ***función sobrativa*** es el factor $|2x+9|$ en (*). Luego:

Si $|x-3| \to 0$, entonces $|x-3| < 1$. De aquí que:

$$-1 < x-3 < 1$$
$$2 < x < 4$$
$$4 < 2x < 8$$
$$13 < 2x+9 < 17$$
$$|13| < |2x+9| < |17|$$
$$13 < |2x+9| < 17$$

Volviendo a (*): $|x-3| \cdot 17 < \varepsilon \quad sq \quad |x-3| < \delta$

$$|x-3| < \frac{\varepsilon}{17} \quad sq \quad |x-3| < \delta$$

Se tiene, entonces, que $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{17}\right)$. El límite existe.

4.- Si $f(x) = \frac{1}{x}$**, se pide:** $a)\ \lim\limits_{x\to 2} f(x)$, $b)\ \varepsilon R \delta$.

Solución:

$$a)\ \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}$$

$$b)\ \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \quad sq \quad 0 < |x-2| < \delta, \qquad \varepsilon > 0 \wedge \delta > 0$$

$$\left|\frac{2-x}{2x}\right| < \varepsilon \quad sq \quad |x-2| < \delta$$

$$\left|\frac{-(x-2)}{2x}\right| < \varepsilon \quad sq \quad |x-2| < \delta$$

$$\left|\frac{x-2}{2x}\right| < \varepsilon \quad sq \quad |x-2| < \delta$$

$$\frac{|x-2|}{|2x|} < \varepsilon \quad sq \quad |x-2| < \delta \quad (*)$$

La ***función sobrativa*** es el divisor $|2x|$. Luego:

$$|x-2| \to 0$$
$$|x-2| < 1$$
$$-1 < x-2 < 1$$
$$1 < x < 3$$
$$2 < 2x < 6$$
$$|2| < |2x| < |6|$$
$$2 < |2x| < 6$$

Como la ***función sobrativa*** es un divisor, es el 2 el número que hace que el cociente tome el mejor valor (menor más cercano o el mayor de los menores) para que se cumpla la relación indicada a la izquierda del ***"siempre que"***. Luego, sustituyendo en (*):

$$\frac{|x-2|}{2} < \varepsilon \quad sq \quad |x-2| < \delta$$

$$|x-2| < 2\varepsilon \quad sq \quad |x-2| < \delta$$

De aquí que $\delta = \min(1, 2\varepsilon)$. El límite existe.

5.- Siendo $g(x) = \dfrac{x+8}{3x-5}$**, se desea conocer:** $a)\ \lim\limits_{x\to 2} g(x)$, $\ b)\ \varepsilon R\delta$.

Solución:

Resolviendo el límite:

$$a)\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+8}{3x-5}\right)=10$$

$$b)\ \lim_{x\to 2}\left(\frac{x+8}{3x-5}\right)=10 \Leftrightarrow \left|\frac{x+8}{3x-5}-10\right|<\varepsilon \quad sq \quad 0<|x-2|<\delta, \qquad \varepsilon>0\wedge\delta>0$$

$$\left|\frac{x+8-30x+50}{3x-5}\right|<\varepsilon \quad sq \quad |x-2|<\delta$$

$$\left|\frac{-29x+58}{3x-5}\right|<\varepsilon \quad sq \quad |x-2|<\delta$$

$$\left|\frac{-29\cdot(x-2)}{3x-5}\right|<\varepsilon \quad sq \quad |x-2|<\delta$$

$$\frac{29\cdot|x-2|}{|3x-5|}<\varepsilon \quad sq \quad |x-2|<\delta$$

$$\frac{|x-2|}{|3x-5|}<\frac{\varepsilon}{29} \quad sq \quad |x-2|<\delta \qquad \textbf{(*)}$$

El divisor $|3x-5|$ es la *función sobrativa*. Luego:

$$\begin{gathered}
|x-2| \to 0\\
|x-2|<1\\
-1<x-2<1\\
1<x<3\\
3<3x<9\\
-2<3x-5<4\\
|-2|<|3x-5|<|4|\\
2<|3x-5|<4
\end{gathered}$$

Por ser la ***función sobrativa*** un divisor, se escoge el 2. Entonces sustituyendo en **(*)**:

$$\frac{|x-2|}{2}<\frac{\varepsilon}{29} \quad sq \quad |x-2|<\delta$$

$$|x-2|<\frac{2}{29}\varepsilon \quad sq \quad |x-2|<\delta$$

De aquí que $\delta=\min\left(1,\dfrac{2}{29}\varepsilon\right)$. El límite existe.

6.- Si $h(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$**, se pide:** $a)\ \lim\limits_{x\to -2} h(x)$, $\quad b)\ \delta$ *cuando* $\varepsilon=0{,}01$.

Solución:

$$a)\ \lim_{X\to -2}\left(\frac{x^2-4}{x+2}\right)=\frac{(-2)^2-4}{-2+2}=\frac{4-4}{-2+2}=\frac{0}{0} \ \rightarrow \ \text{Se produce una Indeterminación.}$$

Para eliminar la Indeterminación, se factoriza el numerador y se simplifica la fracción:

$$\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}=x-2\,.$$

Luego:

$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{x^2-4}{x+2}\right)=\lim_{x\to -2}(x-2)=-2-2=-4 \qquad \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to -2} h(x)=-4}$$

$b)$ δ $para$ $cuando$ $\varepsilon=0{,}01$:

$$\lim_{x\to -2}(x-2)=-4 \quad \Leftrightarrow \quad |x-2-(-4)|<\varepsilon \quad sq \quad 0<|x-(-2)|<\delta; \qquad \varepsilon>0 \wedge \delta>0$$

$$|x-2+4|<\varepsilon \quad sq \quad |x+2|<\delta$$

$$|x+2|<\varepsilon \quad sq \quad |x+2|<\delta$$

Como existe la relación Épsilon Delta que garantiza la existencia del límite y utilizando el valor dado del Épsilon, queda determinado que: $\delta=0{,}01$

7.- Sea $f(x)=\frac{-x^2+4}{-x-2}$. **Se pide:** $a)$ $\lim_{x\to 2} f(x)$, $b)$ $\varepsilon R\delta$ ·

Solución:

$$a) \quad \lim_{x\to 2}\left(\frac{-x^2+4}{-x-2}\right)=\frac{-2^2+4}{-2-2}=\frac{-4+4}{-4}=\frac{0}{-4}=0 \qquad \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 2} f(x)=0}$$

$$b) \quad \lim_{x\to 2}\left(\frac{-x^2+4}{-x-2}\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{-x^2+4}{-x-2}-0\right|<\varepsilon \quad sq \quad 0<|x-2|<\delta; \qquad \varepsilon>0\wedge\delta>0$$

$$\left|\frac{-x^2+4}{-x-2}\right|<\varepsilon \quad sq \quad |x-2|<\delta$$

$$\left|\frac{-(x^2-4)}{-(x+2)}\right|<\varepsilon \quad sq \quad |x-2|<\delta$$

$$\left|\frac{-(x-2)\cdot(x+2)}{-(x+2)}\right|<\varepsilon \quad sq \quad |x-2|<\delta$$

$$|x-2|<\varepsilon \quad sq \quad |x-2|<\delta$$

Luego, existe la relación Épsilon Delta que garantiza la existencia del límite.

8.- Determinar la $\varepsilon R\delta$ **para que se verifique que** $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right)=\frac{1}{2}$ ·

Solución:

Calculando el valor del Límite:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right)=\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0} \quad \rightarrow \quad Indeterminación$$

Esta indeterminación no se puede eliminar racionalizando el denominador, puesto que al hacerlo, la indeterminación se mantiene.

Una posibilidad de solución para este problema es utilizando la conjugada de la función con la siguiente restricción:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}+1} \quad con \quad x\neq 1$$

Como se tiene que $L = \frac{1}{2}$, se deben considerar las siguientes rectas:

$a)\ \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2} + \varepsilon \quad \left(\varepsilon < \frac{1}{2}\right)$

Despejando $x = x_1$:

$$x_1 = \frac{\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)^2}{\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)^2}$$

$b)\ \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2} - \varepsilon \quad \left(\varepsilon < \frac{1}{2}\right)$

Despejando $x = x_2$:

$$x_2 = \frac{\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)^2}{\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)^2}$$

Planteado así la resolución del ejercicio, se tiene que $x_1 > x_2$, siendo $\delta = \min\left[\left|1 - x_1\right|, \left|1 - x_2\right|\right]$ y como es evidente que $\left|1 - x_1\right| < \left|1 - x_2\right|$, entonces:

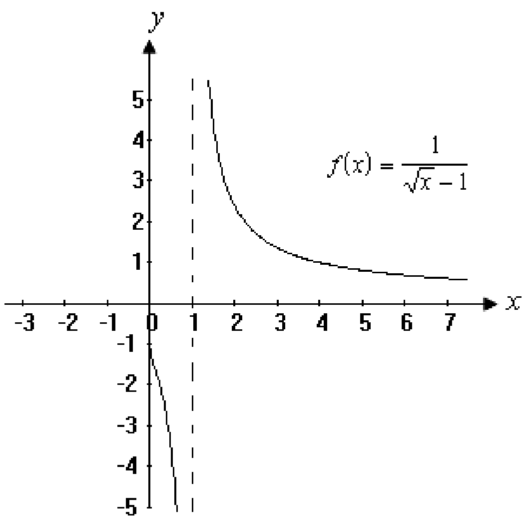
$$\delta = 1 - x_1 = 1 - \frac{\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)^2}{\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)^2} = \frac{\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)^2 - \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)^2}{\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)^2} = \frac{\frac{1}{4} + \varepsilon + \varepsilon^2 - \frac{1}{4} + \varepsilon - \varepsilon^2}{\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)^2} = \frac{2\varepsilon}{\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)^2} \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{2\varepsilon}{\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)^2}}$$

Como ejemplo, si $\varepsilon = 0{,}0001$ entonces $\delta = \frac{2 \cdot 0{,}0001}{\left(\frac{1}{2} + 0{,}0001\right)^2} = 0{,}0007997$

Tabla de valores para obtener la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$:

x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
f(x)	-1	-2	-3,4142	-7,4641	∞	8,47214	4,44949	3,09717	2,41421

Gráfica:



9.- Verifique la existencia de $\underset{x\to 1}{Lim}\left(\dfrac{x^3-1}{x-1}\right)$.

Solución:

Resolviendo el límite.

a) Valor del límite: $\underset{x\to 1}{Lim}\left(\dfrac{x^3-1}{x-1}\right)=\dfrac{1-1}{1-1}=\dfrac{0}{0} \quad \to \quad Indeterminación$

Eliminando la indeterminación: Factorizando el numerador y simplificando la fracción.

$$\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}{x-1}=x^2+x+1$$

Luego: $\underset{x\to 1}{Lim}(x^2+x+1)=3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underset{x\to 1}{Lim}\dfrac{x^3-1}{x-1}=3}$

$b)\ \varepsilon R\delta=?$

$\underset{x\to 1}{Lim}(x^2+x+1)=3 \quad \Leftrightarrow \quad |x^2+x+1-3|<\varepsilon$ *sq* $0<|x-1|<\delta;\quad \varepsilon>0\wedge\delta>0$

$|x^2+x-2|<\varepsilon$ *sq* $|x-1|<\delta$

$|(x+2)\cdot(x-1)|<\varepsilon$ *sq* $|x-1|<\delta$

$|x+2|\cdot|x-1|<\varepsilon$ *sq* $|x-1|<\delta$ **(*)**

(*) La ***función sobrativa*** es el factor $|x+2|$. Luego:

$$|x-1|\to 0$$
$$|x-1|<1$$
$$-1<x-1<1$$
$$0<x<2$$
$$2<x+2<4$$

Se escoge el 4. Entonces:

(*) $4\cdot|x+2|<\varepsilon$ *sq* $|x+2|<\delta$

$|x+2|<\dfrac{\varepsilon}{4}$ *sq* $|x+2|<\delta$

$\Rightarrow \boxed{\delta=\min\left(1,\dfrac{\varepsilon}{4}\right)}$ El límite existe.

10.- Dada $f(x)=x^2-10x+9,$ **se pide:**

$a)\ \underset{x\to 4}{Lim}\, f(x);\qquad b)\ \delta\ \ cuando\ \ \varepsilon=0{,}00001 \qquad c)\ \ Gráfica\ \ de\ \ la\ \ función.$

Solución:

Resolviendo el límite.

$a)\ \underset{x\to 4}{Lim}(x^2-10x+9)=16-40+9=-15 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underset{x\to 4}{Lim}\, f(x)=-15}$

$b)$ $\lim\limits_{x\to 4}\left(x^2-10x+9\right)=-15 \Leftrightarrow \left|x^2-10x+9-(-15)\right|<\varepsilon \quad sq \quad 0<|x-4|<\delta,\ \ \varepsilon>0 \wedge \delta>0$

$$\left|x^2-10x+9+15\right|<\varepsilon \quad sq \quad 0<|x-4|<\delta$$
$$\left|x^2-10x+24\right|<\varepsilon \quad sq \quad |x-4|<\delta$$
$$\left|(x-6)\cdot(x-4)\right|<\varepsilon \quad sq \quad |x-4|<\delta$$
$$|x-6|\cdot|x-4|<\varepsilon \quad sq \quad |x-4|<\delta \quad (*)$$

(*) La función sobrativa es el factor $|x-6|$:

$$|x-4|\to 0$$
$$|x-4|<1$$
$$-1<x-4<1$$
$$3<x<5$$
$$-3<x-6<-1$$
$$|-3|>|x-6|>|-1|$$
$$3>|x-6|>1$$

Se escoge 3. Luego:

(*) $3\cdot|x-4|<\varepsilon \quad sq \quad |x-4|<\delta$

$|x-4|<\dfrac{\varepsilon}{3} \quad sq \quad |x-4|<\delta$

Siendo $\delta=\min\left(1,\dfrac{\varepsilon}{3}\right)$, y como $\varepsilon=0{,}00001$, entonces $\delta=\dfrac{0{,}00001}{3}=0{,}0000033<1$, luego se tiene que $\delta=0{,}0000033$.

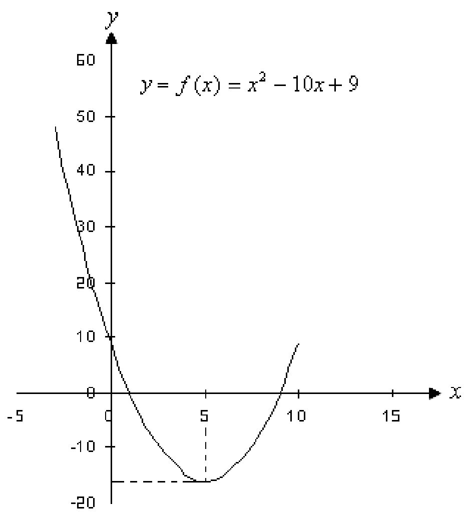
$c)$ Gráfica:

La función $f(x)=y=x^2-10x+9$ corresponde a una parábola. Completando cuadrado, se tiene: $(x-5)^2=y+16$. La parábola es de vértice V(5,-16); 4p=1 por lo que p = 1/4 **>** 0**.** La parábola abre hacia arriba. Además, también se tiene que $Dom_f=(-\infty,\infty)$ y $Rgo_f=[-16,\infty)$.

Tabla de valores para hacer la grafica de la función:

x	-3	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	4	5	6	7	8	9	10
f(x)	48	33	26,25	20	14,25	9	4,25	0	-3,75	-7	-15	-16	-15	-12	-7	0	9

A continuación, la gráfica de la función:



11.- Dada $g(t)=\dfrac{8}{t-3}$**, se pide:** $a)\quad \underset{t\to 7}{Lim}\, g(t),\quad b)\quad \varepsilon R\delta,\quad c)$ *Gráfica de g(t).*

Solución:

$$a)\quad \underset{t\to 7}{Lim}\left(\frac{8}{t-3}\right)=\frac{8}{7-3}=\frac{8}{4}=2 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\underset{t\to 7}{Lim}\, g(t)=2}$$

$$b)\quad \underset{t\to 7}{Lim}\left(\frac{8}{t-3}\right)=2 \quad\Leftrightarrow\quad \left|\frac{8}{t-3}-2\right|<\varepsilon \quad sq \quad 0<|t-7|<\delta,\quad \varepsilon>0\wedge\delta>0$$

$$\left|\frac{8-2t+6}{t-3}\right|<\varepsilon \quad sq \quad 0<|t-7|<\delta$$

$$\left|\frac{14-2t}{t-3}\right|<\varepsilon \quad sq \quad |t-7|<\delta$$

$$\left|\frac{-2\cdot(t-7)}{t-3}\right|<\varepsilon \quad sq \quad |t-7|<\delta$$

$$\frac{|-2|\cdot|t-7|}{|t-3|}<\varepsilon \quad sq \quad |t-7|<\delta$$

$$\frac{2\cdot|t-7|}{|t-3|}<\varepsilon \quad sq \quad |t-7|<\delta$$

$$\frac{|t-7|}{|t-3|}<\frac{\varepsilon}{2} \quad sq \quad |t-7|<\delta \quad (*)$$

(*) La *función sobrativa* es el divisor $|t-3|$. Luego:

$$|t-7|\to 0$$
$$|t-7|<1$$
$$-1<t-7<1$$
$$6<t<8$$
$$3<t-3<5$$
$$|3|<|t-3|<|5|$$
$$3<|t-3|<5$$

El valor a escoger es 3. De aquí que:

$$(*)\quad \frac{|t-7|}{3}<\frac{\varepsilon}{2} \quad sq \quad |t-7|<\delta$$

$$|t-7|<\frac{3}{2}\varepsilon \quad sq \quad |t-7|<\delta$$

Entonces, se tiene que: $\delta=\min\left(1,\dfrac{3}{2}\varepsilon\right)$.

$c)$ Gráfica: La función $g(t)=y=\dfrac{8}{t-3}$ no está definida para *t = 3.*

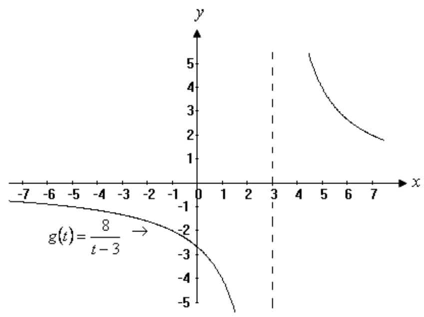
Asíntota Vertical: *t = 3*.

Asíntota Horizontal: $y=\dfrac{8}{t-3} \quad\Rightarrow\quad t=\dfrac{8+3y}{y} \quad\Rightarrow\quad y=0\cdot$

Tabla de valores para elaborar la gráfica:

t	-2	-1,5	-1	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
G(t)	-1,6	-1,78	-2	-2,67	-3,2	-4	-5,33	-8	-16	∞	16	8	5,33	4	3,2	2,67

Gráfica:



12.- Dada $f(x) = ax^2 + bx + c$**, comprobar que** $\delta = \min\left(1, \dfrac{\varepsilon}{|2ah + a + b|}\right)$ **cuando** $x \to h$ ·

<u>**Comprobación**</u>**:**

a) Valor del Límite:

$$\lim_{x \to h} f(x) = \lim_{x \to h}\left(ax^2 + bx + c\right) = ah^2 + bh + c \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lim_{x \to h} f(x) = ah^2 + bh + c}$$

b) Existencia del Límite:

$$\lim_{X \to h}\left(ax^2 + bx + c\right) = ah^2 + bh + c \iff \left|ax^2 + bx + c - ah^2 - bh - c\right| < \varepsilon \quad sq \quad 0 < |x - h| < \delta$$

$$\left|a\left(x^2 - h^2\right) + b(x - h)\right| < \varepsilon \quad sq \quad 0 < |x - h| < \delta$$

$$\left|a(x + h)(x - h) + b(x - h)\right| < \varepsilon \quad sq \quad |x - h| < \delta$$

$$\left|\left[a(x + h) + b\right] \cdot (x - h)\right| < \varepsilon \quad sq \quad |x - h| < \delta$$

$$\left|(ax + ah + b) \cdot (x - h)\right| < \varepsilon \quad sq \quad |x - h| < \delta$$

$$|ax + ah + b| \cdot |x - h| < \varepsilon \quad sq \quad |x - h| < \delta \quad (*)$$

(*) La *función sobrativa* es el factor $|ax + ah + b|$.

Luego:

$$x \to h$$
$$|x - h| \to 0$$
$$|x - h| < 1$$
$$-1 < x - h < 1$$
$$h - 1 < x < h + 1$$
$$ah - a < ax < ah + a$$
$$ah - a + ah + b < ax + ah + b < ah + a + ah + b$$
$$2ah - a + b < ax + ah + b < 2ah + a + b$$
$$|2ah - a + b| < |ax + ah + b| < |2ah + a + b|$$

Se escoge $|2ah + a + b|$ · Así:

(*) $$|2ah + a + b| \cdot |x - h| < \varepsilon \quad sq \quad |x - h| < \delta$$

$$|x - h| < \frac{\varepsilon}{|2ah + a + b|} \quad sq \quad |x - h| < \delta$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{|2ah + a + b|}\right)}$$ Comprobado.

13.- Comprobar que $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}\cdot$

<u>Comprobación</u>:

a) Existencia del Límite:

$$\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a} \Leftrightarrow \left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| < \varepsilon \ sq \ \ 0 < |x - a| < \delta; \qquad \varepsilon > 0 \wedge \delta > 0$$

Cambio de variable:

$$\begin{cases} \sqrt{x} = u & \Rightarrow & x = u^2 \\ \sqrt{a} = v & \Rightarrow & a = v^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \to a \\ u \to v \end{cases}$$

$$|u - v| < \varepsilon \ \ sq \ \ 0 < \left|u^2 - v^2\right| < \delta$$

$$|u - v| < \varepsilon \ \ sq \ \ |(u + v)\cdot(u - v)| < \delta$$

$$|u - v| < \varepsilon \ \ sq \ \ |u + v| \cdot |u - v| < \delta \ (*)$$

(*) La *función sobrativa* es el factor $|u + v|$:

$$u \to v$$

$$|u - v| \to 0$$

$$|u - v| < 1$$

$$-1 < u - v < 1$$

$$v - 1 < u < v + 1$$

$$2v - 1 < u + v < 2v + 1$$

$$|2v - 1| < |u + v| < |2v + 1|$$

Se escoge $|2v + 1|$. Luego:

(*) $$|u - v| < \varepsilon \qquad sq \qquad |2v + 1| \cdot |u - v| < \delta$$

$$|u - v| < \varepsilon \qquad sq \qquad |u - v| < \frac{\delta}{|2v + 1|}$$

$\Rightarrow$ Se da $\varepsilon R \delta$. El Límite existe.

b) Valor del Límite:

Se debe suponer que $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = L\cdot$ Luego:

$$\lim_{x \to a} \sqrt{x} = L \quad \Leftrightarrow \quad \left|\sqrt{x} - L\right| < \varepsilon \quad sq \quad |x - a| < \delta; \qquad \varepsilon > 0 \wedge \delta > 0$$

Asumiendo el mismo cambio de variable del aparte "a", se tiene:

$$|u - L| < \varepsilon \qquad sq \qquad \left|u^2 - v^2\right| < \delta$$

$$|u - L| < \varepsilon \qquad sq \qquad |(u + v)\cdot(u - v)| < \delta$$

$$|u - L| < \varepsilon \qquad sq \qquad |u + v| \cdot |u - v| < \delta$$

Siendo $u + v$ la *función sobrativa*, se descarta. Por comparación, se debe considerar que $u - L = u - v,$ por lo que $L = v$ y $v = \sqrt{a},$ entonces $L = \sqrt{a}.$

En consecuencia:

$$\boxed{\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}}$$ Comprobado.

14.- Comprobar que $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x^3}=\sqrt{a^3}$.

<u>Comprobación</u>:

a) Existencia del Límite:

$$\lim_{x\to a}\sqrt{x^3}=\sqrt{a^3} \iff \left|\sqrt{x^3}-\sqrt{a^3}\right|<\varepsilon \quad sq \quad |x-a|<\delta; \quad \varepsilon>0\wedge\delta>0$$

Cambio de variable:

$$\begin{cases}\sqrt{x^3}=u^3 \Rightarrow x=u^2\\ \sqrt{a^3}=v^3 \Rightarrow a=v^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\to a\\ u\to v\end{cases}$$

$$\left|u^3-v^3\right|<\varepsilon \quad sq \quad 0<\left|u^2-v^2\right|<\delta; \quad \varepsilon>0\wedge\delta>0$$

$$\left|(u-v)\cdot\left(u^2+uv+v^2\right)\right|<\varepsilon \quad sq \quad 0<\left|(u+v)\cdot(u-v)\right|<\delta$$

$$|u-v|\cdot\left|u^2+uv+v^2\right|<\varepsilon \quad sq \quad |u+v|\cdot|u-v|<\delta \quad (*)$$

(*) Hay dos *funciones sobrativas*: Los factores $|u+v|$ y $\left|u^2+uv+v^2\right|$. Hay que determinar sus valores.

$a)$ $|u+v|$: $u\to v$

$$|u-v|\to 0$$
$$|u-v|<1$$
$$-1<u-v<1$$
$$v-1<u<v+1$$
$$2v-1<u+v<2v+1$$
$$|2v-1|<|u+v|<|2v+1|$$

Se escoge $|2v+1|$.

$b)$ $\left|u^2+uv+v^2\right|$: $u\to v$

$$|u-v|\to 0$$
$$|u-v|<1$$
$$-1<u-v<1$$
$$v-1<u<v+1$$
$$uv-u<u^2<uv+u$$
$$2uv-u<u^2+uv<2uv+u$$
$$(2v-1)\cdot u+v^2<u^2+uv+v^2<(2v+1)\cdot u+v^2$$
$$\left|(2v-1)\cdot u+v^2\right|<\left|u^2+uv+v^2\right|<\left|(2v+1)\cdot u+v^2\right|$$

Se escoge $\left|(2v+1)\cdot u+v^2\right|$, pero al incluir a la variable "u" se tiene otra función sobrativa a la que también hay que determinarle su valor:

$\left|(2v+1)\cdot u+v^2\right|$: $u\to v$

$$|u-v|\to 0$$
$$|u-v|<1$$
$$-1<u-v<1$$
$$v-1<u<v+1$$
$$(2v+1)\cdot(v-1)<(2v+1)\cdot u<(2v+1)\cdot(v+1)$$
$$(2v+1)\cdot(v-1)+v^2<(2v+1)\cdot u+v^2<(2v+1)\cdot(v+1)+v^2$$
$$\left|(2v+1)\cdot(v-1)+v^2\right|<\left|(2v+1).u+v^2\right|<\left|(2v+1)\cdot(v+1)+v^2\right|$$

Se escoge $\left|(2v+1)\cdot(v+1)+v^2\right|\cdot$ Luego:

$$(*)\quad |u-v|\cdot\left|(2v+1)\cdot(v+1)+v^2\right|<\varepsilon \quad sq \quad |2v+1|\cdot|u-v|<\delta$$

$$|u-v|<\frac{\varepsilon}{\left|(2v+1)\cdot(v+1)+v^2\right|} \quad sq \quad |u-v|<\frac{\delta}{|2v+1|}$$

El Límite existe.

b) Valor del Límite:

Partiendo de la suposición $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x^3}=L,$ se tiene que:

$$\lim_{x\to a}\sqrt{x^3}=L \iff \left|\sqrt{x^3}-L\right|<\varepsilon \quad sq \quad 0<|x-a|<\delta; \quad \varepsilon>0\wedge\delta>0$$

Asumiendo el mismo cambio de variable del aparte "a", se tiene que:

$$\left|u^3-L\right|<\varepsilon \quad sq \quad 0<\left|u^2-v^2\right|<\delta$$

$$\left|u^3-\left(\sqrt[3]{L}\right)^3\right|<\varepsilon \quad sq \quad 0<\left|u^2-v^2\right|<\delta$$

$$\left|\left(u-\sqrt[3]{L}\right)\cdot\left(u^2+u\sqrt[3]{L}+\sqrt[3]{L^2}\right)\right|<\varepsilon \quad sq \quad |(u-v)\cdot(u+v)|<\delta$$

Estableciendo comparación, se hace evidente que $u-\sqrt[3]{L}=u-v,$ por lo que $\sqrt[3]{L}=v$, de donde $L=v^3.$ Pero como por el cambio de variable $v^3=\sqrt{a^3},$ entonces $L=\sqrt{a^3}.$

En consecuencia: $\boxed{\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x^3}=\sqrt{a^3}}$ Comprobado.

Ejercicios propuestos.-

I.- Dada $f(x)=2+5x,$ **se pide:**

$a)$ $\lim\limits_{X\to 2} f(x)$

$b)$ $\varepsilon R\delta$

II.- Sea $g(x)=x-3;$ **se pide:**

$a)$ $\lim\limits_{X\to -2} g(x)$

$b)$ $\varepsilon R\delta$

$c)$ Gráfica de $g(x)$

III.- Se tiene que $f(x)=x^2$, **obtenga:**

$a)$ $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

$b)$ $\varepsilon R\delta$

$c)$ δ para $\varepsilon=0{,}005$

$d)$ Gráfica de $f(x)\cdot$

IV.- Si $h(x)=4x-1,$ **determinar:** $a)$ $\lim\limits_{x\to 3} h(x),$ $b)$ $\varepsilon R\delta,$ $c)$ δ si $\varepsilon=0{,}001.$

V.- Si $f(x)=3-4x,$ **se pide:** $a)$ $\lim\limits_{x\to -1} f(x),$ $b)$ $\varepsilon R\delta,$ $c)$ δ $cuando$ $\varepsilon=0{,}02.$

VI.- Sea $g(x)=\frac{3}{2}x-7.$ **Determinar:** $a)\ \lim\limits_{x\to\frac{4}{3}} g(x),\quad b)\ \varepsilon R\delta.$

VII.- Si $g(x)=\frac{3+2x}{5-x},$ **obtener:** $a)\ \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} g(x),\quad b)\ \varepsilon R\delta.$

VIII.- Dada $f(x)=\frac{8-x}{x-3},\ se\ \ pide:\ a)\ \lim\limits_{x\to 7} f(x),\quad b)\ \varepsilon R\delta\cdot$

IX.- Determinar $\varepsilon R\delta$ **para que se verifique** $\lim\limits_{x\to 2}\left(-\frac{1}{\sqrt{x-1}-1}\right)=-\frac{1}{2}.$

X.- Determinar $\varepsilon R\delta$ **para verificar que** $\lim\limits_{x\to 5}\frac{4}{\sqrt{x-1}-2}=1.$

XI.- Comprobar que $\lim\limits_{x\to a} x^2=a^2.$

XII.- Comprobar que $\lim\limits_{x\to a} x^3=a^3.$

XIII.- Comprobar que $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{a}.$

Los Premios Nobel

Los galardones fueron creados por el magnate e inventor sueco Alfred Nobel

Fuente: EFE
Tomado de: El Carabobeño.com

FOTO REFERENCIAL IPROFESIONAL.COM

Los premios Nobel distinguen la excelencia científica, literaria y humana.

Los galardones fueron creados por el magnate e inventor sueco Alfred Nobel (1833-1896), a excepción del de Economía, instituido más de medio siglo después por el Banco de Suecia; y son entregados en una doble ceremonia cada 10 de diciembre, aniversario de su muerte, en Estocolmo y en Oslo.

Que el Nobel de la Paz se falle y entregue en Noruega obedece al deseo expreso del magnate, ya que en su época este país formaba parte del reino sueco.

El origen de los premios está ligado a las circunstancias personales de Nobel, quien acumuló una fortuna gracias a su talento como inventor, pero al que atormentaban las consecuencias funestas de su principal hallazgo: la dinamita.

Nobel legó su fortuna para premiar a bienhechores de la humanidad, sin importar su nacionalidad, y así quedó fijado en su testamento: el dinero se invirtió en valores inmobiliarios y los intereses se dividieron en cinco partes, tantas como premios.

Las discusiones sobre el testamento - los familiares trataron de declararlo inválido - y la dispersión de sus bienes provocaron retrasos, sumados al escepticismo o a la crítica de las instituciones a unos premios considerados poco patrióticos.

El rey Óscar II de Suecia, quien figuraba entre los opositores, promulgó finalmente en 1901 los estatutos de la Fundación Nobel.

Los premios pueden quedar desiertos, algo que ha ocurrido en 49 ocasiones, pero desde 1974 no pueden concederse a título póstumo, a no ser que el galardonado muera en el período transcurrido entre la concesión y la entrega del mismo.

La Fundación Nobel hizo una excepción con el canadiense Ralph M. Steinman, uno de los ganadores del premio de Medicina, ya que su muerte no se conoció hasta horas después del anuncio, por lo que se consideró que se había obrado de buena fe y no por circunstancias que motivaran suspicacias.

Entre 1901 y 2015 han sido premiados 23 organizaciones y 870 personas, 47 de ellas mujeres.

Seis personas y organizaciones han repetido premio, tres veces el Comité Internacional de la Cruz Roja, pero sólo una persona lo ha logrado más de una ocasión en solitario: el bioquímico Linus Pauling (EE UU), ganador del de Química (1954) y el de la Paz (1962).

En la familia Curie, Marie ganó el de Física en 1903, compartido con su esposo Pierre y Henri Becquerel, y el de Química en solitario en 1911; Irène Joliot-Curie, su hija, se hizo con el de Química en 1935, junto con su esposo, Fredéric Joliot.

Veintitrés personas de origen hispano - siete de ellas españoles - han ganado el Nobel, pero ninguno en Economía y en Física.

Dos galardonados han rechazado voluntariamente un premio: el escritor francés Jean Paul Sartre, el de Literatura, en 1964; y el político vietnamita Le Duc Tho, el de la Paz, en 1973. Y se registran cuatro casos de rechazo forzado por sus gobiernos: el más conocido, el de Borís Pasternak, al que las autoridades soviéticas obligaron en 1958 a no aceptar el de Literatura.

Todos los galardonados reciben un diploma, una medalla de oro y una dotación económica que este año será de 8 millones de coronas suecas (832.000 euros= 933.000 dólares), cantidad que se reparte si hay más de un ganador en la misma categoría. (LSN).

FÍSICOS NOTABLES

Jean Baptiste Perrin

Nació EL 30 de septiembre de 1870 en Lille, Francia y murió el 17 de abril de 1942, en Nueva York, EE. UU.

Ganador en 1926 del Premio Nobel en Física.

Por sus trabajos relativos a la discontinuidad de la materia y por el descubrimiento del equilibrio de sedimentación.

Fuentes: Biografías y Vidas - Wikipedia

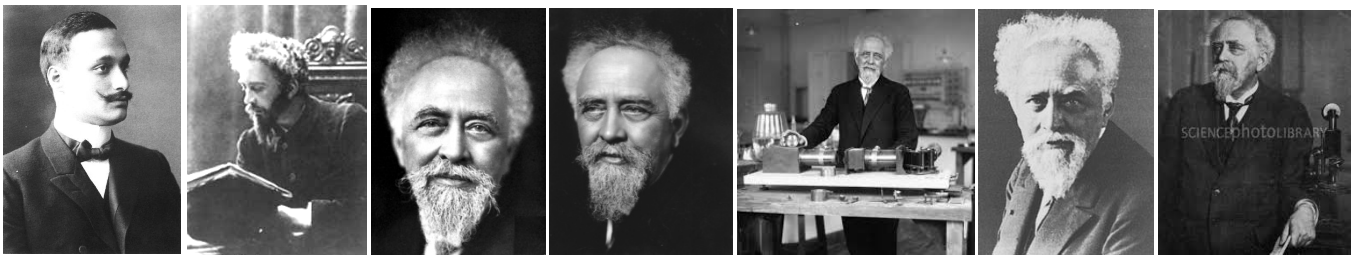
JEAN BAPTISTE PERRIN
(1870-1942)

Físico famoso por sus investigaciones sobre el movimiento browniano, que ofrecieron la primera demostración definitiva de la existencia del átomo. Hijo de un capitán de infantería, cursó sus estudios secundarios en Lyon, donde su padre estaba destinado, y se trasladó luego a París, donde en 1890 ingresó en la École Normale Supérieure.

Al término de su formación, una beca le permitió retrasar el momento de incorporarse a la enseñanza, y pudo consagrarse a la investigación, presentando su tesis doctoral en 1897 sobre *Les rayons cathodiques et les rayons Roentgen*. Dos años antes había publicado una importante memoria en los "Comptes rendus" de la Académie des Sciences, en la que ofreció argumentos en favor de considerar que los rayos catódicos estaban constituidos por partículas en movimiento cargadas negativamente.

En 1898 inició su carrera docente en la Sorbona como encargado de un curso de Física Química, materia de la que fue nombrado catedrático en la Facultad de Ciencias en 1910. El año anterior había publicado sus investigaciones sobre el movimiento browniano de partículas en solución acuosa, argumentando que dicho movimiento era consecuencia del bombardeo incesante de las partículas por las moléculas del agua, y ofreciendo estimaciones del tamaño de las mismas y del valor del Número de Avogadro más exactas que las disponibles hasta entonces; los resultados de sus experiencias fueron aceptados como prueba de la existencia de las moléculas y Jean Baptiste Perrin recibió el Premio Nobel de Física en 1926 por sus trabajos sobre la estructura discontinua de la materia.

En 1918 fue nombrado miembro de la Royal Society y en 1923 ingresó en la Académie des Sciences. En 1936 formó parte del gobierno de Léon Blum como subsecretario de Estado para la investigación científica, cargo desde el que promovió el Palais de la Découverte (1937) y el Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS, 1939). De entre sus obras cabe mencionar *Osmose et parois semi-perméables* (1900), *Principios de Química-Física* (1901), *Los átomos* (*Les Atomes,* 1912) y *Les éléments de la physique* (1930).



JEAN BAPTISTE PERRIN

Imágenes obtenidas de:

Google

© Lucas Jackson Source: Reuters

Stephen Hawking pronostica cuánto tiempo de vida en la Tierra nos queda

FUENTE: RT en Español
Tomado de: msn > 17-11-2016

El reconocido físico británico Stephen Hawking hizo hincapié en que se debe seguir explorando el espacio "para escapar de la frágil" Tierra.

El físico británico Stephen Hawking ha vaticinado que el ser humano no sobrevivirá otros 1.000 años a menos que encuentre otro planeta en el que vivir, con lo cual debemos seguir explorando el espacio "para escapar de la frágil" Tierra, informa 'The Independent'.

Durante una conferencia realizada en Oxford (Reino Unido), Hawking recordó "el gran cambio" que ha experimentado nuestra comprensión sobre el universo en los últimos 50 años, se mostró "feliz" por haber contribuido a ese proceso y estimó que estar vivo e investigar sobre física teórica en estos años resulta "glorioso".

"Es un triunfo"

"El hecho de que los seres humanos, que somos meras partículas fundamentales de la naturaleza, hayamos sido capaces de tener este entendimiento tan cercano sobre las leyes que nos rigen y sobre el universo es, sin duda, un triunfo", consideró este divulgador científico.

En relación a los "ambiciosos" experimentos que están pendientes de realizarse para otorgar una imagen más precisa del universo, el físico destacó la cartografía de la posición de miles de millones de galaxias y la utilización de superordenadores, como Cosmos, para comprender mejor la posición de la Tierra.

Sin embargo, casi todas las últimas predicciones que Stephen Hawking ha realizado en los últimos meses han sido pesimistas. En enero de 2016, este científico ya advirtió que los avances en la ciencia y la tecnología ponían en riesgo la continuidad de la humanidad, debido a que derivarán en "nuevas vías por las que las cosas pueden terminar mal". Además, en septiembre de 2016 nos llamó a abandonar la Tierra y colonizar otros planetas.

QUÍMICOS DESTACADOS

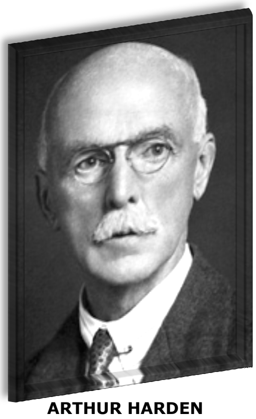
Sir Arthur Harden

Nació el 12 de octubre de 1865 en Mánchester, y murió el 17 de junio de 1940 en Bourne End; ambas localidades en el Reino Unido.

Por sus investigaciones en la fermentación de azúcares mediante enzimas.

Recibió el Premio Nobel en Química en 1929, compartiéndolo con Hans von Euler-Chelpin.

FUENTE: Wikipedia.



ARTHUR HARDEN (1865-1940)

Síntesis biográfica

Bioquímico y profesor universitario. Fue educado en una escuela privada y en el Tettenhall College, Staffordshire. Entró en el Owens College de la Universidad de Mánchester en 1882, y se graduó en 1885. En 1886 ganó la beca Dalton de Química y pasó un año trabajando con Otto Fischer en Erlangen. Volvió a Manchester como lector y demostrador, y permaneció hasta 1897, cuando fue nombrado químico del recientemente fundado Instituto Británico de Medicina Preventiva, que más tarde pasaría a llamarse Instituto Lister. En 1907 fue nombrado director del departamento de bioquímica, puesto que mantuvo hasta su jubilación en 1930, continuando su labor investigadora en el Instituto después de su retiro.

Fue miembro de la Royal Society de Londres, y en 1936 el rey Eduardo VIII del Reino Unido le concedió el título de caballero del Imperio Británico (*sir*).

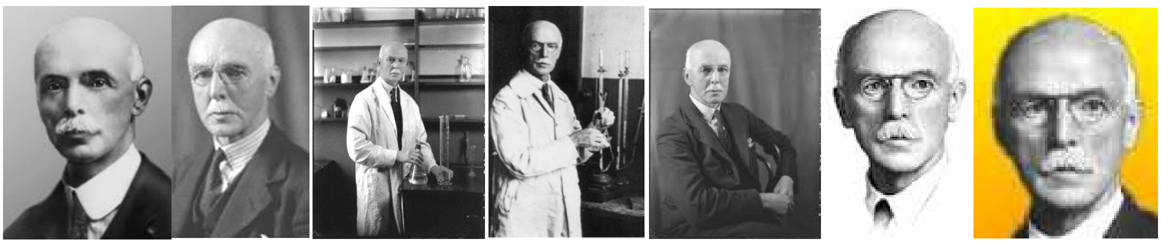
En 1935 recibió la medalla Davy de la Royal Society y recibió numerosos nombramientos de *Doctor Honoris Causa*.

Investigaciones científicas

Sus investigaciones más importantes se refieren a los procesos químicos que tienen lugar en la fermentación de los azúcares por las células de las levaduras. Descubrió un procedimiento de aceleración en la fermentación añadiendo fosfatos inorgánicos, y estudió la acción de la luz en las mezclas de dióxido de carbono y cloro.

En 1929 fue galardonado con el premio Nobel de Química, compartido con Hans von Euler-Chelpin, *por sus investigaciones en la fermentación de azúcares mediante enzimas*.

Entre 1913 y 1937 fue codirector del *Biochemical Journal*. Entre sus libros destaca *Alcoholic Fermentation* (1911).



ARTHUR HARDEN

Imágenes obtenidas de:

Google

QUÍMICOS DESTACADOS

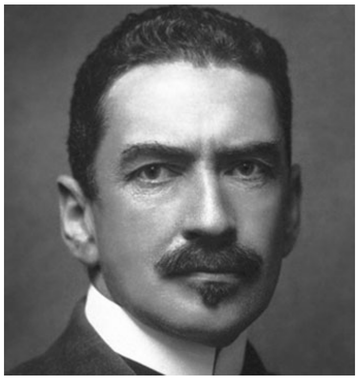
Hans von Euler-Chelpin

Nació el 15 de febrero de 1873 en Augsburgo, Alemania y murió el 6 de noviembre de 1964 en Estocolmo, Suecia

Por sus investigaciones en el campo de la fermentación del azúcar y las enzimas de la fermentación.

Recibió el Premio Nobel en Química en 1929, compartiéndolo con Arthur Harden.

FUENTE: Wikipedia.



HANS VON EULER-CHELPIN (1873-1964)

Síntesis biográfica

Hans Karl August Simon von Euler-Chelpin. Comenzó a estudiar pintura, pero su deseo de estudiar los problemas del color, y especialmente los colores del espectro, le hicieron comenzar a estudiar ciencias. Estudió en la Universidad de Gotinga, en la Universidad de Wurzburgo y en la Universidad de Berlín, donde alcanzó el doctorado en 1895.

Posteriormente fue profesor en la Universidad de Estocolmo, siendo nombrado director del Instituto de Bioquímica de la Universidad desde 1929. En 1941 abandonó la enseñanza, pero continuó con sus investigaciones.

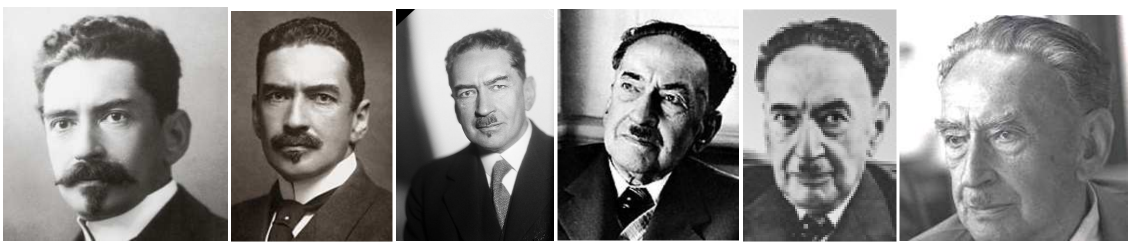
Hans se casó con la química Astrid Cleve (hija del químico Per Teodor Cleve de Upsala). Ambos tuvieron un hijo, Ulf von Euler, que fue galardonado con el Premio Nobel de Fisiología o Medicina del año 1970.

Investigaciones científicas

Sus investigaciones se dirigieron fundamentalmente al estudio del contenido en vitaminas de algunos vegetales, a la carotina como provitamina A y a la química de las enzimas de la fermentación.

Fue galardonado en 1929 con el premio Nobel de Química (premio compartido con sir Arthur Harden) por sus investigaciones en el campo de la fermentación del azúcar y las enzimas de la fermentación.

Entre las obras que escribió la más importante es *Chemie der Enzyme* (1910).



HANS VON EULER-CHELPIN

Imágenes obtenidas de:

Google

Científicos argentinos buscan develar cómo los dinosaurios se hicieron gigantes

FUENTE:

Infobae

© Proporcionado por THX Medios S.A.

Treinta huevos de dinosaurios, un bebé y un ejemplar juvenil del prosaurópodo Mussaurus patagonicus, un dinosaurio herbívoro primitivo que vivió aproximadamente hace 200 millones de años en Patagonia, fueron analizados con los potentes rayos X del sincrotrón. Por primera vez todos estos fósiles únicos e inusuales viajaron desde la Argentina hasta la Instalación Europea de Radiación Sincrotrón (ESRF, por su sigla en inglés) en Grenoble, Francia, para ser estudiados. ¿El objetivo? Entender más sobre el relativamente desconocido desarrollo y crecimiento de Mussaurus y averiguar cómo los dinosaurios evolucionaron a criaturas gigantes.

Es la primera vez que una colección de este tipo de especímenes de dinosaurios (que van desde el estado embrionario a la fase juvenil) se estudia en un sincrotrón. Diego Pol, paleontólogo especialista en vertebrados e investigador principal del CONICET en el Museo Paleontológico Egidio Feruglio en Trelew, Chubut, considera que la ESRF puede brindar muchas respuestas tanto sobre el crecimiento del Mussaurus como también sobre los dinosaurios en general y en particular sobre la transición de sauropodomorfos basales a saurópodos. "Nunca hubo un rango de fósiles de la misma especie en etapas diferentes, es una oportunidad única", comenta el investigador, quien durante sus expediciones en la Patagonia y en otros continentes ha realizado diferentes descubrimientos fósiles.

Si bien el origen de los dinosaurios saurópodos es uno de los grandes hitos de la evolución de los dinosaurios, aún presenta interrogantes. ¿Cómo llegaron los dinosaurios a ser las criaturas más grandes de la tierra, como el caso del Brachiosaurus, del Diplodocus o del Brontosaurus? Los paleontólogos saben desde hace décadas sobre los inicios y desaparición del grupo de dinosaurios conocido como sauropodomorfos. También sabían sobre un grupo relacionado llamado prosaurópodos, que incluía dinosaurios de tamaño y postura intermedia como el Mussaurus patagonicus. Lo que se desconocía era exactamente qué pasos completaban la transición entre los prosaurópodos y los saurópodos. Esta transformación drástica implicó modificaciones importantes en el esqueleto y el Mussaurus se encuentra muy cerca de esta transición y el origen de los saurópodos. Es por esto que obtener información valiosa sobre el crecimiento de esta especie de dinosaurio y el desarrollo de su esqueleto y cráneo puede brindar información clave para entender los orígenes evolutivos de los saurópodos.

En la década del 70, en una zona desértica en el centro de la Patagonia, geológicamente conocida como Grupo El Tranquilo, el paleontólogo argentino José Bonaparte halló el esqueleto completo de un bebé dinosaurio, que luego llamó Mussaurus (debido a su tamaño similar al de un ratón) patagonicus. No fue sino hasta treinta años después que un grupo de investigadores liderado por Pol regresó a ese punto original en búsqueda de nuevos fósiles. El primero que Pol encontró fue un nido con muchos huevos. "La sensación de hallar algo tan único es absolutamente fantástico", explica. Pero al científico y su equipo les esperaba una sorpresa: el sitio albergaba 80 huevos, cráneos y esqueletos de Mussaurus juveniles de aproximadamente dos años. Aparentemente el sitio albergaba una colonia reproductiva donde los dinosaurios mantenían a los más pequeños durante su etapa más vulnerable.

Algunos de los huevos se hallaban cubiertos alrededor por un sedimento similar al cemento. Pol no espera encontrar embriones en todas las muestras que recuperó, debido a que con el tiempo algunos podrían haberse descompuesto y no queda nada en el interior. Entre los fósiles hay un huevo que se resquebrajó y los paleontólogos vieron directamente los huesos del embrión adentro. Trataron de realizar una tomografía en su laboratorio pero, a pesar de que veían el embrión, no podían distinguir las diferentes partes.

Pol se había interesado en el uso de sincrotrón para las investigaciones de especímenes paleontológicos. "Cuando comenzaron los estudios que empleaban radiación de sincrotrones, hace una década aproximadamente, fue una revelación ver todas posibilidades que teníamos para averiguar que hay dentro de los fósiles sin destruirlos", comenta el investigador y agrega: "Antes de eso, las posibilidades de descubrir lo que estaba dentro de los huevos eran muy remotas ya que no podíamos cortar el espécimen".

A través de un contacto en común se comunicó con Vincent Fernandez, un científico de la ESRF que en ese entonces era investigador posdoctoral en la Universidad de Witwatersrand, en Sudáfrica. Consideraron que estos huevos contenían muchas respuestas potenciales sobre la evolución de dinosaurios y por eso trataron de llevarlos a la ESRF.

En las últimas dos décadas, la ESRF ha desarrollado un conocimiento único en paleontología a nivel mundial, diseñando técnicas no invasivas específicas para investigaciones paleontológicas. Aunque el equipo de paleontología de la ESRF examina a diario fósiles de dientes, huesos y cráneos, el escaneo de este rango de huevos de dinosaurios de una misma especie, y muy bien preservados, es excepcional. Vincent Fernandez explica que, para este experimento, "la ESRF permite realizar una micro-tomografía de contraste de fase de propagación a larga distancia en una muestra de gran tamaño, a altas energías, con una etapa de muestra dedicada. Esto permite producir información en 3D para estudios anatómicos de estos embriones y representar regiones de interés en alta resolución – como el cráneo – para cuantificar el patrón de osificación a través del desarrollo de estos embriones".

Durante cuatro días y noches escanearon 30 huevos, el esqueleto del bebé y el cráneo del juvenil en la línea ID19 de la ESRF. "Es emocionante y muy prometedor. Es como un segundo descubrimiento", cuenta Pol mientras examina los primeros escaneos y lo que probablemente es el fémur de un embrión. Sin embargo, recién cuando logren estudiar toda la información obtenida podrán, con suerte, develar los secretos del Mussaurus y revelar el misterio de los orígenes evolutivos de los dinosaurios gigantes.

Cultura

Aventura en el Mar Tenebroso

Por: **Charito Rojas**
Charitorojas2010@hotmail.com
Twitter:@charitorojas

Tomado de: Notitarde.com > miércoles, 12 de octubre de 2016

(Cortesía/)

El 2 de enero de 1492 los Reyes Católicos, Fernando e Isabel, ponían las banderas en el Alcázar de Granada, de donde habían expulsado al sultán árabe Boabdil, acabando así con 800 años de presencia islámica en la península ibérica.

Esos momentos triunfales son aprovechados por un osado navegante que tenía una idea fija, la cual era navegar a través del llamado Mar Océano, esa masa de agua inexplorada y temible, para llegar a Cipango, es decir, Japón. La empresa era toda una aventura, llena de miedos y peligros pero que prometía hallar la vía más corta hacia lo que en esa época era un tesoro: las especies orientales.

El rey Fernando no estaba convencido de patrocinar tal aventura: la guerra había dejado exhaustas las arcas del reino, pero Isabel después de muchos meses de escuchar los argumentos del tal Cristóbal Colón, se sintió tentada a financiarlo, después que él le ofreciese que todas las tierras a las que llegase serían bautizadas y consagradas a su reino y a la iglesia católica, cuya religión se impondría con la llegada de estos enviados de los Reyes Católicos. Es la época en que Colón firma como *"Xpo Ferens"*, que traducido del latín significa *"Cristo el enviado"*. Sin embargo, sus propósitos eran más personales y comerciales que religiosos.

ECHARSE A LA MAR

El navegante hablaba un castellano enrevesado, que denotaba su origen extranjero. Podía ser genovés, ciudad marinera con la que mantenía lazos comerciales y familiares; o portugués, país donde se había casado y tenido un hijo y que por cierto, su rey había rechazado financiar el proyecto de Colón pues consideraba segura la ruta de Cabo Verde, bordeando África para llegar a las Indias. Muchos aseguraban que su hablar no era portugués sino gallego.

La historia jamás ha encontrado un certificado de nacimiento de Cristóbal Colón y su nacionalidad es un tema de nunca acabar. Pero lo que es indiscutible es el empeño y poder de convicción que tuvo para lograr el patrocinio de los Reyes Católicos a su peligrosa aventura. En una carta dirigida a la pareja real, Colón argumenta así sus conocimientos y por lo tanto, su capacidad para realizar tal empresa:

"A éste mi deseo hallé a Nuestro Señor muy propicio, y hube del para ello espíritu dé inteligencia. En la Marinería me hizo abundoso, de Astrología me dio lo que abastaba, y ansí de Geometría y Aritmética, e ingenio en el ánima —y manos para dibujar esta esfera— y en ella las ciudades, ríos y montañas, islas y puertos todo en su propio sitio. En este tiempo he yo visto y puesto estudio en ver todas las escrituras, cosmografía, crónicas y filosofía de otras artes".

Sin duda Cristóbal Colón ya entonces en sus 41 años, era un experimentado marinero que había capitaneado naves por mares conocidos y se había enterado de las expediciones de otros navegantes por tierras ignotas. Entre marineros se rumoraban las historias de islas avistadas más allá de las Azores, último punto de la civilización conocida. Ya algunos geógrafos y sabios habían hablado de la redondez de la Tierra, pero desconocían la ley de gravedad, por lo que asumían que después del horizonte los barcos que se aventuraran caerían al vacío infinito. Esa escena, pintada en esa Edad Media, causaba pánico y espantaba a quienes pudiesen intentar la travesía. Sin embargo, el *"Mar Tenebroso"*, como le llamaban, ya había sido explorado por su parte norte, a comienzos de ese milenio, por vikingos y pueblos nórdicos, que desde Islandia pasaron a través de Groenlandia a una tierra que llamaban *"Vineland"*: la costa noreste de lo que hoy es América del Norte. Pero esto jamás tuvo carácter de descubrimiento reconocido y mucho menos de colonización, por lo que el navegante Cristóbal Colón, de desconocidos orígenes pero de preclaros conocimientos marítimos, encontró las puertas abiertas para ganar el título de *"Descubridor de América"*.

LA GRAN AVENTURA

En pocos meses, Colón se hace con tres barcos: dos carabelas llamadas *"La Pinta"*, propiedad de *Cristóbal Quintero* y *"La Niña"*, que pertenecía a un marino de Moguer llamado *Juan Niño*. Eran naves pequeñas, de unos 25 a 30 metros de largo, por lo que Colón busca una grande, llamadas "nao" y encuentra a la *"Marigalante"* (que significa "mujer de vida alegre"), propiedad de *Juan de La Cosa*. Lo convierte en la nave capitana, cambiándole el nombre a *"Santa María"*. Con una tripulación de 90 hombres, se hace a la mar llevando a *Martín Alonso Pinzón* como capitán de "La Pinta" y a *Vicente Yáñez Pinzón*, capitán de "La Niña". Los propietarios de las carabelas, tres médicos y un par de inspectores de la corona iban a bordo, así como un *intérprete de lenguas orientales*, llamado *Luis de Torres*, lo cual prueba la seguridad absoluta que tenía Colón de que su viaje lo llevaría a las Indias.

Finalmente zarparon del *Puerto de Palos de Moguer el viernes 3 de agosto de 1492*, tomando la ruta de las islas Canarias para enfrentar desde allí al Mar Océano. Una avería en el timón de La Pinta los retiene allí hasta el 6 de septiembre. El pánico por la inmensidad de un mar desconocido va apoderándose de la tripulación, que después de un mes de navegación no había visto ni un gramo de tierra alrededor. Intentos de motín para obligar a Colón a devolverse fueron sofocados por la promesa del capitán de la expedición de que muy pronto avistarían tierra. La lectura del diario de abordo escrito por Colón, revela que alteró los números de las distancias recorridas para que nadie se enterase de las distancias reales. En esos momentos ni él mismo sabía cuánto faltaba para llegar al destino que buscaban.

El 7 de octubre el diario de Colón reporta que vieron pelícanos dirigiéndose al suroeste y las naves cambian el rumbo en esa dirección. Pero seguían sin ver tierra. La impaciencia se calmó cuando marineros de La Pinta recogieron del mar palos, señal de la cercanía de tierra.

Los reyes habían ofrecido una recompensa de 10.000 maravedíes al marinero que avistase por vez primera tierra firme. Dicen que en la Santa María ya celebraban, porque Colón dijo haber visto "una candelilla", cuando a las 2 de la madrugada de ese 12 de octubre, el vigía de La Pinta, llamado *Rodrigo de Triana* -por su lugar de nacimiento, aunque en verdad se llamaba *Rodrigo de Bermejo*-, gritó *"¡Tierra, tierra!"*, cuando vio a lo lejos una colina iluminada por la luna.

En la mañana arribaron a una playa paradisíaca, Colón bautizó esta tierra como *San Salvador*. En esas arenas de la isla llamada por los indígenas Guanahaní, se realizó el encuentro de dos mundos que hasta ese momento ignoraban la existencia uno del otro. Colón tomó posesión de esas tierras en nombre de los Reyes Católicos, como era lo acordado con ellos y los amistosos indígenas le obsequiaron papagayos y ovillos de algodón. Embarcaron a varios de los "lucayos" (isleños), para que los guiasen a través de lo que se dieron cuenta era un archipiélago que posteriormente fueron bautizadas como *Las Lucayas* y ahora conocemos como *Las Bahamas*. En esos días, el exultante Colón descubrió y bautizó cuanta tierra tocaba: *Santa María*, *Fernandina* y *La Isabela*; desembarcó en lo que creyó tierra firme y la llamó *"Juana"* (como *La Loca*, hija de los reyes), a momentos creía que era Cipango (Japón). Los nativos hablaban del *"Can"*, como su jefe máximo por lo que Colón asumió que se trataba del Gran Khan, jefe mongol. Los rasgos achinados de los indígenas daban al navegante la seguridad que se encontraba en las Indias Orientales.

El 6 de diciembre llegó a la isla *Bohío*, a la que llamó *"La Española"* (Santo Domingo). La noche del 25 de diciembre la "Santa María" chocó contra los arrecifes y empezó a hundirse. Al no poder reflotarla, Colón ordenó sacar sus tablones y construir un fortín al que llamó *"La Navidad"*. Allí dejó a 36 hombres al mando de *Diego de Arana* y el 2 de enero de 1493 inició regresó a España a bordo de La Niña.

LOS DOS MUNDOS

El 15 de marzo de 1493 la expedición llegó triunfante al Puerto de Palos. Llevaban presentes para los Reyes y Cristóbal Colón les dirigió una carta solicitando ser recibido por ellos para narrarles su gran aventura. Fue honrado con títulos, como Almirante del Mar Océano, posteriormente Virrey y Gobernador de las Indias Occidentales, nombre con el que se conocieron esas tierras descubiertas por Colón hasta una década después de su muerte en 1506. El Almirante hizo otras tres expediciones, la última de las cuales regresó cargado de cadenas pero luego la Reina, su benefactora de siempre, lo absolvió.

La historia marca un antes y un después de esa gesta de Cristóbal Colón, un navegante osado que en nombre de Dios y de España, descubrió para el mundo occidental que entonces se conocía ese nuevo continente que renovó la cultura, los inventos, la agricultura y ganadería, que aportó beneficios y males a los dos mundos. El navegante jamás se enteró que había descubierto otro continente. La reina Isabel, quien murió días antes que Colón, tampoco. Un cosmógrafo italiano de nombre Américo Vespucci, se dio cuenta mientras hacía el recorrido bordeando las costas, que aquello no eran las Indias Occidentales, sino un nuevo y desconocido continente al que puso su nombre en 1516: América.

12 de Octubre:
12 falsos mitos sobre el descubrimiento de América

© Proporcionado por elmundo.es
Tomado de msn > 12octubre 2016

El *descubrimiento* de América es un episodio controvertido lleno de mitos, leyendas, inexactitudes e historias dulcificadas. **Ni** siquiera es posible saber con certeza dónde, y cuándo, nació **su** *descubridor*, Cristóbal Colón**.** Una mayor parte de los historiadores concuerdan que nació en Génova, aunque también los hay que apuntan a Cataluña y a la ciudad de Calvici en Córcega. Sin embargo, ni entre los partidarios de su origen genovés consiguen ponerse de acuerdo en su fecha de nacimiento y barajan un arco de nada menos que 20 años (entre 1436 y 1456) sobre el día en el que el más célebre navegante vino al mundo.

Esta lista busca arrojar un poco de luz sobre la fecha del *12 de octubre*, sus falsos mitos y mostrar algunos de sus detalles más truculentos y menos conocidos.

1. Colón no llegó a América el 12 de octubre.

El calendario que manejamos en la actualidad, no es el mismo que había en la época en la que vivió Cristóbal Colón. Cuando el navegante inició sus viajes, se empleaba el calendario Juliano (cuyo uso se había instaurado en la antigua Roma). Un calendario que, prácticamente un siglo después, los astrónomos descubrieron que no era exacto. Al ser advertido de este hecho en 1582, el Papa Gregorio decidió corregir este error y se pasó de golpe del 4 de octubre de 1582 al 15 de octubre de 1582, la fecha real. Los días intermedios entre ambas fechas no se perdieron. Simplemente no se habían contabilizado bien con el calendario juliano. Por lo tanto, los astrónomos apuntan que **Colón debió avistar tierras americanas un 20 o 21 de octubre y no el día 12 de octubre**, cómo se nos ha hecho creer.

2. Colón no viajó con tres carabelas.

En realidad fueron dos carabelas y una Nao**.** El nombre original de la nao era María Galante, aunque Cristóbal Colón decidió cambiarle el nombre la Santa María**.** La diferencia entre las Nao y las carabelas es que las primeras no tienen castillo de proa y las segundas carecían del mismo.

3. La Pinta y la Niña no eran los nombres reales de dos de las carabelas.

Al igual que la Santa María se llamó originariamente María Galante pero Colón decidió cambiarle el nombre, el nombre por el que han pasado a la historia las otras dos naves no es el real.. La tradición náutica hacía que los barcos fuesen bautizados con nombres de santas. Sin embargo, la marinería tendía a poner motes a las embarcaciones. De este modo, el nombre real de La Niña era el de Santa Clara**.** Sin embargo, el nombre real de La Pinta no ha transcendido.

4. Colón abandonó a sus marinos a su suerte.

La Santa María encalló el día de Nochebuena de 1492 (que realmente no sería el día de Nochebuena por los fallos en el calendario) en un unos corales al norte de la isla La Española, hoy en día Haití. Este incidente provocó que Cristóbal Colón tuviese que regresar a España a bordo de La Niña abandonando a 40 marineros a su suerte en el primer asentamiento europeo en América conocido como La Navidad. Sin embargo, cuando Colón regresó al asentamiento en otoño de 1493, todos los marineros abandonados habían muerto**.**

5. Colón hizo su último viaje a América muerto.

Aunque Colón fue enterrado en Valladolid, más adelante su cuerpo se llevó a Sevilla. De ahí, sus restos fueron transferidos por mar a la catedral de Santo Domingo, en la actual República Dominicana. Sin embargo, cuando la isla fue conquistada por los franceses sus restos fueron llevados a Cuba hasta 1898 y de ahí, de vuelta a la catedral de Sevilla.

6. Colón fue un gobernante tiránico.

Mientras era gobernador de la isla de La Española, Colón era conocido por sus métodos tiránicos y brutales. Los españoles se quejaban de su paupérrima gestión y de la ligereza con la que mandaba ejecutar a los suyos en el patíbulo. Una trato del que también perjudicaba los nativos, que sufrían torturas y castigos corporales cuando su trabajo no era considerado suficientemente diligente por Colón. En agosto del año 1500, un comisionado real arrestó a Cristóbal Colón y lo devolvió a España encadenado.

7. Aun así, la corona le pagó más viajes exploratorios.

Aunque un mal gestor, Colón era un buen navegante y el rey Fernando decidió subvencionar un nuevo viaje del marino.

8. Colón estafó a su propia tripulación.

Los Reyes Católicos prometieron una recompensa de 10.000 maravedíes al primero que avistase tierra. El primero en hacerlo fue el marinero Rodrigo de Triana. Sin embargo, Colón le negó su recompensa argumentando que él la había divisado en forma de luces en la noche anterior y evitó así pagar los 10.000 maravedíes, y un jubón de seda que el mismo había prometido añadir al bote, a Rodrigo de Triana.

Descontento por los impagos de Cristóbal Colón, Rodrigo de Triana renegó de la fe católica y se fue a vivir a África como un pirata**.**

9. Colón no fue el primer europeo en cruzar el atlántico.

Cristóbal Colón no fue el primer europeo en poner un pie en América. Antes que él lo hizo el navegante Vikingo Leif Eriksson, escala mediante en Islandia, alrededor del año 1000.

10. En España no siempre fue un día festivo.

El *12 de octubre* es festivo en España desde 1918 bajo la denominación de *Fiesta de la Raza*. Bajo la dictadura de Franco, en el 1940, pasa a llamarse *Día de La Raza*. En 1958, también durante el franquismo, su nombre cambió por el de *Fiesta de la Hispanidad*. En 1987 cambia su nombre por el de *Fiesta Nacional de España*, denominación que se mantiene en el presente.

11. Cuba no celebra este día.

Cuba es el único país hispanoamericano que no celebra este día. En su lugar celebra el 10 de octubre, día en el que comenzó su guerra de la independencia contra España en el año 1868.

12. En América Latina, cada país lo llama de una manera.

Cada país de América Latina llama a este día de un modo distinto. Por ejemplo, en Venezuela comenzó llamándose *Día de la Raza* (1921). Sin embargo, en el año 2002, el presidente Hugo Chávez cambió su nombre por el de *Día de la Resistencia Indígena*, a raíz de una serie de peticiones de colectivos indígenas.

En Bolivia se llama *Día de la Descolonización*. Anteriormente se había llamado Día de la Liberación, de la Identidad y de la Interculturalidad.

En Bahamas lo llaman *Día del Descubrimiento*. Mientras tanto, en Argentina lo llaman *Día del Respeto a la Diversidad Cultural* desde el año 2010. Hasta entonces, se llamó *Día de la Raza*. Una denominación que, sin embargo, se sigue manteniendo en Honduras.

En EEUU lo llaman Día de Colón y es una festividad fuertemente ligado a su numerosa comunidad ítalo-americana.

GALERÍA

EMMA CASTELNUOVO

Nació el 12 de diciembre de 1913, y murió el 13 de abril de 2014, próxima a cumplir los 101 años; ambos momentos en Roma, Italia.

La Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI) ha decidido recientemente crear dos premios para reconocer los logros excepcionales en investigación en educación matemática: el premio Felix Klein, para honrar los logros de toda la vida y el premio Hans Freudenthal, para reconocer al programa concluido de investigación más importante. Con el fin de reflejar un aspecto principal del ICMI, aun no reconocida en forma de laudo, en 2013 el ICMI decidió crear un tercer premio para reconocer los logros excepcionales en educación media en relación a la enseñanza de las matemáticas. Este premio fue nombrado después Emma Castelnuovo. Para entender por qué el nombre de esta maestra de la secundaria italiana se asocia a este premio especial, se delinean acá los principales aspectos de su trabajo en la escuela y para la escuela. Su vida y su carrera se entrelazan con los eventos que cambiaron el enfoque a los problemas de la educación matemática en la segunda mitad del siglo XX.

Emma Castelnuovo nació en Roma el 12 de diciembre de 1913 y falleció en Roma el 13 de abril de 2014. Ella creció en un entorno excepcional matemático. Es bien sabido que en la primera mitad del siglo XX un importante campo de investigación matemática, geometría algebraica, prosperaba en Italia. El padre de Emma, Guido Castelnuovo, y su tío Federigo Enriques, hermano de su madre Elbina, fueron destacados investigadores en este campo, ambos catedráticos universitarios. También estuvieron muy comprometidos con la educación matemática. En 1908 Guido fue el Presidente del cuarto Congreso Internacional de Matemáticos en Roma, cuando se formó la Comisión que daría origen a la fundación del ICMI y más tarde en 1912-1920 y 1928-1932 se desempeñó como Vice Presidente de esta Comisión. En los años 1911 a 1914 fue Presidente de la Asociación Italiana de Profesores de Matemáticas "Mathesis" y editor de Bollettino della Mathesis, el diario oficial de la asociación. Enriques obtuvo la membresía honoraria en el ICMI durante el décimo Congreso Internacional de Matemáticos en Oslo (1936) por su actividad especial en educación matemática. Fue también Presidente de la Asociación Italiana de Profesores de Matemática "Mathesis" de 1919 a 1932, editor del Bollettino della Mathesis entre 1919 y 1920 y más tarde del Periodico di Matematiche, importante diario que llegó a ser el órgano oficial de Mathesis en 1921. Ambos matemáticos publicaron artículos en estos periódicos dirigidos a maestros de matemática y participaron en la discusión sobre los programas de matemática del currículo educativo italiano. Visto así, ambos influyeron en la formación del punto de vista de Emma sobre la enseñanza de la matemática (léase referencia 24). Este entorno rico en matemática llevó al contacto con otros matemáticos italianos importantes de la época así como con investigadores matemáticos extranjeros visitantes.

Emma se graduó en matemáticas en la Universidad de Roma en 1936. Ganó la competencia por un puesto permanente en las escuelas públicas en 1938, pero debido a las leyes racistas de 1938 que prohibían a personas judías tener cargos en las escuelas públicas, comenzó su carrera como profesora de secundaria en 1945 en una escuela secundaria de Roma (la edad de los alumnos estaba entre los 11 y 14 años), donde permaneció hasta su retiro en 1979. Durante la Segunda Guerra Mundial enseñó en la escuela judía de Roma a los estudiantes judíos, que no eran aceptados en las escuelas públicas debido a las leyes racistas. Justo después de la Segunda Guerra Mundial, Emma con un profesor universitario y un joven colega organizaron una exitosa serie de conversatorios celebrados por matemáticos, físicos, filósofos y educadores. Muchos profesores asistieron a estas conversaciones. Esta iniciativa fue una buena señal para el renacimiento de la escuela italiana y la cultura después de la guerra.

Ya al principio de su carrera Emma estaba buscando una forma de enseñanza dirigida a la participación activa de los estudiantes. Como se explica en los artículos [12] y [13] encontró la respuesta a este deseo en el tratado de geometría *Élements de géometrie* por Alexis Claude Clairaut, publicado en París en 1741 y traducido al italiano en 1751.

El contenido del libro de Clairaut está muy cerca de texto de Euclides, pero difieren en la presentación, puesto que el tratado fue escrito con intención didáctica, proponiendo problemas a resolver y tratando de guiar a los estudiantes en el descubrimiento (léase referencia [11]). En el prefacio del libro, Clairaut se queja por el método usual de de enseñanza de la geometría, que se inicia de una manera abstracta con una larga lista de definiciones, axiomas y teoremas. A continuación se propone un método que se supone fue el que pudieron haber seguido por los primeros inventores de la geometría, sólo tratando de evitar cualquier paso en falso que tal vez hubieran tenido que dar. Los problemas tratados se refieren a la medición de tierras. Se ha cuestionado el valor pedagógico del libro (léase referencia [26]), pero el enfoque propuesto inspiró a Emma a renovar su forma de enseñar (léase referencia [12] y [13]).

En la interpretación que da Emma al proyecto de Clairaut, las ideas ganadoras son: intuición, problemas reales y la historia. El problema del equilibrio entre intuición y rigor había sido considerado ya por su padre Guido a principios del siglo XX. En una conferencia internacional organizada por la Comisión fundada en Roma él discutió cómo fue el tratamiento dado al rigor en los tratados más importantes para la escuela secundaria (leer referencia [14]). En la planificación de los nuevos programas de matemáticas para la escuela secundaria, Guido destacó el peligro de una demasiada rígida adhesión a la tradición euclidiana y apoyó el enlace de las matemáticas con la vida real y sus aplicaciones. De esta manera abogó por la introducción de nuevos temas como probabilidades en los programas de matemáticas (léase referencia [15]).

Algunas décadas después, en los inicios de los años 70, Emma logró que se incluyeran elementos de probabilidades en los nuevos programas italianos para la escuela secundaria. Las palabras "intuitivo/intuición" y "real/realidad" llegó a ser muy común en los títulos de sus libros y artículos. El libro Geometria intuitiva, per le scuole medie inferiori (Geometría intuitiva, para las escuelas secundarias inferiores), publicado por primera vez en 1948 tuvo varias ediciones hasta 1964 y fue traducido al español y al inglés. Esto hizo conocer a Emma a nivel internacional y por ello fue común que se le invitara a unirse a reuniones y grupos de trabajo (leer referencia [29]).

La nueva forma de Emma de enseñanza de la geometría se basa en el uso de materiales concretos, observando a los objetos, descubrir las propiedades geométricas y en la manipulación de figuras cambiantes. El rigor no es el punto de partida del aprendizaje, pero se alcanza un punto máximo a través de la participación activa de los estudiantes, el cual comienza a partir de lo concreto y llega a lo abstracto. Este camino fomenta la continuidad en el aprendizaje de los primeros grados hasta la universidad. El valor formativo de las matemáticas no es antitético al valor de las matemáticas como disciplina utilitaria. Toda la enseñanza debe tener una participación activa y emocional (leer referencia [22]).

La idea de patrones dinámicos en geometría y de la fuerza de visualización utilizada para descubrir y reforzar conceptos matemáticos importantes, marca la actividad de importantes pedagogos en la década de 1950. Con esta preocupación Rogers [30] analiza el trabajo de Caleb Gattegno (1911-1988), Zoltán Pál Dienes (1916-2014) y la Asociación Británica de Profesores de Matemáticas (ATM). Desde 1949 Emma estaba en contacto con los maestros de la École Decroly, donde Paul Libois (1906-1991) utilizaba materiales concretos. De Libois también tomó la idea de sus exitosas exposiciones matemáticas, que eran un medio eficaz para vincular las matemáticas con la realidad y para la visualización de conceptos. La preparación de exposiciones fue también un eficiente medio para crear una comunidad de práctica donde estuvieron involucrados jóvenes profesores y estudiantes que perseguían objetivos comunes (léase referencia [28]).

A través de su geometría intuitiva, Emma realizó las ideas de la buena enseñanza que su tío Enriques ilustró en un famoso artículo de 1921 titulado "Enseñanza dinámica" (Léase referencia [17]).

Enriques no sólo fue un matemático superior, sino también historiador y epistemólogo. Sobre estos aspectos él ofreció cursos universitarios y artículos en revistas. En muchas ocasiones Emma se refiere a la visión de Enriques sobre la importancia de la historia de matemática en la construcción del conocimiento y exige aplicar esta visión en la enseñanza. Para ella, la historia regresa a las ideas originales y restaura la intuición contra el formalismo que aparece en las teorías en desuso. Es de considerarse que la actitud de Emma sobre la historia de la matemática en el aula está cerca de la re-invención guiada propuesta por Hans Freudenthal [5]:

> *Instando a que las ideas se imparten genéticamente, no significa que ellas deben presentarse en el orden en el que se sucedieron, ni con todos los impases involucrados y todos los atajos que se tomaron. Lo que los ciegos inventan y descubren, el vidente después puede decir cómo deberían haber sido descubierto si hubiera habido maestros que conocían lo que sabemos ahora... No son las huellas históricas del inventor las que deberíamos seguir sino una mejorada y mejor guía del curso de la historia.*

Por muchas décadas del siglo XX se discutieron las cuestiones relativas a la educación matemática dentro de la comunidad de matemáticos profesionales (leer referencia [18]). En la década de 1950 algunos eventos prepararon el terreno para cambiar este patrón. Los principales cambios se sucedieron en la década de 1960 con la creación de un órgano de prensa específico dedicado a la enseñanza de las matemáticas (Estudios de la Educación Matemática, en 1968) y la creación de una conferencia específica sobre este tema (ICME - Congreso Internacional de Educación Matemática, en 1969). Por lo tanto la educación matemática adquirió el estatus de una disciplina académica con sus propios asientos. Esto promovió el que algunos profesores de secundaria fueran invitados a contribuir en eventos importantes. Este fue el caso de Emma a quien Gattegno le solicitó que se uniera al CIEAEM (Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'enseignement des Mathématiques - Comisión Internacional para el estudio y mejora de la enseñanza de las matemáticas). Ella aparece en la lista de los miembros fundadores de esta Comisión en la referencia [1] junto con el matemático y pedagogo Gattegno (Secretario), el psicólogo Jean Piaget (1896-1980), el lógico y filósofo Evert Willem Beth (1908-1964), el epistemólogo Ferdinand Gonseth (1890-1975), los matemáticos Gustave Choquet (Presidente), Jean Dieudonné, Hans Freudenthal y André Lichnerowicz y los profesores de secundaria Lucienne Félix (1901-1994) y Willy Servais (1913-1979). Emma fue Presidente de CIEAEM entre 1979 y 1981. Los dos libros producidos por la Comisión reflejan las dos corrientes de trabajo dentro de la Comisión. La primera, [9], trata algunos contenidos principalmente desde el punto de vista matemático. El segundo, [6], presenta algunos aspectos de la práctica escolar con un enfoque particular en el uso de materiales concretos y filmes sobre matemática, que es material cercano a los intereses de Emma. Ella, de hecho, contribuyó con un capítulo titulado "L'Object et l'Action dans l'enseignement de la geometría intuitiva" (El objeto y la acción en la enseñanza de la geometría intuitiva, págs. 41-59). Los materiales concretos se convirtieron en un vehículo para la intuición y el experimento en el aula (léanse referencias [25] y [33]) y prepararon el entorno de la escuela para recibir las innovaciones posteriores con tecnología matemática [31].

La década de 1950 son los años de importantes de movimientos para las reformas, como el movimiento Matemática Nueva conocida en los Estados Unidos y paralela a la Matemática Moderna en Europa (leer referencia [21]). Todas estas corrientes de reforma relacionada con la moderna, o nueva, matemática llevó a una reunión en 1959 en un seminario internacional celebrado en Royaumont, cerca de París (leer referencias [16], [23] y [32]). El seminario fue organizado por la OECE (Organización para la Cooperación Económica Europea) y presidido por Marshall Stone, para ese momento también Presidente del ICMI. Un papel importante jugaron los miembros de la CIEAEM, particularmente Dieudonné, quien pronunció una conferencia sobre la transición de la escuela secundaria a la Universidad. En la reunión participaron delegados de 18 países.

Emma fue uno de los dos representantes de Italia y tomó parte activa en la discusión acerca de las matemáticas modernas. Otra mujer, Lucienne Félix (1901-1994), fue invitada como conferencista.

Cuando Freudenthal logró alcanzar los dos objetivos de fundar un nuevo diario y tener una conferencia dedicada a la enseñanza de las matemáticas, Emma fue una participante activa en ambos eventos. Publicó artículos en el primer volumen de la revista Estudios de la Educación Matemática y en las sucesivas ediciones. Ella presentó una charla en el primer ICME en Lyon (1969) y en el tercer ICME en Karlsruhe (1976) presentó una exposición (que abarcó más de 100 carteles) preparada con los alumnos de la escuela media de alumnos sobre el tema "Matemáticas en la vida real", [4].

Después de la Segunda Guerra Mundial, se originó como una red estructurada de actividades de cooperación internacional dirigida a ayudar mutuamente a las personas. Desde el principio, la educación ha sido uno de los temas principales de acción de organismos políticos internacionales (léase referencia [20]). Emma contribuyó a este movimiento de cooperación internacional: invitada primero por el IREM francés (Institut de Recherche sur l'enseignement des Mathématiques) y luego por la UNESCO, Emma fue a Nígeria cuatro veces, de 1977 a 1982 a enseñar en clases que correspondían a los grados del 6 al 8, (alumnos con edades entre 11 y 14 años) (leer referencia [27]). Allí aplicó su método a los estudiantes locales. En el verano de 2006, en una conversación en su casa de Roma, Emma se refirió con emoción y entusiasmo a este evento en su vida y a los buenos resultados que había obtenido.

El rol internacional de Emma fue reconocido con su nombramiento como “miembro permanente” del Comité Ejecutivo del ICMI desde 1975 a 1978.

Emma fue una profesora muy especial por varias razones. Al lado de su extrema creatividad en el diseño de secuencias de enseñanza y su libertad en la interpretación de los programas con el fin de perseguir sus objetivos didácticos, es notable la manera en que ella era capaz de establecer contactos internacionales y emerger en el escenario internacional de educación matemática. Esto era difícil para un maestro de primaria o de secundaria e incluso más aún para una mujer. Como se discutió en [19], junto con algunas otras, ella puede ser considerada como una mujer pionera en el campo.

Las contribuciones de Emma en la enseñanza de las matemáticas no sólo estaba dirigida a los estudiantes, sino también a sus colegas, especialmente los jóvenes colegas. A ellos transmitió sus conocimientos y, lo más importante, su entusiasmo y motivación. Son conocidos maestros principiantes que asistieron a los conversatorios que implementó durante los talleres realizados en un pequeño pueblo de Italia (leer referencia [3]): estaban involucrados emocionalmente al hablar de esta experiencia profesional y, al mismo tiempo, aun habiendo asistido a muchos cursos de matemáticas en la Universidad, parecían haber descubierto nuevos aspectos de las matemáticas durante el taller. Fuera de Italia su legado está presente especialmente en países de habla hispana. Se puede consultar el sitio web, referencia [40], de la Sociedad Madrileña (S.M.P.M.).

Emma tuvo influencias culturales, por ejemplo, de su padre y de su tío Enriques para la educación matemática, de Jean-Ovide Decroly (1871-1932), de María Montessori (1870-1952) y de Jean Piaget para asuntos pedagógicos generales. Sin embargo, es bueno señalar que el carácter principal de Emma como profesora de secundaria, fue su capacidad para reflejar de manera constructiva su profesionalidad. Fue un modelo de lo que llamó Donald Alan Schön (1930-1997) "practicante reflexivo" [10], ya que ella vivió su experiencia con conciencia, integrada en su conocimiento para la enseñanza y estaba lista para usarlo al conformar sus creencias y toma de decisiones.

Referencias.-

Libros:

1. T Bernet and F Jaquet, *La CIEAEM au travers de ses 50 premières rencontres* (CIEAEM, Neuchâtel, 1998).
2. E Castelnuovo, *Geometria intuitiva, per le scuole medie inferiori* (R Carrabba, Lanciano-Roma, 1948).
3. E Castelnuovo, F Lorenzoni (ed.), *L'officina matematica: ragionare con i materiali* (La Meridiana, Molfetta, 2008).
4. E Castelnuovo and M Barra, *Matematica nella realtà* (Boringhieri, Torino, 1976).
5. H Freudenthal, *Mathematics as an educational task* (Reidel, Dordrecht, 1973).
6. C Gattegno, W Servais, E Castelnuovo, J L Nicolet, T J Fletcher, L Motard, L Campedelli, A Biguenet, J W Peskett and P Puig Adam, *Le matériel pour l'enseignement des mathématiques* (Delachaux & Niestlé, Neuchâtel, 1958).
7. OEEC, *New thinking in school mathematics* (OECE, Paris, 1961).
8. OEEC, *Mathématiques nouvelles* (OECE, Paris, 1961).
9. J Piaget, E W Beth, J Dieudonné, A Lichnerowicz, G Choquet and C Gattegno, *L'enseignement des mathématiques* (Delachaux et Niestlé, Neuchâtel, 1955)
10. D A Schön, *The reflective practitioner. How professionals think in action* (Basic Books, New York, 1983).

Artículos:

11. E Barbin, The reading of original texts: how and why to introduce a historical perspective, For the learning of mathematics 11 (2) (1991), 12-13.
12. E Castelnuovo, Un metodo attivo nell'insegnamento della geometria intuitiva, *Periodico di Matematiche* (4) **24** (1946), 129-140.
13. E Castelnuovo, The teaching of geometry in Italian high schools during the last two centuries: some aspects related to society, in *C Keitel, P Damerow, A Bishop and P Gerdes (eds.), Mathematics, education and society. Science and technology education, Document Series N.* **35** (UNESCO Paris, 1989), 51-52.
14. G Castelnuovo, La rigueur dans l'enseignement mathématique dans les écoles moyennes, *L'Enseignement Mathématique* **13** (1911), 461-468.
15. G Castelnuovo, La riforma dell'insegnamento matematico secondario nei riguardi dell'Italia, *Bollettino della 'Mathesis'* **11** (1919), 1-5.
16. D De Bock and G Vanpaemel, Modern mathematics at the 1959 OEEC Seminar at Royaumont, in *K Bjarnadóttir, F Furinghetti, J Prytz and G Schubring (eds.), 'Dig where you stand'* **3** (Department of Education, Uppsala University, Uppsala, to appear).
17. F Enriques, L'insegnamento dinamico, *Periodico di Matematiche* **4** (1) (1921), 6-16.
18. F Furinghetti, Mathematics education and ICMI in the proceedings of the International Congresses of Mathematicians, Revista Brasileira de História da Matemática Especial no 1 - Festschrift Ubiratan D'Ambrosio - (December) *Publicaç‹o Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática* (2007), 97-115.

19. F Furinghetti, The emergence of women on the international stage of mathematics education, *ZDM Mathematics Education* **40** (4) (2008), 529-543.

20. F Furinghetti, History of international cooperation in mathematics education, in *A Karp and G Schubring (eds.), Handbook on history of mathematics education* (Springer, New York - Heidelberg - Dordrecht - London, 2014), 543-564.

21. F Furinghetti, J M Matos and M Menghini, M.. From mathematics and education, to mathematics education, in *M A Clements, A Bishop, C Keitel, J Kilpatrick and F K S Leung (eds.), Third International Handbook of Mathematics Education* (Springer, New York - Heidelberg - Dordrecht - London, 2013), 273-302.

22. F Furinghetti and M Menghini, The role of concrete materials in Emma Castelnuovo's view of mathematics teaching, *Educational Studies in Mathematics* **87** (2014) 1-6.

23. F Furinghetti, M Menghini, F Arzarello and L Giacardi, ICMI Renaissance: the emergence of new issues in mathematics education, in *M Menghini, F Furinghetti, L Giacardi and F Arzarello (eds.), The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education* (Istituto della Enciclopedia Italiana, Rome, 2008), 131-147.

24. P Gario, Le radici del pensiero didattico di Emma Castelnuovo, *La Matematica nella Società e nella Cultura* **6** (2013), 7-33.

25. C Gattegno, The Cuisenaire material is not a structural apparatus, in *C Gattegno, For the teaching of mathematics* **3** (Educational Explorers, Reading, 1963), 103-106.

26. G Glaeser, Ë propos de la pédagogie de Clairaut. Vers une nouvelle orientation dans l'histoire de l'éducation, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **4** (1983), 332-344.

27. N Lanciano, Emma in Niger, *La Matematica nella Società e nella Cultura* **6** (2013), 105-108.

28. M Menghini, The commitment of Emma Castelnuovo to creating a new generation of mathematics teachers, in *K Bjarnadóttir, F Furinghetti, J Prytz and G Schubring (eds.), 'Dig where you stand'* **3** (Department of Education, Uppsala University, Uppsala, to appear).

29. M Menghini, M Barra, R Bolletta, L Cannizzaro, N Lanciano, M Pellerey and D Valenti, Emma Castelnuovo: la nascita di una scuola, *La Matematica nella Società e nella Cultura* **6** (2013), 45-80.

30. L Rogers, Epistemology, methodology, and the building of meaning in a new community of mathematics educators in England 1950-1980, in *K Bjarnadóttir, F Furinghetti, J Prytz and G Schubring (eds.), 'Dig where you stand'* **3** (Department of Education, Uppsala University, Uppsala, to appear).

31. K Ruthven, Mathematical technologies as a vehicle for intuition and experiment: A foundational theme of the International Commission on Mathematical Instruction, and a continuing preoccupation, *International Journal for the History of Mathematics Education* **3** (1) (2008), 91-102.

32. G Schubring, The road not taken - The failure of experimental pedagogy at the Royaumont Seminar 1959, *Journal für Mathematik-Didaktik* **35** (2014), 159-171.

33. W Servais, The Significance of Concrete Materials in the Teaching of Mathematics, in *ATM Mathematical Reflections* (Cambridge University Press, Cambridge, 1970), 203-208.

34. CIEAEM, History, *The International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Teaching*.
http://www.cieaem.org/?q=node/18

35. C Fontanari, Emma Castelnuovo, *Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Trento*.
http://www.science.unitn.it/~fontanar/EMMA/emma.htm

36. F Furinghetti and L Giacardi, The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008), *The history of ICMI*.
http://www.icmihistory.unito.it/

37. Emma Castelnuovo Award for Excellence in the Practice of Mathematics Education, *The International Commission on Mathematical Instruction*.
http://www.mathunion.org/icmi/activities/awards/emma-castelnuovo-award/

38. N Lanciano, Mathematics, imagination and reality. The legacy of Emma Castelnuovo, *Dipartimento di Matematica, Sapienza Università di Roma*.
https://www.researchitaly.it/en/understanding/project-and-success-stories/interviews-and-life-stories/mathematics-imagination-and-reality-the-legacy-of-emma-castelnuovo/

39. M Menghini, M Barra, L Cannizzaro, N Lanciano and D Valenti, Pubblicazioni di Emma Castelnuovo, *Dipartimento di Matematica, Sapienza Università di Roma*.
http://www1.mat.uniroma1.it/ricerca/gruppi/education/scanner%20emma/Pubblicazioni_Emma_Castelnuovo.htm

40. Sociedad Madrilena de Profesores de Matemáticas (S.M.P.M.).
http://www.smpm.es

EMMA CASTELNUOVO

Imágenes obtenidas de:

Versión en español por R. Ascanio H. del artículo en inglés de Fulvia Furinghetti sobre "Emma Castelnuovo", Universidad de Génova (Julio 2014).
Agradecimientos a Marta Menghini y Leo Rogers.
Fuente: MacTutor History of Mathematics [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Castelnuovo_Emma.html].