HOMOTECIA Tiraje: *100* ejemplares
CÁTEDRA DE CÁLCULO - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA - FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN - UNIVERSIDAD DE CARABOBO
PUBLICACIÓN PERIODICA Nº 11 - AÑO 5 e-mail: homotecia@hotmail.com Valencia, 1º de Noviembre de 2007

EDITORIAL

El día jueves 25 de octubre pasado, fueron las elecciones profesorales para escoger los miembros de los diferentes Consejos de Facultad, Consejos de Escuela y Consejo Universitario de nuestra Alma Máter.

La jornada se caracterizó por la pacífica y masiva participación de los electores, demostrando así la voluntad democrática del claustro.

En lo que respecta a la FACE, la elección estuvo muy reñida por la forma amplia en que los electores distribuyeron sus votos.

Con respecto a los que fueron electos en nuestra facultad, estamos convencidos que asumirán responsablemente su compromiso y actuarán en pro de la FACE.

No nos queda más que augurarles éxito en su gestión para que no defrauden a quienes, confiando en ellos, le dieron su apoyo.

REFLEXIONES

"El orgullo divide a los hombres, la humildad los une."

Sócrates

"La cultura es un adorno en la prosperidad y un refugio en la adversidad."

Diógenes Laercio

Prof. Julio Natera
Jefe del Departamento de Matemática y Física

Prof. Rafael Ascanio H.
Jefe de la Cátedra de Cálculo

Prof. Próspero González M.
Adjunto al Jefe de Cátedra

Coordinadores publicación de HOMOTECIA:

Prof. Rafael Ascanio H.
Prof. Próspero González M.

SOBRE LA BOTELLA DE KLEIN Y ALGUNOS DE SUS "AMIGOS"

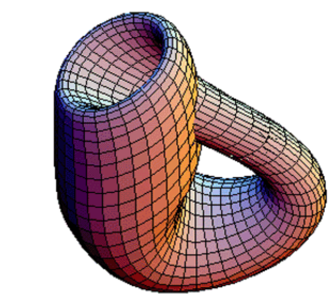
Por: **Dr. Sergio Macías**

Instituto de Matemáticas, UNAM. México
sergiom@mate.unam.mx
Tomado de: casanchi.com

FÉLIX KLEIN
(1849-1925)
Matemático Alemán

Una de las principales características de los científicos es la "curiosidad", la cual los lleva a hacerse preguntas y éstas a desarrollar técnicas para resolverlas, así como crear "nuevos" objetos de estudio a partir de los ya conocidos. En particular, los matemáticos investigan sus objetos con la "estructura matemática" de la cual disponen. Una de las ramas de las matemáticas es la topología. Para describirla, transcribimos lo que A. W. Tucker y H. S. Bailey dijeron en 1950 **[3]**:

"La topología es la rama de las matemáticas que trata de las propiedades de posición que son invariantes por cambios en tamaño o forma. Sus objetos están constituidos por superficies, redes y muchas otras figuras. Tal vez el modo más fácil de definir propiedades topológicas consiste en decir que son propiedades geométricas que permanecen inmutables a pesar de estiramientos o encorvamientos. La topología está llena de paradojas aparentes e imposibilidades aparentes y es, probablemente, más divertida que cualquier otra rama de las matemáticas".

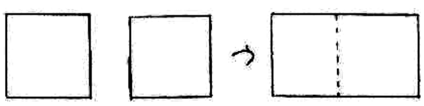


BOTELLA DE KLEIN

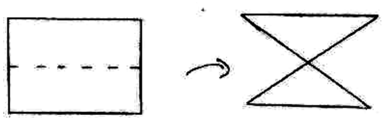
Pensaremos que los objetos geométricos que consideraremos en este trabajo están hechos de un hule muy maleable, lo cual nos permitirá estirarlos o encogerlos. A las partes más pequeñas e indivisibles de los objetos las llamaremos puntos.

Una de las técnicas usadas en topología es la de pegado, formalmente llamada identificación, la cual consiste en "pegar" puntos de uno o varios objetos utilizando reglas específicas.

Por ejemplo, supongamos que tenemos dos rectángulos y que los queremos pegar por uno de sus lados. Notemos que lo que resulta es un rectángulo "más grande", lo cual significa, desde el punto de vista topológico, que no se ha obtenido nada nuevo.



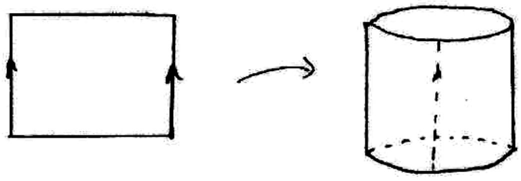
Ahora supongamos que tenemos un rectángulo y que deseamos identificar todos los puntos de un segmento de recta paralelo a sus lados y que cruza todo el rectángulo en uno solo. Notemos que, en este caso, lo que se obtiene es dos triángulos pegados por uno de sus vértices. Observemos que, en esta ocasión, sí se obtiene un objeto distinto al inicial, pues si quitamos el vértice común de los triángulos lo que nos queda tiene "dos piezas", mientras que si quitamos cualquier punto del rectángulo siempre obtendremos algo de "una sola pieza".



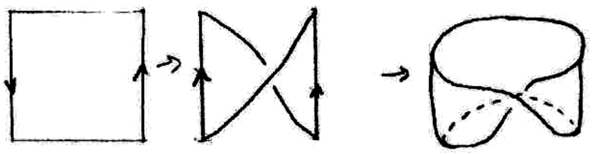
(Continúa en la siguiente página)

(Viene de la página anterior)

Su pongamos nuevamente que tenemos un rectángulo, esta vez de "altura" uno, y que queremos pegar el lado izquierdo con el lado derecho. Notemos que hay dos maneras de hacerlo. Una de ellas es identificar los puntos del lado izquierdo con los puntos del lado derecho que están a la misma "altura", obteniendo un cilindro.



La otra manera es girar el lado izquierdo 180 grados y luego pegar los puntos del lado izquierdo con los del lado derecho.



El objeto que resulta de este proceso se llama banda de Möbius (Descubierta en 1885 por el matemático alemán A. F. Möbius). Esta banda resulta ser un objeto que tiene solamente una cara. Por más vueltas que le demos a la superficie siempre encontraremos una única cara continua y un solo borde (nótese que el cilindro tiene dos caras y dos bordes). Tiene, además, la siguiente propiedad curiosa: si cortamos la banda a lo largo de una línea trazada sobre ella, por su mitad, y "paralela" a su borde, lo que resulta es un objeto de ¡una sola pieza! Invitamos al lector a que haga dicho experimento y se convenza de lo que se afirma. Esta propiedad ha sido expresada en un pequeño poema:

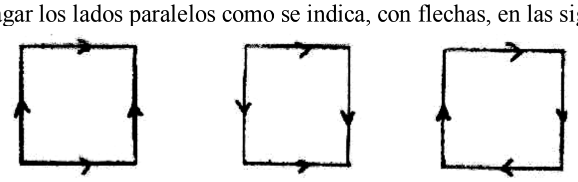
A mathematician confided
The Möbius band is one–sided,
And you'll get quite a laugh
If you cut one in half.
For it stays in one piece when divided.

(Un matemático susurró
Que la banda de Möbius tiene una sola cara,
Y que tú reirás mucho
Si la cortas por la mitad.
Pues se queda de una pieza al dividirla)

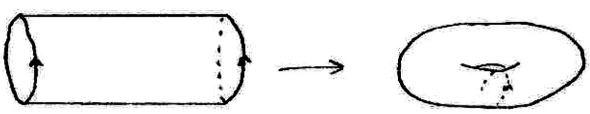
Ahora supongamos que queremos pegar los cuatro lados de nuestro rectángulo. Tenemos, esencialmente, cuatro maneras distintas de hacerlo. La primera sería identificar los cuatro lados en un solo punto obteniendo, como resultado, una esfera.

Las otras tres maneras consisten en pagar los lados paralelos como se indica, con flechas, en las siguientes figuras:

Las otras tres maneras consisten en pagar los lados paralelos como se indica, con flechas, en las siguientes figuras:



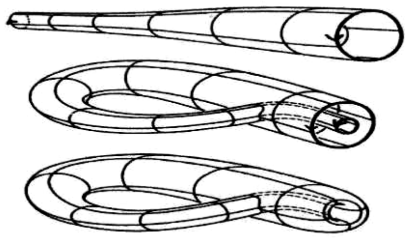
Consideremos primero la figura de la izquierda. Al pegar los lados horizontales obtenemos un cilindro. Luego tenemos que pegar las dos circunferencias en la forma que indican las flechas. Al hacer esto, resulta que hemos construido una "cámara de llanta". A este objeto se le conoce con el nombre de *toro*.



(Continúa en la siguiente página)

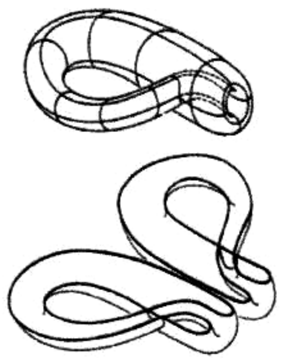
(Viene de la página anterior)

Ahora pensemos en la figura de en medio. El objeto que se obtiene se conoce como la botella de Klein (inventada en 1882 por el matemático alemán F. Klein). El primer paso de la construcción es igual que en el caso anterior. Se identifican los lados horizontales para crear un cilindro. Notemos que, ahora, hay un pequeño problema, pues las circunferencias que necesitamos pegar tienen sus flechas en sentidos opuestos. Esto nos impide hacer un pegado "directo" como en el caso del toro. Una forma de "solucionar" este problema y tener una representación en el espacio tridimensional es hacer un pequeño agujero en el cilindro, cerca de una de las circunferencias, y por allí meter el otro extremo del cilindro. De esta manera, la orientación de las flechas sí coincide y podemos pegar ambas circunferencias.



Aquí hemos hecho trampa, ya que cortamos un pedazo de nuestro espacio. Realmente, la botella de Klein "no vive" en el espacio tridimensional que nos rodea, pero "sí vive" en el espacio equivalente de cuatro dimensiones (esto es, en tal espacio podemos hacer el pegado de las circunferencias sin necesidad de cortar ningún pedazo de la botella).

Un hecho curioso es que la botella de Klein se puede obtener pegando dos bandas de Möbius por sus bordes. Para convencerse de esto, basta hacer un corte transversal a la botella.



Este hecho ha sido expresado en un pequeño poema:

A mathematician named Klein
Thought the Möbius band was devine
Said he, "If you glue
The edges of two,
You'll get a weird bottle like mine".

(Un matemático llamado Klein
Pensó que la banda de Möbius era divina
Dijo él: "Si tu pegas
Los bordes de dos,
Obtendrías una extraña botella como la mía.)

La descripción del pegado de la figura de la derecha es más complicada. Lo que resulta es lo que se conoce como el plano proyectivo.

Tanto la banda de Möbius como la botella de Klein y el plano proyectivo son ejemplos de "superficies no orientables", la primera con borde y las otras dos sin él. El lector interesado en saber un poco más sobre superficies puede consultar **[1]** y **[2]**.

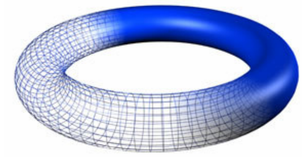
Bibliografía

[1] A. Illanes, *La Caprichosa Forma de Globión*, La Ciencia para Todos, 168, SEP–CONACyT–FCE, 1999.

[2] E. Micha, *Introducción a la Topología, Clasificación de Superficies*, 3er. Coloquio del Departamento de Matemáticas del Centro de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, la Trinidad, Tlaxcala, Agosto de 1983.

[3] A. W. Tucker y H. S. Bailey, Jr., *Topología, en Matemáticas en el Mundo Moderno*, Selecciones de Scientific American Editorial Blume, Madrid y Barcelona, 1974, págs. 151–158.

CINTA O BANDA DE MÖBIUS



TORO

TRABAJANDO EN CÁLCULO

Por: Prof. Rafael Ascanio H. – Prof. Próspero González M.
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA - FACE – UC

CÁLCULO INTEGRAL: INTEGRAL INDEFINIDA.
TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN.
INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

Más ejercicios resueltos sobre integración por sustituciones trigonométricas.-

1.- Obtener $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-4}}$.

Solución:

Resolviendo la integral.

Forma:	Cambio:
$\sqrt{x^2-4} \equiv \sqrt{x^2-a^2}$	$x = a \cdot SecZ \Rightarrow x = 2SecZ$
$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$	$\Rightarrow dx = 2TgZ \cdot SecZ \cdot dZ$

Sustituyendo:

$$I = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-4}} = \int \frac{4Sec^2Z \cdot 2SecZ \cdot TgZ \cdot dZ}{\sqrt{(2SecZ)^2-4}} = \int \frac{4Sec^2Z \cdot 2SecZ \cdot TgZ \cdot dZ}{\sqrt{4Sec^2Z-4}} = \int \frac{4Sec^2Z \cdot 2SecZ \cdot TgZ \cdot dZ}{2\cdot\sqrt{Sec^2Z-1}}$$
$$= \int \frac{4Sec^2Z \cdot 2SecZ \cdot TgZ \cdot dZ}{2TgZ} = 4\underbrace{\int Sec^3Z \cdot dZ}_{(I_1)} = 4I_1 = (*)$$

Integrando por partes a I_1.

Sustitución:

$u = SecZ \quad \Rightarrow \quad du = TgZ \cdot SecZ \cdot dZ$

$dv = Sec^2ZdZ \quad \Rightarrow \quad \int dv = \int Sec^2ZdZ \quad \Rightarrow \quad v = TgZ + C$

Luego:

$$I_1 = \int Sec^2Z \cdot SecZ \cdot dZ = u \cdot v - \int v \cdot du + C = SecZ \cdot TgZ - \int TgZ \cdot TgZ \cdot SecZ\ dZ + C =$$
$$= SecZ \cdot TgZ - \int Tg^2Z \cdot SecZ\ dZ + C = SecZ \cdot TgZ - \int (Sec^2Z - 1) \cdot SecZ\ dZ + C =$$
$$= SecZ \cdot TgZ - \int Sec^3Z\ dZ + \int SecZ\ dZ + C = SecZ \cdot TgZ - \underbrace{\int Sec^3Z\ dZ}_{(I_1)} + Ln|SecZ + TgZ| + C =$$
$$= SecZ \cdot TgZ - I_1 + Ln|SecZ + TgZ| + C.$$

Es decir: $I_1 = SecZ \cdot TgZ - I_1 + Ln|SecZ + TgZ| + C_1$ (Resulta una Integral *cíclica)*

Despejando a I_1:

$$I_1 = SecZ \cdot TgZ - I_1 + Ln|SecZ + TgZ| + C_1$$
$$2I_1 = SecZ \cdot TgZ + Ln|SecZ + TgZ| + C_1 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \int Sec^3Z\ dz = \frac{1}{2} SecZ \cdot TgZ + \frac{1}{2} Ln|SecZ + Tgz| + C_1$$

(Continúa en la siguiente página)

Como en (*), $I = 4I_1$, entonces:

$$I = 4I_1 = 4\cdot\left(\frac{1}{2}SecZ\cdot TgZ + \frac{1}{2}Ln\left|SecZ + TgZ\right|\right) + C =$$
$$= 2SecZ\cdot TgZ + 2Ln\left|SecZ + TgZ\right| + C = (**)$$

Devolviendo el cambio para obtener el valor de $SecZ$ y TgZ:

$SecZ = ? = \dfrac{p}{n}$

$TgZ = ? = \dfrac{m}{n}$

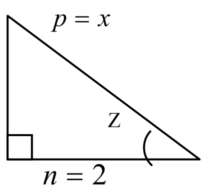
Como $x = 2SecZ \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{SecZ = \dfrac{x}{2}}$

pero $SecZ = \dfrac{p}{n}$

Luego:

$m = ? = \sqrt{x^2 - 4}$



Por Teorema de Pitágoras:

$x^2 = m^2 + 2^2$
$x^2 = m^2 + 4$
$m^2 = x^2 - 4$
$m^2 = \sqrt{x^2 - 4}$

Así se tiene que: $TgZ = \dfrac{m}{n} \Rightarrow \boxed{TgZ = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{2}}$

Por lo que en (**):

$$I = 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{\sqrt{x^2-4}}{2} + 2Ln\left|\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right| + C = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4} + 2Ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4} + 2Ln\left|x + \sqrt{x^2-4}\right| - 2Ln2 + C = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4} + 2Ln\left|x + \sqrt{x^2-4}\right| + C$$

2.- Obtenga $\displaystyle\int\frac{dz}{z(z^2-16)^2}$.

Solución:

Nota: Como la variable presentada en la integral es z, se evitará confusiones utilizando para denotar al ángulo a θ. Además, buscando aplicar la técnica de Sustitución Trigonométrica, se hace necesario rescribir la integral de la siguiente manera:

$$I = \int\frac{dz}{z(z^2-16)^2} = \int\frac{dz}{z\left(\sqrt{z^2-16}\right)^4}$$

Forma:

$\sqrt{z^2-16} \equiv \sqrt{z^2-a^2}$

$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$

Cambio:

$z = a\cdot Sec\theta \Rightarrow z = 4Sec\theta$

$\Rightarrow dz = 4Sec\theta\cdot Tg\theta\, d\theta$

(Continúa en la siguiente página)

(Viene de la página anterior)

Sustituyendo en *I*:

$$I=\int\frac{dz}{z(z^2-16)^2}=\int\frac{dz}{z\left(\sqrt{z^2-16}\right)^4}=\int\frac{4Sec\,\theta\,Tg\,\theta\;d\theta}{4Sec\,\theta\cdot\left(\sqrt{(4Sec\,\theta)^2-16}\right)^4}=\int\frac{4Sec\,\theta\,Tg\,\theta\;d\theta}{4Sec\,\theta\cdot\left(\sqrt{16Sec^2\theta-16}\right)^4}=$$

$$=\int\frac{4Sec\,\theta\,Tg\,\theta\;d\theta}{4Sec\,\theta\cdot\left(4\cdot\sqrt{Sec^2\theta-1}\right)^4}=\int\frac{4Sec\,\theta\,Tg\,\theta\;d\theta}{4Sec\,\theta\,(4\cdot Tg\,\theta)^4}=\int\frac{Tg\,\theta\;d\theta}{256\cdot Tg^4\theta}=\tfrac{1}{256}\int\frac{d\theta}{Tg^3\theta}=$$

$$=\tfrac{1}{256}\int Cotg^3\theta\;d\theta=\tfrac{1}{256}\int Cotg\,\theta\cdot Cotg^2\theta\;d\theta=\tfrac{1}{256}\int Cotg\,\theta\,(Cosec^2\theta-1)\;d\theta=$$

$$=\tfrac{1}{256}\left(\int Cotg\,\theta\cdot Cosec^2\theta\;d\theta-\int Cotg\,\theta\;d\theta\right)=\tfrac{1}{256}\int Cotg\,\theta\cdot Cosec^2\theta\;d\theta-\tfrac{1}{256}\int Cotg\,\theta\;d\theta=$$

$$=\tfrac{1}{512}Cotg^2\theta-\tfrac{1}{256}Ln\left|Sen\,\theta\right|+C=(*)$$

Devolviendo el cambio para obtener el valor de $Cotg\theta \quad y \quad Sen\theta$:

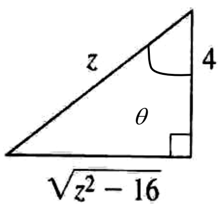
$Sen\,\theta=?=\dfrac{m}{p}$

$Cotg\,\theta=?=\dfrac{n}{m}$

Como $\quad z=4Sec\,\theta\Rightarrow \boxed{Sec\,\theta=\dfrac{z}{4}}$

pero $\quad Sec\,\theta=\dfrac{p}{n}$

Luego:



Por Teorema de Pitágoras:

$$z^2=m^2+4^2$$
$$z^2=m^2+16$$
$$m^2=z^2-16$$
$$m^2=\sqrt{z^2-16}$$

Entonces se tiene que:

$$Cotg\theta=\frac{n}{m}=\frac{4}{\sqrt{z^2-16}}\quad\Rightarrow\quad\boxed{Cotg\theta=\frac{4}{\sqrt{z^2-16}}}$$

$$Sen\theta=\frac{m}{p}=\frac{\sqrt{z^2-16}}{z}\quad\Rightarrow\quad\boxed{Sen\theta=\frac{\sqrt{z^2-16}}{z}}$$

Volviendo a (*):

$$(*)=I=\tfrac{1}{512}Cotg^2\theta-\tfrac{1}{256}Ln\left|Sen\theta\right|+C=\tfrac{1}{512}\cdot\left(\frac{4}{\sqrt{z^2-16}}\right)^2-\tfrac{1}{256}Ln\left|\frac{\sqrt{z^2-16}}{z}\right|+C=$$

$$=\tfrac{1}{512}\cdot\frac{16}{z^2-16}-\tfrac{1}{256}Ln\left|\frac{\sqrt{z^2-16}}{z}\right|+C=\frac{1}{32\cdot(z^2-16)}-\tfrac{1}{256}Ln\left|\frac{\sqrt{z^2-16}}{z}\right|+C$$

En la próxima entrega de HOMOTECIA, presentaremos más ejercicios resueltos sobre esta técnica.

RAH-PGM

AMENIDADES

Doble Visión

En pequeño, los rostros de una pareja de ancianos. Al ampliar, la escena de dos amigos.

Enviado por: Br. Álvaro Carmeza – Mención Matemática – FACE - UC

Sudoku!!!

El juego numérico que activa la inteligencia

Recuerda: la regla para hacerlo es rellenar cada fila, cada columna y cada caja de 3x3 con los números del 1 al 9 sin repetirlos.

La respuesta del anterior:

6	1	7	5	3	9	8	4	2
5	3	2	8	4	7	1	6	9
4	8	9	1	6	2	3	7	5
7	2	8	6	9	3	5	1	4
9	5	4	2	1	8	6	3	7
3	6	1	4	7	5	2	9	8
8	9	6	3	2	4	7	5	1
1	7	5	9	8	6	4	2	3
2	4	3	7	5	1	9	8	6

Y ahora……

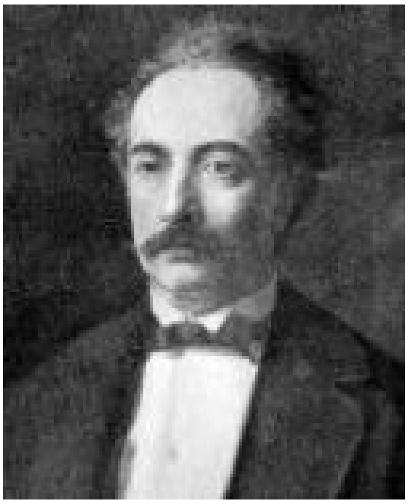
¡¡¡Nuevo Reto!!!

	1				6		9	
5			1			6		
	9					1	2	5
3				2	8		1	
				1				
	5		6	3				7
8	2	6					3	
		5			4			1
	4		3				6	

Tomado de: **Mephan, M.** (Comp.) (2005). *Sudoku. El nuevo juego numérico que activa la inteligencia*. Caracas-Venezuela: Editorial Random House Mondadori.

¡Éxito y hasta el próximo encuentro!

GALERÍA



EUGENIO BELTRAMI
(16 DE NOVIEMBRE DE 1835-18 DE FEBRERO DE 1900)

Eugenio Beltrami nació el 16 de noviembre de 1835 en Cremona, Lombardía, Italia.

Su padre llamado también Eugenio Beltrami, fue un artista, y descendía de una familia crecida en esa tradición. Beltrami, hijo, heredó su talento y sería la música la que se volvería importante en su vida, junto a las matemáticas que aprendería después.

De 1835 a 1856, estudió en la Universidad de Pavía instruido por Brioschi. A pesar de su deseo de continuar con sus estudios, en 1856, debido a problemas económicos dejó la universidad y consiguió un trabajo de secretario de un ingeniero de vía férrea; su trabajo lo llevaría a Verona y después a Milán. En 1861 se había establecido en el Reino de Italia, por lo que un año más tarde siguió sus estudios de matemáticas en Milán, donde también publicó su primer trabajo. Ese mismo año, fue asignado profesor de álgebra y geometría analítica en la Universidad de Bolonia.

En 1864, le fue asignado el puesto de presidencia de la parte de geodesia en la Universidad de Pisa, estuvo en este puesto por dos años. En 1866, regresó a Bolonia y trabajó como profesor de mecánica racional. En 1873, formó parte de la nueva Universidad de Roma, en mecánica racional. Tres años después, regresó a Pavía a asumir el puesto en física. En 1891, en Roma, se mantuvo enseñando sus últimos años. En 1898, se convirtió en Presidente de la Academia de Lincei y un año después, fue senador del Reino de Italia. Sus trabajos fueron fuertemente influenciados por Cremona, Lobachevsky, Gauss y Riemman.

Murió el 18 de febrero de 1900 en Roma, Italia.

JACQUES-CHARLES-FRANÇOIS STURM
(1803-1855)

Jacques-Charles-François Sturm, matemático francés de origen alemán, conocido por su trabajo sobre ecuaciones diferenciales, geometría proyectiva, óptica y mecánica. Nació en Ginebra (Suiza), y terminó sus estudios en la universidad de esta ciudad antes de cumplir los 14 años. Después estudió en la Academia de Ginebra y con sólo 24 años recibió el gran premio de matemáticas por su trabajo sobre la compresión de los líquidos. Pasó la mayor parte de su vida en París.

En 1826 realizó las primeras mediciones exactas de la velocidad del sonido en el agua. A los 26 años escribió *Mémoire sur la résolution des équations númeriques* (*Memoria sobre la resolución de las ecuaciones numéricas*). En 1836 fue elegido miembro de la Academia de Ciencias de Francia y desde 1840 fue profesor de la Escuela Politécnica y de la Facultad de Ciencias. Sus últimos trabajos, *Cours d´analyse de l´École polytechnique* (*Curso de análisis de la Escuela Politécnica*, 1857) y *Cours de méchanique de l´École Polytechnique* (*Curso de mecánica de la Escuela Politécnica*, 1861), fueron publicados después de su muerte.

"Jacques-Charles-François Sturm." *Microsoft® Encarta®* 2006 [DVD]. Microsoft Corporation, 2005.