HOMOTECIA Tiraje: *100* ejemplares
CÁTEDRA DE CÁLCULO - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA - FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN - UNIVERSIDAD DE CARABOBO
PUBLICACIÓN PERIODICA Nº 1 - AÑO 5 e-mail: homotecia@hotmail.com Valencia, 8 de Enero de 2007
CÁTEDRA DE CÁLCULO

EDITORIAL

Nuevo año, nuevo tiempo. Para HOMOTECIA comienza el recorrido de su quinto año. Esperamos que en estos próximos doce meses nuestro rendimiento sea mayor y mejor en comparación con lo que hemos hecho en los años precedentes.

Para quienes estamos comprometidos en mantener su publicación, consideramos que, particularmente, este periodo es clave para todas las propuestas académicas que se hagan en el Departamento de Matemática y Física en cuanto a las menciones que en el mismo se administran.

Es necesaria una inmediata revisión de lo que estamos haciendo. Hay que evaluar qué hemos hecho bien, qué se ha hecho mal, dónde corregir, qué se debe sustituir, qué cambiar.

El propósito es trabajar persistentemente en la mejora de la formación tanto académica como en lo personal de quienes egresan de las menciones de Matemática y Física, lo que debe reflejarse en la cultura que practiquen.

Mantener las cosas como están, es una inercia peligrosa que perjudica tanto a la institución como al producto final de nuestro esfuerzo, lo que se refleja en el material humano que egresa de nuestras aulas cuando éste se incorpora al medio laboral educativo.

El lema debe ser MEJORAR SIEMPRE.

REFLEXIONES

"Cuando veáis a un hombre sabio, pensad en igualar sus virtudes. Cuando veáis un hombre desprovisto de virtud, examinaos vosotros mismos".

Confucio

"Pensar es el trabajo más difícil que existe. Quizá sea ésta la razón por la que haya tan pocas personas que lo practiquen."

Henry Ford

Prof. Julio Natera
Jefe del Departamento de Matemática y Física

Prof. Rafael Ascanio H.
Jefe de la Cátedra de Cálculo

Prof. Próspero González M.
Adjunto al Jefe de Cátedra

Coordinadores publicación de HOMOTECIA:

Prof. Rafael Ascanio H.
Prof. Próspero González M.

Colaboradores de HOMOTECIA

Br. Adabel Disilvestre
Br. Luís Velásquez
Br. Luís Orozco
Br. Luís Medina

CONJETURAS EN MATEMÁTICA (II)

En Matemática, una *conjetura* es una afirmación que se supone cierta, pero que no ha sido probada ni refutada hasta la fecha; y que cuando se comprueba, entonces se le considera un *teorema*. Es bueno hacer notar que en este proceso de comprobación, aunque se suceden continuos intentos fallidos, éstos han permitido la obtención de nuevos e innovadores conocimientos matemáticos.

Nos comprometimos en publicar las más conocidas y en continuación de ello, hoy publicamos la *Conjetura de Catalan*.

La Conjetura de Catalan.-

La Conjetura de Catalan es una conjetura de la teoría de números propuesta por el matemático belga Eugène Charles Catalan (1814-1894).

Para entender esta conjetura, nótese que $2^3 = 8$ y $3^2 = 9$ son dos números que son potencias consecutivas de números naturales. La conjetura de Catalan dice que éste es el único caso de dos potencias consecutivas.

Eugène Charles Catalan (1814-1894)

Es decir, que la conjetura de Catalan afirma que la única solución en el conjunto de los números naturales de $x^a - y^b = 1$ para $x, a, y, b > 1$ es $x = 3, a = 2, y = 2, b = 3$.

En particular, nótese que no tiene importancia que los mismos números 2 y 3 estén repetidos en la ecuación $3^2 - 2^3 = 1$. Un caso donde los números no estuvieran repetidos seguiría siendo un contraejemplo válido.

El matemático rumano Preda Mihailescu afirmó haber demostrado la conjetura de Catalan (con lo que se convertiría en teorema) en abril de 2002. En febrero de 2004, se seguía comprobando la demostración.

FUENTE: Wikipedia® de Wikimedia Foundation, Inc. Octubre 9 2006.

**Las ideas y opiniones de los autores de los artículos que publicamos en HOMOTECIA son responsabilidad de los mismos.
Si algún lector tiene objeciones sobre éstas, agradecemos nos haga llegar por escrito sus comentarios.**

Índice Cronológico de la Matemática (Parte XXXI)

LA CRONOLOGÍA ENTRE 1950 DC Y 1960 DC

1950: *Carnap* publica *Logical Foundations of Probability* (Fundamentos Lógicos de la probabilidad).

1950: *Hamming* publica un paper fundamental sobre códigos de errores-detectados y errores-corregidos.

1950: *Hodge* propone la "conjetura de Hodge" en variedades algebraicas descriptivas.

1951: *Serre* utiliza secuencias espectrales en el estudio de las relaciones entre los grupos nomológicos de fibra, espacio total y espacio de la base en una fibración. Esto le permite descubrir conexiones fundamentales entre los grupos homológicos la homología y los grupos homotópicos de un espacio y probar resultados importantes en el grupo homotópico de las esferas.

1952: *Hörmander* inicia un trabajo sobre la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales. Diez años después recibirá una Medalla Fields por este trabajo.

1954: *Serre* es premiado con la Medalla Fields por su trabajo sobre las sucesiones espectrales y su trabajo sobre el desarrollo de la teoría de variable compleja en términos de haces.

1954: *Kolmogorov* publica su segundo paper sobre la teoría de sistemas dinámicos. Esto marca el inicio de la Teoría KAM, la cual posteriormente fue llamada de Kolmogorov, Arnold y Moser.

1955: *Cartan* y *Eilenberg* desarrollan el álgebra homológica que permite relacionar poderosos métodos algebraicos y métodos topológicos.

1955: *Novikov* demuestra la irresolución de los problemas de enunciados por grupos.

1955: *Taniyama* propone su conjetura sobre curvas elípticas que jugarán un papel importante en la prueba del Último Teorema de Fermat.

1956: *Milnor* publica *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere* (Sobre la multiplicidad homeomórfica de la 7-esfera) que abre el nuevo campo de topología diferencial.

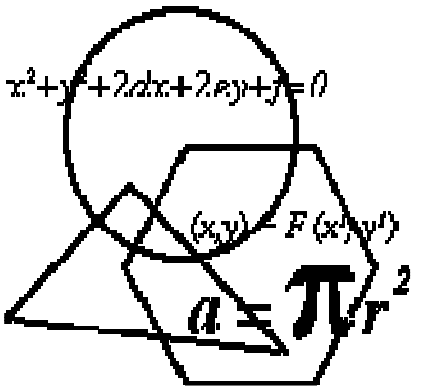
1957: *Kolmogorov* resuelve uno de los Treinta Problemas de Hilbert sobre funciones continuas de tres variables que no pueden ser representadas por funciones continuas de dos variables.

1958: *Thom* es premiado con la Medalla Fields por su trabajo sobre topología, en particular sobre las clases características, teoría de cobordismo y el Teorema de Transversalidad de Thom.

1959: *Boone* demuestra que muchos problemas de decisión sobre grupos no tienen solución.

1959: *Marshall Hall* publica su famoso texto *Theory of Groups* (Teoría de Grupos).

1960: *M Suzuki* descubre nuevas familias infinitas de grupos simples finitos.



TRABAJANDO EN CÁLCULO

Por: Prof. Rafael Ascanio H. – Prof. Próspero González M.
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA - FACE – UC

CÁLCULO INTEGRAL: INTEGRAL INDEFINIDA

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración por Partes.-

Esta técnica se aplica a una gran variedad de funciones siendo particularmente útil cuando el integrando está formado por funciones algebraicas; o para integrar funciones trascendentes cuyas derivadas son algebraicas, tales como:

$$\int xLnxdx\,,\quad \int x^2e^x dx,\quad \int arcSenxdx\,,\quad \int arcTgxdx\,,\ \text{etc.}$$

La integración por partes tiene su origen en la Regla de la Derivada del Producto de Funciones. Basado en ésto, se puede proceder de la siguiente manera.

Deducción de la Regla o Fórmula:

Sean *u* y *v* funciones determinadas en la misma variable, por ejemplo *x*, y ambas con derivadas continuas. Entonces se considera que:

$$\frac{d(u\cdot v)}{dx}=\frac{du}{dx}\cdot v+u\cdot\frac{dv}{dx}$$

Despejando a $u\cdot\dfrac{dv}{dx}$:

$$u\cdot\frac{dv}{dx}=\frac{d(u\cdot v)}{dx}-\frac{du}{dx}\cdot v$$

Luego, integrando a ambos lados de la igualdad:

$$\int u\cdot\frac{dv}{dx}=\int\frac{d(u\cdot v)}{dx}-\int\frac{du}{dx}\cdot v\qquad\Rightarrow\qquad\int u\cdot\frac{dv}{dx}=u\cdot v-\int v\cdot\frac{du}{dx}$$

Al utilizar diferenciales, la expresión queda así:

$$\boxed{\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du}$$

Recomendaciones para la utilización de la integración por partes.-

1. El integrando de la integral original se debe descomponer en dos factores: *"u"* y *"dv"*.
2. En el caso que la variable sea x, el diferencial de *x* (*dx*) debe formar parte del diferencial de *v* (*dv*).
3. El *"dv"* debe ser integración inmediata.

(Continúa en la página siguiente)

(Viene de la página anterior)

Casos que se presentan en la integración por partes.-

1º) El integrando contiene como factor a funciones de la forma: *Lnx, LnQ(x), arcSenx, arcCosx, arcTgx,* etc. Si como *"u"* se elige una de estas funciones, la expresión *"v·du"* de la nueva integral debe ser más sencilla y de fácil integración por los métodos conocidos.

2º) El integrando contiene como factor a funciones de la forma: $P(x)\cdot e^{ax}, P(x)\cdot Sen(ax), \quad P(x)\cdot Cos(ax),$ etc. Si se elige como *"u"* al polinomio *P(x)*, la nueva integral es de menor grado que la integral original y se aplicará la integración por partes un número de veces igual al grado de *P(x)*. Para este tipo de integrales se estudiará como segunda opción, otra forma de resolverlas sin aplicar reiteradamente la integración por partes. A este otro procedimiento se le denomina ***Método Alternativo*** del cual se tratará en una próxima entrega.

3º) La función integrando tiene alguna de las siguientes formas: $e^{ax}\cdot Senx, \quad e^{ax}\cdot Cosx, \quad Ln(Senx), \quad Ln(Cosx),$ etc. En el proceso de la aplicación de la integración por partes, surge como "nueva integral", la integral original multiplicada por una constante y que mediante procesos de transposición y despeje de términos, es posible obtener el valor de la integral original. Este tipo de integrales se llaman ***cíclicas***.

Regla mnemotécnica.-

La regla a la que se hace referencia a continuación, ha surgido de la práctica constante con la "integración por partes".

Al aplicar la integración por partes, el integrando original se divide en dos factores y se debe elegir cuál es *"u"* y cuál *"dv"*. Pero estos factores son funciones y estas pueden ser: Inversas Trigonométricas, Logarítmicas, Algebraicas, Trigonométricas y Exponenciales.

Si tomamos cada una de las iniciales de los tipos de funciones y formamos una palabra, esta es: **ILATE**. ¿Cuál es el objetivo que se persigue al hacerlo?

Veamos los siguientes ejemplos:

a) $\int x\cdot Ln\,x\,dx$: El integrando está formado por x que al ser un polinomio se considera una función Algebraica, y por Lnx que evidentemente es una función Logarítmica. Como en la palabra ILATE la inicial de las logarítmicas está primero que la de las algebraicas, entonces se hace $u = Lnx$ y $dv = xdx$.

b) $\int arcSenx\,dx$: En este caso, la integral se puede escribir así: $\int (1\cdot arcSen\,x)dx$ donde 1 es función Algebraica y $arcSenx$ es función Inversa Trigonométrica. Entonces, $u = arcSenx$ y $dv = 1\cdot dx = dx$.

c) $\int e^x Senxdx$: Los factores son e^x que es una función Exponencial y $Senx$ que es una función Trigonométrica. Luego, $u = Senx$ y $dv = e^x dx$.

Aunque esta regla no se menciona en los ejemplos que a continuación se resuelven, resulta muy práctico su uso porque se corresponde con los casos citados que se presentan en la integración por partes.

Ejemplos.-

1) Evaluar $\int arcSenxdx.$**.**

Solución:

El integrando de la integral dada está conformado por una función trigonométrica inversa, correspondiendo con el primer caso de los que se citaron como de los que se pueden presentar en la integración por partes.

(Continúa en la página siguiente)

(Viene de la página anterior)

Luego, el cambio para *I* es:

$$u = arcSenx \Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$dv = dx \begin{cases} \int dv = \int dx \\ v = x + C \end{cases}$$

Así, resolviendo la integral:

$$I = \int arcSenxdx = u \cdot v - \int v \cdot du = arcSenx \cdot x - \int x \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + C = x\, arcSen\, x - \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot xdx + C = (*)$$

(I_1)

Cambio de variable para I_1: $a = 1 - x^2 \Rightarrow da = -2xdx \quad \Rightarrow \quad -\frac{da}{2} = xdx$

Volviendo a (*):

$$(*) = x\, arcSenx - \int a^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{da}{2}\right) + C = x\, arcSen\, x + \frac{1}{2}\int a^{-\frac{1}{2}}\, da + C = x\, arcSenx + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= x\, arcSenx + \sqrt{u} + C = x\, arcSenx + \sqrt{1-x^2} + C$$

2) Determinar $\int x^2 Senxdx$.

Solución:

El integrando de la integral dada está conformado por el producto de un polinomio de grado 2 y una función trigonométrica, correspondiendo con el segundo caso de los que se citaron como de los que se pueden presentar en la integración por partes. Esto indica que se aplicará dos veces la integración por partes.

Luego, primera sustitución (para I):

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$$

$$dv = Senxdx \begin{cases} \int dv = \int Sen\, x\, dx \\ v = -Cos\, x + C \end{cases}$$

Así, al resolver la integral, tenemos:

$$I = \int x^2 Senxdx = u \cdot v - \int v \cdot du = x^2 \cdot (-Cosx) - \int (-Cosx) \cdot (2xdx) + C = -x^2 \cdot Cosx + 2\int x \cdot Cosxdx + C = (*)$$

(I_1)

Al aparecer I_1, debemos realizar la segunda sustitución:

$u = x \Rightarrow du = dx$

$$dv = Cosxdx \begin{cases} \int dv = \int Cos\, xdx \\ v = Sen\, xdx \end{cases}$$

Volviendo a (*):

$$(*) = -x^2 \cdot Cosx + 2\left(x \cdot Senx - \int Senxdx\right) + C = -x^2.Cosx + 2x \cdot Senx - 2\int Senxdx + C =$$

$$= -x^2 \cdot Cosx + 2x \cdot Senx + 2Cosx + C$$

(Continúa en la página siguiente)

(Viene de la página anterior)

3) Hallar $\int e^x Senxdx$.

Solución:

El integrando de la integral dada está conformado por el producto de una función exponencial y una función trigonométrica, correspondiendo con el tercer caso de los que se citaron como de los que se pueden presentar en la integración por partes. Esto indica que la integral dada se corresponde con una integral *cíclica*.

Cambio para I:

$$u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$$

$$dv = Senxdx \begin{cases} \int dv = \int Sen\,x\,dx \\ v = -Cosx + C \end{cases}$$

Luego, al resolver la integral:

$$I = \int e^x Senxdx = u \cdot v - \int vdu = -e^x \cdot Cosx = -\int (-Cosx) \cdot e^x dx + C = -e^x \cdot Cosx + \int e^x Cosxdx + C = (*)$$

$$(I_1)$$

Al aparecer I_1, se obtiene una nueva integral del tercer caso; entonces se aplica otra vez la integración por partes.

$$u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$$

$$dv = Cosxdx \begin{cases} \int dv = \int Cos\,x\,dx \\ v = Sen\,x + C \end{cases}$$

Volviendo a (*):

$$(*) = -e^x \cdot Cosx + e^x \cdot Senx - \int e^x Senxdx + C = -e^x \cdot Cosx + e^x \cdot Senx - I + C$$

$$\Rightarrow \quad I = -e^x \cdot Cosx + e^x \cdot Senx - I + C$$

Luego, despejando a *I*:

$$I = -e^x Cosx + e^x Senx - I + C$$
$$I + I = e^x (-Cosx + Senx) + C$$
$$2I = e^x (Senx - Cosx) + C$$
$$I = \tfrac{1}{2} e^x (Senx - Cosx) + C$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = \int e^x Senxdx = \tfrac{1}{2} e^x (Senx - Cosx) + C}$$

En las próximas publicaciones de HOMOTECIA seguiremos tratando la integración por partes; esta técnica resulta bastante interesante puesto que permite resolver una gran variedad de ejercicios.

De igual manera, en el manual de nuestra autoría, **CÁLCULO II. Ejercicios**, se presentan un significativo número de ejercicios resueltos y propuestos sobre la técnica de Integración por Partes, que pueden servir al lector interesado para profundizar mejor sobre la misma. El manual está a disposición de todos en la sección de Publicaciones de la Facultad de Ciencias de la Educación - UC.

CONCEPCIÓN FÍSICA CONTEMPORÁNEA DEL UNIVERSO (Parte I de III)

ALBERTO CHAMORRO BELMONT, desde el País Vasco (Universidad del País Vasco) - 2 de enero de 2001

1. INTRODUCCIÓN.

Las bases de la cosmología generalmente aceptada en la comunidad científica actual son: 1) Las observaciones astrofísicas; 2) El principio cosmológico; 3) La relatividad general; y 4) La teoría de las partículas elementales y campos cuánticos. La primera de ellas es experimental, como siempre es el caso con cualquier ciencia de la naturaleza, las otras tres son teóricas. Hace más de tres siglos, Pascal expresaba su asombro ante el universo insondable con las palabras: *"Cuando miro en la noche a los cielos siento pavor y temblor"*. Cuando, con los medios actuales, el astrónomo escruta los cielos descubre una variedad de curiosos objetos: planetas, estrellas, púlsares, galaxias, cuásares, cúmulos, supercúmulos. Dada las magnitudes en juego, la emoción que estas percepciones despiertan en muchos de los observadores modernos no debería estar lejos de la profundidad de los sentimientos que invadían al gran pensador francés.

La descripción del Universo, tal y como hoy lo observamos, es el objeto de la Cosmografía. La sección que sigue versará brevemente sobre ella.

2. COSMOGRAFÍA:

El sol es la estrella más cercana a nosotros (unos $15 \cdot 10^7$ km) y no es sino una estrella de tamaño mediano de las 10^{11} estrellas que pertenecen a nuestra galaxia, la Vía Láctea. Una esfera que contuviese justamente a la Tierra en su centro y a la Luna orbitando en su superficie tendría el tamaño típico de una estrella pequeña. El número 10^{11} es del orden del número de cabezas de alfiler que llenarían una habitación de 5 m x 5 m x 5 m. La distancia media entre estrellas en una galaxia es de unos 10 años-luz. Una galaxia típica tiene dimensiones lineales del orden de $3 \cdot 10^4$ años luz. A la escala que asemeja una estrella a una cabeza de alfiler, la distribución de estrellas en una galaxia se correspondería con cabezas de alfiler esparcidas a distancias de unos 50 km entre cada dos de ellas más cercanas. A esta misma escala, nuestro sistema solar, con todos sus planetas, cabría en una esfera de unos 10 m de diámetro. Con los modernos sistemas de observación podemos ver unas 10^{11} galaxias, y la distancia mínima entre galaxias es de $3 \cdot 10^6$ años luz. Monedas de 25 pts esparcidas de metro en metro representarían, a escala, el tamaño y distancias típicas de las galaxias en el universo visible. En este modelo, las galaxias observadas más lejanas de la nuestra serían monedas a unos 2,5 km y los cuásares (núcleos galácticos muy activos) más distantes corresponderían a monedas situadas a más de 10 km. Los cúmulos son agrupaciones de galaxias ligadas por sus respectivas atracciones gravitatorias. Un cúmulo puede tener desde sólo dos galaxias hasta unas diez mil de ellas. Los cúmulos ricos en galaxias tienden a su vez a agruparse en grupos de ellas llamados supercúmulos. Las dimensiones de estos son del orden de 50 Mpc. Los supercúmulos mayores podrían contener hasta 10^5 galaxias. Nuestra propia galaxia pertenece al llamado supercúmulo local, que incluye lógicamente el cúmulo al que pertenece ella misma, llamado el grupo local de galaxias. El supercúmulo local tiene forma de una especie de tortilla elipsoidal de unos 15 Mpc de eje mayor y 1 Mpc de espesor. Nuestra galaxia se encuentra cercana al borde de este sistema metagaláctico.

Entre los supercúmulos se encuentran enormes regiones prácticamente vacías de galaxias llamados "vacíos". Estos vacíos pueden alcanzar dimensiones de 100-200 Mpc. En los últimos decenios se ha llegado a la convicción de que la materia luminosa del Universo parece distribuirse al modo de las celdas de un panal de miel, donde las galaxias están situadas en las paredes y los huecos de las celdas corresponden a los "vacíos". Hay alrededor de un millón de estas celdas en el inmenso panal que constituye el universo visible. Parece que esta estructura es repetitiva, con notable uniformidad, de tal modo que cuando se consideran diferentes regiones de dimensiones de unos 500 Mpc la densidad media de galaxias resulta ser prácticamente constante, así como las características físicas globales de estos enormes espacios vacíos y ello independientemente de la dirección del espacio en que observemos el Universo. Es este hecho el que fundamenta el mencionado *principio cosmológico*, según el cual el Universo, a gran escala, es homogéneo e isotrópico.

3. EL MODELO STÁNDARD DEL UNIVERSO:

El modelo de universo al que la Cosmología asentada en las bases citadas en la sección 1 ha conducido, se conoce con el nombre de modelo estándar o del *big bang* caliente, por razones que luego veremos.

El éxito que ha tenido el modelo estándar se justifica por los hechos que explica teóricamente. Los principales son:

a. La ley de expansión del universo, descubierta por Hubble en 1929, según la cual las galaxias o cúmulos se alejan entre sí a velocidades dadas por la relación $v = H_0 \cdot d$, donde d es la distancia entre galaxias y H_0 la constante de proporcionalidad, llamada constante de Hubble, tiene un valor entre 60 y 75 km $s^{-1}Mpc^{-1}$.

b. La radiación de fondo de microondas (RFM) de 2,73 K de temperatura, predicha por Alpher, Bethe y Gamow, descubierta por Arno Penzias y Robert Wilson en 1965. El espectro de esta radiación es el que corresponde a un cuerpo negro, y se supone que se produjo en la fase de recombinación del hidrógeno, cuando la temperatura de la materia en el Universo era de unos 3000 K, y la materia, que entonces tenía una densidad muy superior a la actual, se hizo "transparente" para la radiación. La gran isotropía de esta radiación es quizás el más fuerte apoyo al principio cosmológico. Sin embargo, en 1992, el radiómetro diferencial de microondas del satélite COBE de la NASA ha detectado un pequeña anisotropía en la radiación de fondo, que ya había sido prevista por Sachs y Wolfe en 1967, y que se interpreta como la huella que las fluctuaciones de densidad, que fueron el germen de la estructura del Universo en galaxias, cúmulos y supercúmulos, dejaron en la RFM en la época en que ésta se independizó de la materia.

c. La observada abundancia de los núcleos ligeros ^4He, ^2H, ^3He y ^7Li en el Universo. Según el modelo estándar hubo una época, la de la nucleosíntesis, en la que el Universo era como un reactor nuclear de fusión sintentizando núcleos ligeros a partir de protones y neutrones. Cálculos astrofísicos detallados, basados en medidas actuales, dan unos resultados para las cantidades relativas con que fueron producidos en la nucleosíntesis primordial estos mismos elementos que concuerdan muy satisfactoriamente con los que cabría esperar a partir de la teoría del big bang. La cuestión es particularmente importante para el ^4He dada su alta concentración cósmica actual y primordial -alrededor del 24 % en masa para la última- y además porque la abundancia cosmológica del ^4He está relacionada a través de la nucleosínsteis con el número de neutrinos diferentes, Nn, que existen en la naturaleza. Esta relación cosmológica predice que Nn £ 3, lo que limita las familias neutrínicas a las conocidas n_e, n m, n t. Esencialmente el mismo resultado para Nn ha sido obtenido de experimentos realizados en 1990 con aceleradores de partículas.

(Continúa en la siguiente página)

(Viene de la página anterior)

Existe un valor crítico r_0 para la posible densidad de masa actual en el Universo, del orden de 10^{-29} g/cm^3, de gran significación. La presente densidad de masa del Universo, r , no ha podido ser determinada aún con exactitud debido a que lógicamente sólo vemos la materia luminosa, pero existen razones que apuntan a que el Universo contiene materia oscura de la que muy probablemente aún no hemos detectado la mayor parte. Estudios de las órbitas de estrellas periféricas en galaxias prueban que la masa total de éstas es bastante mayor que la que cabría esperar de la suma de sus estrellas y posibles sistemas planetarios. Consideraciones dinámicas similares sugieren que la masa de los cúmulos de galaxias es mayor que la suma de las galaxias que los componen. Parte de esta masa ha sido detectada como un gas muy caliente que emite rayos X. Teniendo en cuenta la masa de éste y la materia luminosa se obtiene una densidad media del orden de 10^{-30} g/cm^3. Pero puede haber mucha más materia oscura aún no detectada debido a polvo y estrellas intergalácticas, estrellas ya apagadas, rocas, agujeros negros, como parece que podrían existir en los núcleos de muchas galaxias, neutrinos masivos, si fuera el caso que estos fermiones tienen una pequeña masa, e incluso otras partículas más exóticas, como monopolos magnéticos, fotinos, gravitinos, bosones de Higgs y axiones, cuya existencia es predicha por las modernas teorías de partículas elementales. Si resulta que $r > r_0$ el modelo estándar nos dice que la geometría del Universo sería elíptica: la suma de los ángulos de un triángulo excedería el valor euclidiano de 180º y la expansión del Universo se detendrá alguna vez y comenzará la reconcentración. Topológicamente, el Universo sería cerrado, con una curvatura espacial positiva, análogamente a lo que ocurre bidimensionalmente con una superficie esférica, que es finita pero no tiene límites. Si fuese $r = r_0$ la geometría del espacio tridimensional sería euclídea. La expansión sería cada vez más lenta acercándose indefinidamente a cero sin detenerse nunca. Viviríamos en un Universo abierto, de curvatura espacial nula, al igual que ocurre en un plano. Si tuviéramos $r < r_0$ la geometría sería hiperbólica: la suma de los ángulos de un triángulo sería menor que 180º. La expansión se ralentizaría acercándose a un valor constante, sin jamás detenerse. El espacio también sería topológicamente abierto, pero curvo, con curvatura negativa. Quizás en los próximos años, los datos que se obtengan desde las estaciones de observación espacial actualmente en órbita alrededor de la Tierra y otras que se lancen, nos permitan decidir cuál de las geometrías y modos de evolución que hemos mencionado son los que corresponden a nuestro Universo. De hecho, mencionaremos más adelante, en la sección 7, cómo un descubrimiento realizado en 1998 podría, sin embargo, modificar drásticamente estas perspectivas.

Las diversas variantes del modelo estándar tienen en común su consideración del actual estado del Universo como resultado de una evolución desde anteriores estados más densos y calientes cuanto más remotos en el tiempo. Extrapolando acríticamente hacia el pasado los correspondientes modelos matemáticos se llega a un estado inicial en que la densidad y temperatura eran infinitas y, por así decirlo, toda la materia y energía estaba concentrada en un solo punto que entonces era todo el Universo. A esta situación se le llama singularidad inicial y es lo que se conoce también con el anglicismo de "big bang", por la imagen que transmite de que el Universo se produjo en una tremenda explosión inicial. Esto habría ocurrido hace unos 10^{10} años. Al llegar aquí, con objeto de salvaguardar al lector de algunos prejuicios que impregnan la cultura popular sobre este tema, convienen algunas palabras de cautela.

En primer lugar, en el momento presente ninguno de los modelos cosmológicos de que disponemos pueden válidamente ser extrapolados hasta el mismo *big bang*. En algún momento antes de alcanzar la singularidad inicial que ellos predicen, las condiciones físicas de densidad y energía de las partículas que constituyen el plasma cósmico son tan extremas que no es posible ignorar los efectos cuánticos debidos al campo gravitacional. Se puede hablar de esta época como la *era de Planck* y se ubica entre el "supuesto" big bang y unos 10^{-43} segundos después, cuando la temperatura era de unos 10^{32} K. Se piensa que entonces las cuatro fuerzas fundamentales que se conocen: la débil (responsable de la desintegración beta de los neutrones) la fuerte (que mantiene unidos a los protones en los núcleos atómicos) la electromagnética y la gravitatoria, estaban unificadas en una misma fuerza universal. Nuestro presente conocimiento científico no incluye, sin embargo, una teoría adecuada de esta fuerza universal, ni siquiera una teoría satisfactoria y acabada de una gravitación cuántica. Por tanto, nada fundado se puede decir hoy día sobre lo que ocurrió durante la era de Planck y en consecuencia tampoco si dicha era tuvo un comienzo, es decir, si realmente hubo un big bang. La teoría del big bang es una denominación para una importantísima teoría científica del Universo que, por lo que al big bang se refiere, significa sólo lo que decimos más arriba.

Pero veremos ahora que, aún dentro de la relatividad general, la cuestión de la inevitabilidad del big bang puede dudarse. Las soluciones de las ecuaciones de Einstein que describen la estructura geométrica del espacio-tiempo de un universo espacialmente homogéneo e isotrópico fueron obtenidas por primera vez en 1922 por Alexander Alexandrovitch Friedmann, físico matemático de San Petersburgo. Por ello, los modelos de universo basados en estas soluciones, tal como es el caso del modelo estándar, reciben el nombre de modelos de Friedmann. Los modelos de Friedmann del Universo implican que éste tuvo un comienzo, y no fueron aceptados sin resistencia desde el principio. El mismo Einstein los rechazó, pues creía que el Universo tenía que ser estacionario, no sujeto a la expansión. Einstein modificó su actitud un año después. Pero hubo otros que sospechaban que en las concepciones friedmannianas había una sumisión al misticismo religioso del que la Ciencia parecía haberse librado finalmente. El que Le maître, un sacerdote y más tarde presidente de la Academia Pontificia del Vaticano, propusiera también en 1927, independientemente de Friedmann, modelos evolutivos homogéneos e isotrópicos para el Universo y que éstos fueran citados en encíclicas del papa Pío XII, pudo haber contribuido a las suspicacias de muchos científicos. Fue tras las observaciones de la recesión de las galaxias y de la RFM cuando la teoría basada en los trabajos de Friedmann y sus desarrollos posteriores se convirtió en la preferida de los cosmólogos. Posteriormente, los ingleses (1967 y 1970) Hawking y Penrose probaron que las singularidades en el espacio-tiempo no son exclusivas de los modelos altamente simétricos, como lo son los de Friedmann, sino genéricas para todas las soluciones de las ecuaciones de Einstein que verifiquen una serie de condiciones consideradas como bastante razonables. Entonces la idea de la inevitabilidad de la singularidad inicial, impregnó también a la generalidad de la comunidad científica. Sin embargo, aparte de lo que se ha dicho anteriormente sobre los límites de la validez de la relatividad general, hemos de mencionar aquí que alguna de las hipótesis de los teoremas de Hawking y Penrose pudiera ser violada por ciertas soluciones cosmológicas que, por otra parte, fueran físicamente aceptables. Con esto podrían darse modelos cosmológicos sin big bang incluso en el contexto de la relatividad general clásica. En efecto, uno de estos modelos, que, por otras razones, no es apto para describir el Universo real, fue descubierto por el español Senovilla en 1990. Queda pues abierta la cuestión de si no será posible un día obtener, incluso dentro de la relatividad general, una descripción aceptable del cosmos sin big bang.

(Continúa en el próximo número)

Alberto Chamorro Belmont es Catedrático de Física Teórica y Director del Departamento de Física Teórica e Historia de la Ciencia de la Universidad del País Vasco.
Fuente: Reflexiones de casanchi.com - Sitio de Divulgación de Matemática, Física, Astronomía, en el contexto de la red telemática.

EL PENSAMIENTO COMPLEJO EN MATEMÁTICA (Parte V)

Por: ***Rafael Ascanio H.***
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA - FACE – UC

"Todo tiene que ser o no ser, sea en el presente, sea en el futuro" (A o no A)
ARISTÓTELES

"No he explicado que el mundo sea externo o no lo sea. No he explicado que el mundo sea finito o que sea infinito" (A y no A).
BUDA

"En la medida en que las leyes de las matemáticas se refieran a la realidad, no son ciertas. Y en la medida que son ciertas, no se refieren a la realidad".
ALBERT EINSTEIN

"Un día supe que la ciencia no es verdad".
BART KOSKO

Albert Einstein escribió: "En la medida en que las leyes de las matemáticas se refieran a la realidad, no son ciertas. Y en la medida que son ciertas, no se refieren a la realidad".

Esta opinión asombró a muchos, sobre todo a los positivistas lógicos protegidos hasta ese momento bajo el manto eterno de la ciencia de lo exacto, de lo blanco y del negro, del uno (1) y del cero (0): la matemática.

Pero la opinión de Einstein hizo descubrir que el mundo de las matemáticas no calza con el mundo que describe. Utilizando la opinión de Bart Kosko, ésto hizo evidente la existencia de *dos realidades*. Una, la de la matemática, que es artificial, y la otra, *la real*. Una es nítida (la de la matemática) y la otra está enredada como los hilos de una pelota de estopa. Es el choque entre la ciencia de las verdades blancas y negras; y la de un mundo en que las verdades se producen en una degradación de grises.

Es el choque entre el pensar de Aristóteles, de la contradicción del "es o no es"; y el de Buda, mucho más antiguo, que acepta "es y no es".

Dentro de la complejidad, esta línea filosófica, la de Buda, conduce al "pensamiento borroso", donde se analizan situaciones como ésta: "Si tengo un montón de granos de maíz y le quito un grano, ¿sigue siendo un montón de grano de maíz? ¿Y si le quito cien granos? ¿Cuántos granos debo quitarle para que deje de ser un montón de granos de maíz?

La lógica aristotélica no tendría una respuesta rápida a estos planteamientos. Su ley del Tercero Excluido solo acepta el es o no es. La mejor respuesta que pudo dar el positivismo lógico (aristotélico) fue la Ley de Probabilidades (el azar): ¿Cuándo es posible se de el uno y cuándo el otro?

La forma de pensar borrosa asume que todo es cuestión de grado (degradación en gris de la verdad). Se acepta que en una verdad puede existir el es y el no es, no necesariamente en las mismas proporciones pero existen.

Usted se puede plantear que, por ejemplo, alumnos aplazados es cero (0) y alumnos aprobados es uno (1). Visto así, solo hay dos situaciones. Pero si le preguntan: ¿cuál es la calidad de aprobado?, ya no le basta la condición discreta del 1 y del 0. Creará entonces, una escala continua del 0 hasta el uno, de blanco a negro o de negro a blanco pasando por grises.

Esta concepción borrosa del mundo, indudablemente que afectó al mundo de las matemáticas, lo que se tradujo en lo que se llama "Lógica Difusa". El aceptar matemáticamente que una manzana es manzana hasta que me la como toda, que un enfermo está vivo hasta que deje de tener signos vitales, produjo transformaciones en la física, la biología, la química, la sociología, la psicología, entre otras; y grandes avances en la medicina, en la ingeniería; por eso la tecnología nos asombró con logros significativos tales como los celulares, cámaras de videos, lavadoras digitales, hornos microondas y cientos de dispositivos inteligentes que gradualmente, día a día, forman parte de nuestros útiles-usuales, surgiendo de sistemas borrosos reales y de paquetes de programación identificados con el "mundo gris".

El positivismo lógico seguirá vivo porque lo nítido también entra en lo que entendemos como verdad; pero lo borroso le permitirá intentar la verdad en donde sus métodos fracasen.

R. A. H.

AMENIDADES

"La raza humana tiene un arma verdaderamente eficaz: la risa." - **Mark Twain**

¿Qué se lee aquí…?

¡LEELO! SI CONSIGUES LEER LAS PRIMERAS PALABRAS, TU CEREBRO DESCIFRARÁ LAS OTRAS.

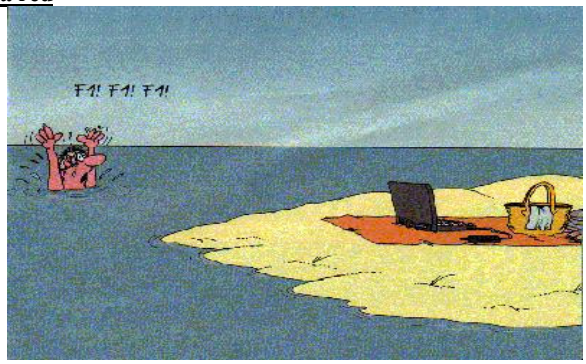
C13R70 D14 D3 V3R4NO 357484 3N L4 PL4Y4 0853RV4NDO D05 CH1C45 8R1NC4NDO 3N 14 4R3N4, 35745 7R484J484N MUCHO CON57RUY3NDO UN C4571LLO D3 4R3N4 CON 70RR35; P454D1Z0S OCUL705 Y PU3N735. CU4NDO 357484N 4C484NDO, VINO UN4 OL4 D357RUY3NDO 70DO, R3DUC13NDO 3L C4571LLO 4 UN MON70N D3 4R3N4 Y 35PUM4. P3N53 9U3 D35PU35 DE 74N70 3SFU3RZO L45 CH1C45 COM3NZ4R14N 4 L10R4R, P3RO 3N V3Z D3 350, CORR13RON POR L4 P14Y4 R13NDO Y JU64NDO Y COM3NZ4RON 4 CON57RU1R 07RO C4571LLO. COMPR3ND1 9U3 3570 3R4 UN4 6R4N L3CC10N 9U3 H4814 4PR3ND1DO; 64574M05 MUCHO 713MPO D3 NU357R4 V1D4 CON57RUY3NDO 4L6UN4 C054 P3RO CU4NDO M45 74RD3 UN4 OL4 L1364 4 D357RU1R 70DO, 5010 P3RM4N3C3 L4 4M1574D, 3L 4MOR Y 3L C4R1ÑO, Y L45 M4N05 D3 49U3LL05 9U3 50N C4P4C35 D3 H4C3RN05 50NRR31R.

541UDO5 Y 83505

R1CH4R C4M4CHO
F311X 4R7URO GON24132 NOGU3R4

Enviado por:
Richar Camacho – Doctorado en Educación – FACE – UC.

Humor en la red



Sudoku!!!

El juego numérico que activa la inteligencia

Recuerda: la regla para hacerlo es rellenar cada fila, cada columna y cada caja de 3x3 con los números del 1 al 9 sin repetirlos.

La respuesta del anterior:

9	4	8	3	1	2	5	6	7
7	6	5	4	8	9	1	3	2
3	1	2	6	5	7	9	4	8
1	9	4	2	7	8	6	5	3
5	2	6	1	4	3	8	7	9
8	3	7	5	9	6	2	1	4
4	8	3	9	6	1	7	2	5
6	5	9	7	2	4	3	8	1
2	7	1	8	3	5	4	9	6

Y ahora……
¡¡¡Nuevo Reto!!!

1								9
	6		5	8	1		2	
		2				8		
		8	1		6	5		
	2						7	
		7	9		2	1		
		6				4		
	7		8	2	5		9	
8								3

Tomado de: **Mephan, M.** (Comp.) (2005). *Sudoku. El nuevo juego numérico que activa la inteligencia.* Caracas-Venezuela: Editorial Random House Mondadori.

¡Éxito y hasta el próximo encuentro!

GALERÍA

EUGÈNE CHARLES CATALAN
(1814-1894)

Catalan nació en Brujas, Bélgica, hijo único de un joyero francés de nombre Joseph Catalan, en 1814. En 1825, viajó a París y aprendió matemática en la École Polytechnique, donde conoció a Joseph Liouville (1833). En 1834 fue expulsado de la universidad y pasó a Châlons-sur-Marne, donde recibió un puesto tras su graduación. En 1838 volvió a la École Polytechnique y, con la ayuda de Liouville, obtuvo su graduado en matemáticas en 1841. Fue entonces al Charlemagne College a enseñar geometría descriptiva. Sin embargo era políticamente activo y extremadamente izquierdista, lo que le llevó a participar en la revolución de 1848, tuvo una carrera animada y además se sentó en la Cámara de los Diputados francesa.

La Universidad de Lieja le concedió la cátedra de análisis en 1865. En 1879, aún en Bélgica, se convirtió en editor de un periódico donde publicó como nota al pié la teoría de Paul-Jean Busschop tras rechazarla en 1873 (haciéndole saber a Busschop que era demasiado empírica). En 1883 trabajó para la Academia Belga de las Ciencias en el campo de la teoría de números. Murió en Lieja, Bélgica.

Trabajos

Trabajó en fracciones continuas, geometría descriptiva, teoría de números y combinatoria. Dio su nombre a una superficie única (superficie periódica mínima en el espacio $\mathbb{R}^3$) que descubrió en 1855. Anteriormente había enunciado la famosa *conjetura de Catalan,* que fue publicada en 1844 y el matemático rumano Preda Mihăilescu anunció haberla probado en 2002 pero en 2004 todavía se seguía intentando comprobar esta demostración. Introdujo los *números de Catalan* para resolver un problema combinatorio.

Sobre los Sólidos de Catalan

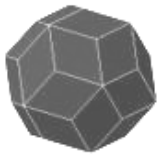
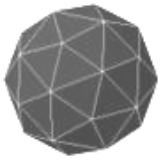
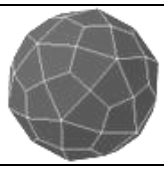
Los sólidos de Catalan son una familia de poliedros que se generan con el dual de los sólidos de Arquímedes, y fueron nombrados así por el mismo Eugène Charles Catalan.

Todos son poliedros convexos de caras uniformes aunque no son de vértices uniformes, esto ocurre ya que los Sólidos de Arquímedes que los generan son de vértices uniformes y no de caras uniformes; las caras que forman un sólido de Catalán no son polígonos regulares, pero sus ángulos diédricos son iguales en todo el poliedro. Además dos de ellos son poliedros de aristas uniformes: el dodecaedro rómbico y el triacontaedro rómbico y dos de ellos tienen figura isomórfica: el icositetraedro pentagonal y el hexecontaedro pentagonal.

Los sólidos de Catalan son trece en total, así como los sólidos de Arquímedes:

1. Triaquistetraedro o tetraedro triakis
2. Dodecaedro rómbico
3. Triaquisoctaedro u octaedro triakis
4. Tetraquishexaedro o hexaedro tetrakis
5. Icositetraedro deltoidal
6. Hexaquisoctaedro, disdiaquisdodecaedro, octaedro hexakis o dodecaedro disdiakis
7. Triacontaedro rómbico
8. Triaquisicosaedro o icosaedro triakis
9. Pentaquisdodecaedro o dodecaedro pentakis
10. Hexecontaedro deltoidal
11. Hexaquisicosaedro, disdiaquistriacontaedro, icosaedro hexakis o triacontaedro disdiakis
12. Icositetraedro pentagonal
13. Hexecontaedro pentagonal

Sólidos de Catalan

Nombre: Triaquistetraedro **Dual: Tetraedro truncado** **Cara: Triángulos Isósceles** **12 caras** **18 aristas** **8 vértices**		**Nombre: Triacontaedro rómbico** **Dual: Icosidodecaedro** **Cara:Rombos** **30 caras** **60 aristas** **32 vértices**	
Nombre: Dodecaedro rómbico **Dual: Cuboctaedro** **Cara: Rombos** **12 caras** **24 aristas** **14 vértices**		**Nombre: Triaquisicosaedro** **Dual: Dodecaedro truncado** **Cara: Triángulos Isósceles** **60 caras** **90 aristas** **32 vértices**	
Nombre: Triaquisoctaedro **Dual: Cubo truncado** **Cara: Triángulos Isósceles** **24 caras** **36 aristas** **14 vértices**		**Nombre: Pentaquisdodecaedro** **Dual: Icosaedro truncado** **Cara: Triángulos isósceles** **60 caras** **90 aristas** **32 vértices**	
Nombre: Tetraquishexaedro **Dual: Octaedro truncado** **Cara: Triángulos Isósceles** **24 caras** **36 aristas** **14 vértices**		**Nombre: Hexecontaedro deltoidal** **Dual: Rombicosidodecaedro** **Cara: Deltoides** **60 caras** **120 aristas** **62 vértices**	
Nombre: Icositetraedro deltoidal **Dual: Rombicuboctaedro** **Cara: Deltoides** **24 caras** **48 aristas** **26 vértices**		**Nombre: Hexaquisicosaedro** **Dual: Icosidodecaedro truncado** **Cara: Triángulos Escalenos** **120 caras** **180 aristas** **62 vértices**	
Nombre: Hexaquisoctaedro **Dual: Cuboctaedro truncado** **Cara: Triángulos escalenos** **48 caras** **72 aristas** **26 vértices**		**Nombre: Icositetraedro pentagonal** **Dual:Cubo romo** **Cara: Pentágonos Irregulares** **24 caras** **60 aristas** **38 vértices**	
		Nombre: Hexecontaedro pentagonal **Dual: Icosidodecaedro romo** **Cara: Pentágonos irregulares** **60 caras** **150 aristas** **92 vértices**	