HOMOTECIA Tiraje: *100* ejemplares

CÁTEDRA DE CÁLCULO - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA - FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN - UNIVERSIDAD DE CARABOBO

PUBLICACIÓN PERIODICA Nº 11 - AÑO 4 e-mail: homotecia@hotmail.com Valencia, 1º de Noviembre de 2006

EDITORIAL

Hay una diferencia sutil entre ser docente y ser educador. ¿Cuándo se logra lo uno y cuándo se logra lo otro? Se debe estar conciente que a pesar de haber permanecido cinco o más años en la carrera, esto no hace al egresado definitivamente docente, ni definitivamente educador.

En lo que respecta a lo docente, quizás se egrese formado en un setenta u ochenta por ciento de lo que se requiere en el medio laboral. Lo que falta por aprender se adquiere con la práctica, con la responsabilidad y la honestidad con que afronte su labor. Si se mantiene esta conducta y esta actitud, en poco tiempo alcanzará el cien por ciento de lo que es *ser docente*.

Pero en lo de ser educador, es posible afirmar que tienen un cien por ciento de potencial pero una mínima parte alcanzada. En palabras simples, llegar a ser educador es responder de hecho a la pregunta *cómo enseñar*, cuya respuesta no es tan sencilla. Es más, después de varios años en el medio educativo, un docente posiblemente termina su carrera sin llegar a sentir que en plenitud es un educador. Pero si existe el propósito de lograrlo, posiblemente los siguientes elementos son los que se deben considerar: en primer lugar, la vocación; esta juega un papel muy importante, sin ella no hay pasión ni deseo por educar. En segundo lugar, sentir una inseguridad práctica ayudará, porque esta se caracteriza por aceptar que la metodología y estrategias utilizadas para enseñar no son las mejores; y así se hace propicia porque permite la autocrítica que conduce al mejoramiento.

En fin, probablemente llegar a ser educador es una utopía, un estado que no se logra y que lo ideal y meritorio es continuar diariamente la lucha por alcanzarlo.

REFLEXIONES

"Escucha, serás sabio. El comienzo de la sabiduría es el silencio."

Pitágoras

"La sabiduría es hija de la experiencia."

Leonardo Da Vinci

"Las puertas de la sabiduría nunca están cerradas."

Benjamín Franklin

El último Teorema de Fermat

Estatua de Fermat y su musa es su ciudad natal, Toulouse

Autores: *J J O'Connor y E F Robertson*

Fecha original: 01-02-1996
Traducción Astroseti: 17-05-2006
Traductor: Covadonga Escandón Martínez

Pierre de Fermat murió en 1665. Hoy pensamos en él como un especialista en teoría de números; de hecho pensamos en él como tal vez el mejor que haya vivido. Por ello resulta sorprenderte descubrir que Fermat era de hecho abogado y solamente era un matemático aficionado. También resulta sorprendente que haya publicado solamente un artículo matemático en su vida y que haya sido un artículo anónimo escrito como apéndice al libro de un colega.

Ya que Fermat se rehusó a publicar su trabajo, sus amigos temían que pronto sería olvidado a menos que hicieran algo al respecto. Su hijo Samuel se ocupó de recolectar las cartas de Fermat y otros artículos matemáticos, comentarios escritos en libros, etc. con el objetivo de publicar las ideas matemáticas de su padre. Fue de este modo que llegó a publicarse el famoso 'Último Teorema'. Lo encontró Samuel escrito como una nota al margen en la copia de la *Arithmetica* de Diofanto que pertenecía a su padre.

El Último Teorema de Fermat afirma que $x^n + y^n = z^n$ no tiene soluciones enteras para x, y, z cuando $n < 2$. Fermat escribió *He descubierto una prueba verdaderamente extraordinaria pero este margen es demasiado pequeño para contenerla.*

Casi sin duda Fermat escribió la nota al margen alrededor de 1630, cuando estudió por primera vez la *Arithmetica* de Diofanto. Sin embargo, bien puede ser que Fermat se haya dado cuenta que su *prueba extraordinaria* era incorrecta, ya que todos sus otros teoremas fueron afirmados y reafirmados en problemas-reto que Fermat envió a otros matemáticos. Aunque los casos especiales para $n = 3$ y $n = 4$ fueron formulados como retos (y Fermat sí sabía cómo probarlos) el teorema general nunca fue mencionado de nuevo por Fermat.

De hecho, en toda la obra matemática que dejó Fermat solamente hay una demostración. Fermat prueba que *el área de un triángulo rectángulo no puede ser un cuadrado*. Esto claramente implica que un triángulo racional no puede ser un cuadrado racional. En símbolos, no existen enteros x, y, z que cumplan $x^2 + y^2 = z^2$ y que sean tales que $xy/2$ sea un cuadrado. De esto es fácil deducir el caso $n = 4$ del teorema de Fermat.

Vale la pena hacer notar que a partir de este punto faltaba demostrar el Último Teorema de Fermat nada más para las n primas impares. Ya que si existieran enteros x, y, z tales que $x^n+y^n=z^n$, entonces si $n = pq$, $(x^q)^p + (y^q)^p = (z^q)^p$. Euler le escribió a Goldbach el 4 de agosto de 1735 afirmando que tenía una demostración del Teorema de Fermat cuando $n = 3$. Sin embargo, su demostración en *Algebra* (1770) contiene una falacia y no es nada fácil dar una prueba alternativa del enunciado falso. Hay una forma directa de arreglar la demostración usando argumentos que aparecen en otras demostraciones de Euler así que puede ser razonable atribuirle el caso $n = 3$ a Euler.

El error de Euler es interesante y hay que entenderlo para los siguientes desarrollos. Necesitaba encontrar cubos de la forma $p^2 + 3q^2$ y Euler demuestra que, para cualquier a y b, si hacemos $p = a^3 - 9ab^2$, $q = 3(a^2b - b^3)$ entonces $p^2 + 3q^2 = (a^2 - 3b^2)^3$. Esto es verdadero pero después trata de demostrar que, si $p^2 + 3q^2$ es un cubo, entonces existen una a y una b tales que p y q son como arriba. Su método es imaginativo, calculando con números de la forma $a + b\sqrt{-3}$. Sin embargo, los números que tienen esta forma no se comportan del mismo modo que los enteros, de lo cual Euler parece no haberse dado cuenta.

El siguiente adelanto importante lo hizo Sophie Germain. Un caso especial dice que si n y $2n+1$ son primos, entonces $x^n + y^n = z^n$ implica que una de x, y o z es divisible entre n. Entonces el Último Teorema de Fermat se divide en dos casos.

Caso 1: Ni x, ni y, ni z son divisibles entre n.

Caso 2: Una y solo una de x, y o z es divisible entre n.

(Continúa en la siguiente página)

(Viene de la página anterior)

Sophie Germain demostró el Caso 1 del Último Teorema de Fermat para toda n menor a 100 y Legendre extendió sus métodos para todos los números menores a 197. Hasta ese punto, el Caso 2 no se había demostrado ni siquiera para $n = 5$ así que quedó claro que el Caso 2 era en el que había que concentrarse. Ahora bien, el Caso 2 para $n = 5$ se divide a su vez en dos. Una de x, y o z es par y una de ellas es divisible entre 5. El Caso 2(i) es en el que el número divisible entre 5 es par; el Caso 2(ii) es en el que el número par y el que es divisible entre 5 son diferentes.

El Caso 2(i) lo demostró Dirichlet y fue presentado a la Academia de Ciencias de París en Julio de 1825. Legendre pudo probar el Caso 2(ii) y la demostración completa para n fue publicada en septiembre de 1825. De hecho, Dirichlet pudo completar su propia demostración del caso para $n = 5$ con un argumento para el Caso 2(ii) que es una extensión de su propio argumento para el Caso 2(i).

En 1832, Dirichlet publicó una demostración para el último teorema de Fermat cuando $n = 14$. Claro que estaba tratando de demostrar el caso $n = 7$ pero había demostrado un resultado más débil. El caso $n = 7$ fue finalmente resuelto por Lamé en 1839. Mostraba por qué Dirichlet había tenido tanta dificultad ya que, aunque en la prueba de Dirichlet para $n = 14$ se usaban argumentos similares (pero computacionalmente mucho más difíciles) a los casos anteriores, Lamé tuvo que introducir algunos métodos totalmente nuevos. La demostración de Lamé es extremadamente difícil y hace parecer como que progresar a n más grandes sería casi imposible sin formas de pensar radicalmente novedosas.

El año 1847 es de gran importancia en el estudio del Último teorema de Fermat. El 1 de marzo de ese año, Lamé anunció a la Academia de París que había demostrado el Último teorema de Fermat. Esbozó una prueba que involucraba factorizar $x^n + y^n = z^n$ en factores lineales de números complejos. Lamé aceptaba que la idea le había sido sugerida por Liouvilli. Sin embargo, Liouville se dirigió a los asistentes después que Lamé y sugirió que el problema con este acercamiento era que se necesitaba una factorización única en primos para estos números complejos y dudaba que fuera cierta. Cauchy apoyó a Lamé pero, en su típica manera, apuntó que había reportado a la reunión de la Academia en octubre de 1847 una idea que creía que podría demostrar el Último teorema de Fermat.

Mucho trabajo se llevó a cabo durante las siguientes semanas tratando de demostrar que la factorización era única. Wantzel afirmó haberla probado el 15 de marzo pero su argumento *Es verdadero para $n = 2$, $n = 3$ y $n = 4$ y uno puede ver fácilmente que lo mismo aplica para $n > 4$* era un tanto ingenuo. [Wantzel estaba en lo correcto sobre $n = 2$ (enteros ordinarios), $n = 3$ (el argumento sobre el que Euler estaba equivocado) y $n = 4$ (que fue demostrado por Gauss).]

El 24 de mayo, Liouville leyó una carta a la Academia la cual resolvió la discusión. La carta era de Kummer y traía adjunto una separata de un artículo de 1844 que demostraba que fallaba la factorización única pero que podía 'recuperarse' con la introducción de *números complejos ideales*, lo cual había hecho en 1846. Kummer había usado su nueva teoría para encontrar condiciones bajo las cuales un primo es *regular* y había demostrado el Último teorema de Fermat para los primos regulares. Kummer también decía en su carta que creía que el 37 no cumplía con sus condiciones.

Para septiembre de 1847, Kummer envió a Dirichlet y a la Academia de Berlín un artículo en el que probaba que un primo p es regular (y que entonces cumple con el último teorema de Fermat) si p no divide a los numeradores de ninguno de los números de Bernoulli^n $B_2, B_4, ..., B_{p-3}$. El número de Bernoulli B_n se define como $x/(e^x - 1) = B_n x^n/n!$ Kummer demuestra que todos los primos menores a 37 son regulares pero el 37 no lo es ya que divide al numerador de B_{32}.

Los únicos primos menores a 100 que nos son regulares son 37, 59 y 67. Se usaron técnicas más fuertes para demostrar el último teorema de Fermat para estos números. Este trabajo fue hecho y continuado para números más grandes por Kummer, Mirimanoff, Wieferich, Furtwängler, Vandiver y otros. Aunque se esperaba que el número de primos regulares fuera infinito, probarlo también era un reto. En 1915 Jensen demostró que el número de primos irregulares es infinito.

A pesar de que se ofrecían cuantiosos premios por una solución, el último teorema de Fermat seguía sin ser demostrado. Tiene el dudoso honor de ser el teorema con el mayor número de pruebas falsas publicadas. Por ejemplo, más de mil demostraciones falsas fueron publicadas entre 1908 y 1912. El único progreso positivo parecía ser los resultados computacionales que mostraban simplemente que cualquier contraejemplo sería muy grande. Usando técnicas basadas en el trabajo de Kummer, hasta 1993 se había demostrado que el teorema es verdadero para n hasta 4 000 000.

En 1983 una contribución mayor vino de Gerd Faltings quien demostró que para toda $n > 2$, hay a lo más un número finito de enteros x, y, z primos entre sí para los cuales $x^n + y^n = z^n$. Esto fue un gran paso pero no era probable que siguiera una prueba de que el número finito era 0 para todos los casos extendiendo los argumentos de Faltings.

El último capítulo de la historia empezó en 1955, aunque en aquel entonces no se pensaba que el trabajo estuviera conectado al último teorema de Fermat. Yutaka Taniyama hizo algunas preguntas sobre curvas elípticas, es decir, curvas que tienen la forma $y^2 = x^3 + ax = b$ para a y b constantes. Trabajos adicionales de Weil y Shimura produjeron una conjetura, conocida ahora como la Conjetura Shimura-Taniyama-Weil. En 1986, Frey, en Saarbrücken, hizo la conexión entre esta Conjetura y el último teorema al mostrar que dicho teorema estaba lejos de ser una curiosidad poco importante de la teoría de números sino que de hecho estaba relacionado con las propiedades fundamentales del espacio.

Trabajos de otros matemáticos demostraron que un contraejemplo al último teorema de Fermat daría un contraejemplo a la Conjetura Shimura-Taniyama-Weil. La demostración del último teorema de Fermat fue completada en 1993 por Andrew Wiles, un matemático británico que trabajaba en la universidad de Princeton en Estados Unidos. Wiles dio una serie de tres pláticas en el Instituto Isaac Newton de Cambridge, Inglaterra, la primera de ellas el lunes 21 de junio, la segunda el martes 22. El la última plática, el miércoles 23 de junio de 1993, alrededor de las 10:30 de la mañana, Wiles anunció su demostración del último teorema de Fermat como un corolario de sus resultados principales. Después de escribir el teorema en el pizarrón, dijo *me detendré aquí* y se sentó. De hecho, Wiles había demostrado la Conjetura Shimura-Taniyama-Weil para una clase de ejemplos, incluyendo aquellos necesarios para probar el último teorema de Fermat.

(Continúa en la página siguiente)

(Viene de la página anterior)

Esto, sin embargo, no es el final de la historia. El 4 de diciembre de 1993, Andrew Wiles hizo una declaración *en vista de la especulación*. Explicó que durante el proceso de revisión habían surgido algunos problemas, la mayoría de los cuales ya había sido resuelta. No obstante, quedaba un problema y Wiles esencialmente retiró su reivindicación de la demostración. Declaró que *La reducción clave de (casi todos los casos de) la Conjetura Taniyama-Shimura a calcular el grupo de Selmer es correcta. Sin embargo el cálculo final de una cota superior precisa para el grupo de Selmer en el caso semicuadrado (de la representación simétrica cuadrada asociada a una forma modular) no está completado aún. Creo que podré terminarlo en el futuro próximo usando las ideas explicadas en mis pláticas en Cambridge.*

En marzo de 1994, Faltings, escribiendo en la revista *Scientific American*, dijo *Si fuera fácil, lo habría resuelto ya. Estrictamente hablando, no era una demostración cuando fue anunciada.*

Weil escribió, también en *Scientific American*, que *Creo que él ha tenido algunas buenas ideas al tratar de construir la demostración pero no la tiene. En cierta medida, demostrar el teorema de Fermat es como escalar el Everest. Si un hombre desea escalarlo pero se queda a cien yardas, no habrá escalado el Everest.*

De hecho, desde principios de 1994, Wiles comenzó a trabajar con Richard Taylor en un intento de rellenar los hoyos. Sin embargo decidieron que uno de los pasos claves en la demostración, que usa métodos desarrollados por Flach, no funcionaba. Intentaron un nuevo acercamiento también carente de éxito. En agosto de 1994, Wiles se dirigió al Congreso Internacional de Matemáticos pero no había logrado resolver las dificultades.

Taylor sugirió un último intento de extender el método de Flach en la manera necesaria y Wiles, aunque convencido de que no funcionaría, aceptó, principalmente para tener oportunidad de convencer a Taylor de que nunca serviría. Wiles trabajó en ello durante un par de semanas y la inspiración le llegó súbitamente.

En un destello vi que lo que el impedía funcionar [la extensión del método de Flach] *era algo que haría servir otro método que había intentado previamente.*

El 6 de octubre, Wiles envió la nueva prueba a tres colegas, incluyendo a Faltings. A todos les gustó la nueva demostración que era mucho más simple que la anterior. Faltings envió una simplificación de un pedazo de la prueba.

Ninguna prueba tan compleja como ésta puede garantizarse que sea correcta, así que una pequeña duda se mantendrá por algún tiempo. Sin embargo, cuando Taylor dio una plática ante el Coloquio Británico de Matemáticas en Edimburgo en abril de 1995, dio la impresión de que ya no quedan realmente dudas sobre el último teorema de Fermat.

Bibliografía

1. A D Aczel, Fermat's last theorem: Unlocking the secret of an ancient mathematical problem (New York, 1996).
2. D A Cox, Introduction to Fermat's last theorem, Amer. Math. Monthly 101 (1) (1994), 3-14.
3. H M Edwards, Fermat's last theorem: A genetic introduction to algebraic number theory (New York, 1996).
4. H M Edwards, The background of Kummer's proof of Fermat's last theorem for regular primes, Arch. History Exact Sci. 14 (3) (1975), 219-236.
5. C Goldstein, Le theoreme de Fermat, La recherche 263 (1994), 268-275.
6. D R Heath-Brown, The first case of Fermat's last theorem, Math. Intelligencer 7 (4) (1985), 40-47; 55.
7. R de Castro Korgi, The proof of Fermat's last theorem has been announced in Cambridge, England (Spanish), Lect. Mat. 14 (1-3) (1993), 129-135.
8. F Nemenzo, Fermat's last theorem: a mathematical journey, Matimyás Mat. 17 (2) (1994), 1-11.
9. A van der Poorten, Notes on Fermat's last theorem (New York, 1996).
10. A van der Poorten, Remarks on Fermat's last theorem, Austral. Math. Soc. Gaz. 21 (5) (1994), 150-159.
11. P Ribenboim, 13 lectures on Fermat's last theorem (New York, 1979).
12. P Ribenboim, Kummer's ideas on Fermat's last theorem, Enseign. Math. (2) 29 (1-2) (1983), 165-177.
13. P Ribenboim, Fermat's last theorem, before June 23, 1993, in Number theory (Providence, RI, 1995), 279-294.
14. P Ribenboim, The history of Fermat's last theorem (Portuguese), Bol. Soc. Paran. Mat. (2) 5 (1) (1984), 14-32.
15. P Ribenboim, Recent results on Fermat's last theorem, Canad. Math. Bull. 20 (2) (1977), 229-242.
16. R Schoof, Fermat's last theorem, in Jahrbuch überblicke Mathematik (Braunschweig, 1995), 193-211.
17. Singh, S., *El enigma de Fermat*, Planeta, Barcelona, 1997.
18. S Wagon, Fermat's last theorem, Math. Intelligencer 8 (1) (1986), 59-61.

Índice Cronológico de la Matemática (Parte XXIX)

LA CRONOLOGÍA ENTRE 1930 DC Y 1940 DC

1930: Se publica el famoso trabajo sobre Álgebra Moderna de *Van der Waerden*. Este trabajo, de dos volúmenes, presenta el álgebra desarrollada por *Emmy Noether, Hilbert, Dedekind* y *Artin.*

1930: *Hurewicz* prueba su teorema de encaje para los espacios métricos separables en espacios compactos.

1930: Kuratowski demuestra su teorema sobre gráficos de planos.

1931: *G D Birkhoff* prueba el teorema ergódico general. Esto transformará la teoría cinética de gases de *Maxwell-Boltzmann* en un principio riguroso con el uso de la *medida de Lebesgue.*

1931: *Gödel* publica *Über el unentscheidbare formal el der de Sätze Principia el Mathematica und verwandter Systeme* (Sobre la formalidad de las Proposiciones Irresolubles de los Fundamentos Matemáticos y los Sistemas Relacionados). Él prueba los resultados fundamentales sobre sistemas axiomáticos que muestran que en cualquier sistema matemático axiomático hay proposiciones que no pueden demostrarse o que pueden refutarse dentro de los axiomas del sistema. En particular la consistencia de los axiomas no puede demostrarse.

1931: *Von Mises* introduce la idea de un espacio muestral en la teoría de probabilidades.

1931: *Borsuk* publica su teoría de la retracción en la geometría diferencial métrica.

1932: *Haar* presenta la "Medida de Haar" sobre grupos.

1932: *Hall* publica *"A contribution to the theory of groups of prime power order"* (Una contribución a la teoría de grupos de potencias de primer orfen).

1932: *Magnus* demuestra que el problema de la palabra es verdad para el grupos del relator.

1932: Von Neumann publica *Grundlagen der Quantenmechanik* (Las Bases de la Mecánica Cuántica).

1933: *Kolmogorov* publica *Foundations of the Theory of Probability* (Fundamentos de la Teoría de la probabilidad) en el cual presenta un tratamiento axiomático de la probabilidad.

1934: *Gelfond* y *Schneider* resuelven de forma independiente, "El séptimo problema de Hilbert". Ellos probaron que a^q es transcendental cuando a es algebraico (distinto de 0 o de 1) y q es un número algebraico irracional.

1934: *Leray* muestra la existencia de soluciones débiles a las ecuaciones de *Navier-Stokes*.

1934: *Zorn* establece "el Lema de Zorn" también nombrado así (probablemente) por *Tukey*. Es equivalente al axioma de selección.

1935: *Church* inventa "El Cálculo Lambda" el cual aún hoy es una herramienta útil para los científicos en computación.

1936: *Turing* publica *On Computable Numbers* (Sobre números computarizables), con una aplicación al *Entscheidungsproblem* (Problema de la Decisión) en el que describe una máquina teórica, conocida actualmente como la "Máquina de Turing". Se convierte en un importante aporte a la teoría de la computación.

1936: *Church* publica *An unsolvable problem in elementary number theory* (Un problema irresoluble de la teoría elemental de números). "El Teorema de Church", qué demuestra que no hay ningún procedimiento de decisión para la aritmética, está contenido en este trabajo.

1937: *Vinogradov* publica *Some theorems concerning the theory of prime numbers* (Algunos teoremas acerca de la teoría de números primos) donde demuestra que cada entero impar suficientemente grande puede expresarse como la suma de tres primos. Ésta es una de las principales contribuciones a la solución de la *Conjetura de Goldbach*.

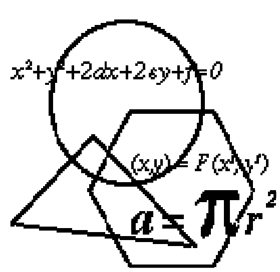
1938: *Kolmogorov* publica *Analytic Methods in Probability Theory* (*Los Métodos Analíticos en la Teoría de Probabilidades)* que da las bases para la Teoría de los Procesos del Azar de Harkov.

1939: *Douglas* da una solución completa al problema de *Plateau,* demostrando la existencia de una superficie de área mínima limitada por un contorno.

1939: *Abraham Albert* publica *Structure of Algebras* (Estructuras del Álgebra).

1940: *Baer* introduce el concepto de módulo injectivo, entonces inicia el estudio de grupos de acción en geometría.

1940: *Aleksandrov* introduce las sucesiones exactas.



TRABAJANDO EN CÁLCULO

Por: Prof. Rafael Ascanio H. – Prof. Próspero González M.
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA - FACE – UC

CÁLCULO INTEGRAL: INTEGRAL INDEFINIDA

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

A partir del siglo XVIII aumenta considerablemente el número de aplicaciones del cálculo a diversos campos del conocimiento humano. Su desarrollo y uso ha tenido efectos muy importantes en casi todas las áreas de la vida moderna. Es la base de muchos campos científicos, especialmente la física. De hecho, desarrollos modernos como las técnicas de construcción, de aviación, etc., hacen uso del cálculo. Muchas fórmulas algebraicas se usan en la actualidad en balística, calefacción, refrigeración, etc. Este éxito del cálculo se ha extendido hacia otros temas de la matemática: ecuaciones diferenciales, cálculo de vectores, cálculo de variaciones, análisis complejo, topología diferencial, entre otros.

Una aplicación bien conocida del cálculo es cuando se utiliza para obtener áreas de regiones y de volúmenes de sólidos, considerándose que el interés de los matemáticos por estos temas en el pasado, fue lo que dio origen al cálculo integral.

Plantear problemas sobre el cálculo de áreas planas y de volúmenes de sólidos se remonta a la antigüedad griega, donde básicamente se utilizaban dos tipos de métodos: *heurísticos o atómicos*, y *de exhausción o agotamiento*.

Estos prolegómenos del cálculo integral son sumamente importantes como apoyo al rigor que valida el edificio de conocimientos matemáticos, pero aún así, fue necesario desarrollar un conjunto de reglas y estrategias que dieran una flexibilidad tal al cálculo integral, para hacer más útil y muy efectiva su aplicación.

Así surgen la integración indefinida a la que se ha hecho referencia en artículos anteriores, y las técnicas de integración, de las cuales algunas de ellas, las más utilizadas, las trataremos en éste y en los artículos siguientes.

Integración por Sustituciones.-

Cambio de Variable:

Esta técnica permite resolver integrales que muestran de forma evidente, no tener solución inmediata. Mediante el Cambio de Variable se transforma en una nueva integral que sí puede resolverse utilizando las definiciones, las propiedades de las integrales indefinidas, las fórmulas elementales del proceso de integración y procedimientos básicos de la matemática.

El procedimiento del Cambio de Variable se fundamenta en la Regla de la Derivada de la Función Compuesta, llamada también Regla de la Cadena, utilizada en la derivación:

$$\boxed{\int h(x)\,dx = \int f\left[g(x)\right]\cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + C, \quad \textit{haciendo} \;\; u = g(x)}$$

Descripción de la técnica.-

La estrategia a seguir para realizar la integración por Cambio de Variable es la siguiente:

a) Se escoge una sustitución $u = g(x)$, que debe corresponder con la función interna de la función compuesta.

b) Se obtiene $du = g'(x)dx.$

c) Se rescribe la integral considerando a u como variable.

d) Se evalúa la integral resultante en términos de u .

e) Se devuelve el cambio; es decir, se hace $g(x) = u$ para expresar la función primitiva en la variable x**.**

En las siguientes páginas, se incluyen ejemplos que tratarán de ilustrar lo mejor posible el uso de esta técnica.

(Continúa en la página siguiente)

(Viene de la página anterior)

Ejemplos.-

1.- Obtenga: $\int \frac{dx}{4x^2+1}$.

Solución:

Resolviendo la integral. Se observa que en el denominador se puede establecer una suma de cuadrados: $I = \int \frac{dx}{4x^2+1} = \int \frac{dx}{(2x)^2+1}$

Al comparar con las fórmulas elementales, la integral dada tiene correspondencia con $\int \frac{du}{1+u^2} = ArcTg u + C.$

Acomodando el integrando y realizando un cambio de variable ($c.v.$), ajustamos esta integral con la fórmula elemental identificada.

$$I = \int \frac{dx}{(2x)^2+1} = \int \frac{dx}{1+(2x)^2}$$

Cambio de Variable en *I*: $u = 2x \quad \Rightarrow \quad du = 2dx \Rightarrow \frac{du}{2} = dx$

Volviendo a la integral para aplicar el cambio y terminar su resolución: $I = \int \frac{\frac{du}{2}}{1+u^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2} ArcTg\, u + C = \frac{1}{2} ArcTg\,(2x) + C$

2.- Verifique que $\int \frac{Sen\,x \cdot e^{Sec\,x}}{Cos^2} dx = e^{Sec\,x} + C$ **.**

Verificación:

Resolviendo la integral. La respuesta propuesta presenta a $Sec\,x$. Entonces, conviene proponer el cambio: $u = Sec\,x$.

Este cambio obliga a que en la integral debe aparecer el diferencial de la secante: $du = Sec\,x \cdot Tg\,x\,dx \cdot$ Entonces hay que rescribir la integral para que esto suceda.

$$I = \int \frac{Sen\,x \cdot e^{Sec\,x}}{Cos^2 x} dx = \int \frac{e^{Sec\,x} \cdot Sen\,x}{Cos^2 x} dx = \int \frac{e^{Sec\,x} \cdot Sen\,x}{Cos\,x \cdot Cos\,x} dx = \int e^{Sec\,x} \cdot \frac{Sen\,x}{Cos\,x} \cdot \frac{1}{Cos\,x} dx =$$
$$= \int e^{Sec\,x} \cdot Tg\,x \cdot Sec\,x\,dx = \int e^{Sec\,x}\, d(Sec\,x) = \int e^u du = e^u + C = e^{Sec\,x} + C$$

L. Q. Q. V.

3.- Determine que: $\int Sec\,x\,dx = Ln\left|Sec\,x + Tg\,x\right| + C \cdot$

Solución:

Como la respuesta propuesta presenta un logaritmo neperiano, al revisar las fórmulas elementales se encuentra que se corresponde con: $\int \frac{du}{u} = Ln|u| + C \cdot$

Se entiende entonces que para que la integral conduzca a la respuesta propuesta, el argumento del logaritmo debe aparecer en el denominador y el diferencial de este argumento en el numerador.

Siendo así, se modifica el integrando de la integral original multiplicando y dividiendo por lo que debe ser el argumento del logaritmo de la respuesta:

$$I = \int \frac{Sec\,x \cdot (Sec\,x + Tg\,x)}{Sec\,x + Tg\,x} dx = \int \frac{Sec^2\,x + Sec\,x \cdot Tgx}{Sec\,x + Tg\,x} dx = \int \frac{(Sec^2\,x + Sec\,x \cdot Tgx)dx}{Sec\,x + Tg\,x} = (*)$$

$$c.v.: \quad u = Sec\,x + Tg\,x \quad \Rightarrow \quad du = (Sec\,x \cdot Tg\,x + Sec^2 x)dx \quad \Rightarrow \quad du = (Sec^2 x + Sec\,x \cdot Tg\,x)dx$$

Volviendo a (*):

$$(*) = \int \frac{du}{u} = Ln|u| + C = Ln|Sec\,x + Tg\,x| + C$$

L.Q.Q.D .

(Continúa en la página siguiente)

(Viene de la página anterior)

4.- Verifique si: $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}dx = Ln\left(e^x + 1\right)^2 - x + C$ ·

Verificación:

Resolviendo la integral: Como en el numerador se tiene una diferencia, esto permite aplicar propiedades de las integrales indefinidas y separar la integral en la diferencia de dos integrales.

$$I = \int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}dx = \underbrace{\int \frac{e^x}{e^x + 1}dx}_{(I_1)} - \underbrace{\int \frac{dx}{e^x + 1}dx}_{(I_2)} = (*)$$

Resolviendo a I_1:

$$c.v.\ en\ I_1:\quad u = e^x + 1 \Rightarrow du = e^x dx$$

Luego:

$$I_1 = \int \frac{e^x}{e^x + 1}dx = \int \frac{du}{u} = Ln|u| + C_1 = Ln\left(e^x + 1\right) + C_1$$

Resolviendo a I_2:

$$I_2 = \int \frac{dx}{e^x + 1}dx = \int \frac{e^{-x}dx}{e^{-x}\cdot\left(e^x + 1\right)}dx = \int \frac{e^{-x}dx}{1 + e^{-x}} = (*)$$

$$c.v.\ en\ I_2:\quad u = 1 + e^{-x} \Rightarrow du = -e^{-x}dx \Rightarrow -du = e^{-x}dx$$

Luego:

$$I_2 = \int \frac{(-du)}{u} = -\int \frac{du}{u} = -Ln|u| + C_2 = -Ln\left(1 + e^{-x}\right) + C_2$$

Entonces:

$$I = Ln\left(e^x + 1\right) + C_1 - \left[-Ln\left(1 + e^{-x}\right) + C_2\right] = Ln\left(e^x + 1\right) + Ln\left(1 + e^{-x}\right) + C_1 + C_2 =$$

$$= Ln\left(e^x + 1\right) + Ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) + C = Ln\left(e^x + 1\right) + Ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x}\right) + C =$$

$$= Ln\left(e^x + 1\right) + Ln\left(e^x + 1\right) - Ln\, e^x + C = 2Ln\left(e^x + 1\right) - x + C =$$

$$= Ln\left(e^x + 1\right)^2 - x + C$$

L.Q.Q.V

5.- Comprobar que $\int \frac{e^{3x}dx}{1 + e^x} = \frac{\left(e^x - 1\right)^2}{2} + Ln\left(1 + e^x\right) + C$ ·

Comprobación:

Resolviendo la integral.

Cambio de variable en I:

$$u = 1 + e^x \begin{cases} e^x = u - 1 \\ du = e^x dx \end{cases}$$

Luego, se rescribe la integral para aplicar el cambio y así resolverla.

$$I = \int \frac{e^{3x}dx}{1 + e^x} = \int \frac{e^{2x}\cdot e^x dx}{1 + e^x} = \int \frac{\left(e^x\right)^2\cdot e^x dx}{1 + e^x} = \int \frac{(u - 1)^2 du}{u} = \int \frac{\left(u^2 - 2u + 1\right)du}{u} = \int\left(u - 2 + \frac{1}{u}\right)du = \int u du - 2\int du + \int \frac{du}{u} = \frac{u^2}{2} - 2u + Ln|u| + C =$$

$$= \frac{\left(1 + e^x\right)^2}{2} - 2\left(1 + e^x\right) + Ln\left(1 + e^x\right) + C = \frac{1 + 2e^x + e^{2x}}{2} - 2 - 2e^x + Ln\left(1 + e^x\right) + C = \frac{1 + 2e^x + e^{2x} - 4 - 4e^x}{2} + Ln\left(1 + e^x\right) + C = \frac{e^{2x} - 2e^x - 3}{2} + Ln\left(1 + e^x\right) + C =$$

$$= \frac{e^{2x} - 2e^x + 1 - 4}{2} + Ln\left(1 + e^x\right) + C = \frac{\left(e^x - 1\right)^2}{2} - 2 + Ln\left(1 + e^x\right) + C = \frac{\left(e^x - 1\right)^2}{2} + Ln\left(1 + e^x\right) - 2 + C = \frac{\left(e^x - 1\right)^2}{2} + Ln\left(1 + e^x\right) + C$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{e^{3x}dx}{1 + e^x} = \frac{\left(e^x - 1\right)^2}{2} + Ln\left(1 + e^x\right) + C}$$

L. Q. Q. C.

(Continúa en la página siguiente)

(Viene de la página anterior)

6.- Calcular: $\int \frac{x^4+x^3+6x^2+2x+16}{(x^2+4)^2\cdot(x^2-2x+2)}dx \cdot$

Solución:

Resolviendo la integral. Se escribe el integrando como el producto de dos fracciones, donde el denominador para cada una de éstas es uno de los dos factores presentes en el denominador original. El polinomio en el numerador original será el numerador en la fracción con denominador igual al factor de potencia 2; esta potencia se desarrolla como producto notable y se realiza la división de polinomios entre ambos. Para la otra fracción el numerador es 1. Luego se sigue con las operaciones elementales matemáticas que se ameriten y se aplican las correspondientes propiedades de las integrales indefinidas.

$$I=\int \frac{x^4+x^3+6x^2+2x+16}{(x^2+4)^2\cdot(x^2-2x+2)}dx=\int\left(\frac{x^4+x^3+6x^2+2x+16}{\left(x^2+4\right)^2}\cdot\frac{1}{x^2-2x+2}\right)dx=$$

$$=\int\left(\frac{x^4+x^3+6x^2+2x+16}{x^4+8x^2+16}\cdot\frac{1}{x^2-2x+2}\right)dx= \;=\int\left(1+\frac{x^3-2x^2+2x}{x^4+8x^2+16}\right)\cdot\frac{dx}{x^2-2x+2}=$$

$$=\int\left[1+\frac{x\cdot\left(x^2-2x+2\right)}{x^4+8x^2+16}\right]\cdot\frac{dx}{x^2-2x+2}=\int\left(\frac{1}{x^2-2x+2}+\frac{x}{x^4+8x^2+16}\right)dx=$$

$$=\int\frac{dx}{x^2-2x+2}+\int\frac{xdx}{x^4+8x^2+16}=\underbrace{\int\frac{dx}{x^2-2x+2}}_{(I_1)}+\underbrace{\int\frac{xdx}{\left(x^2+2\right)^2}}_{(I_2)}=(*)$$

Resultan ahora dos integrales que, para facilitar las operaciones, se resuelven por separado.

Resolviendo a I_1:

$$I_1=\int\frac{dx}{x^2-2x+2}=\int\frac{dx}{\left(x^2-2x\right)+2}=\underbrace{\int\frac{dx}{\left(x^2-2x+1\right)+1}}_{(completando\ \ cuadrados)}=\int\frac{dx}{(x-1)^2+1}=\int\frac{dx}{1+(x-1)^2}=arcTg\ (x-1)+C_1$$

Resolviendo a I_2:

$$I_2=\int\frac{xdx}{\left(x^2+2\right)^2}=\int\frac{\frac{du}{2}}{u^2}=\tfrac{1}{2}\int u^{-2}du=-\frac{1}{2u}+C_2=-\frac{1}{2\left(x^2+4\right)}+C_2$$

$$c.v.(I_2):\quad u=x^2+2\ \ \Rightarrow\ du=2xdx\ \Rightarrow\ \frac{du}{2}=xdx$$

Volviendo a (*), se obtiene la solución final:

$$(*)=I=arcTg\ (x-1)+C_1+\left[-\frac{1}{2\left(x^2+4\right)}+C_2\right]=arcTg\ (x-1)-\frac{1}{2\left(x^2+4\right)}+C$$

$$Nota:\ C=C_1+C_2$$

En el manual de nuestra autoría, **CÁLCULO II. Ejercicios**, se presentan un significativo número de ejercicios resueltos y propuestos sobre la técnica de sustitución por Cambio de Variable, que pueden servir al lector interesado para profundizar mejor sobre este procedimiento. El manual está a disposición de todos en la sección de Publicaciones de la Facultad de Ciencias de la Educación.

HIPÓTESIS Y REALIDAD

Por: Joaquín GONZALEZ ALVAREZ

Optometrista y profesor de Física en Holguín, Cuba, es autor de numerosos libros y artículos científicos, habiendo recibido diversos premios y reconocimientos a su labor divulgadora.
E-Mail: joaquin.gonzalez@cristal.hlg.sld.cu

Publicado el 9 de Septiembre de 2006 en *Reflexiones* de **casanchi.com**, sitio de Divulgación de Matemática, Física, Astronomía, en el contexto de la red telemática

Con el establecimiento en el siglo diecisiete de la Mecánica de Newton, que englobaba en un todo armónico una teoría que pretendía abarcar la explicación de la realidad, se suponía haber llegado a comprender la naturaleza y sus leyes. Inspirado en este triunfo de la ciencia, El poeta inglés de la época, Alexander Pope expresó: "La naturaleza y sus leyes yacían en las tinieblas. Dios dijo: ¡Hágase Newton!, y la luz se hizo".

Newton. Parte del retrato realizado por Kneller en 1702. El original se encuentra en la Nacional Portrait Gallery, en Londres (Fuente: Univ. St. Andrews, Escocia)

Algunas leyes ya las habían encontrado, de cierto modo, algunos antecesores del sabio inglés tales como Kepler y Galileo a los cuales hizo justo reconocimiento al decir: "Si vi mas lejos que los demás fue porque pude subir sobre hombros de gigantes". A los hallazgos de Kepler y Galileo, les comunicó Isaac Newton mayor rigor y basado en el mismo, logró lo que se conoce en la historia como la primera gran síntesis de las leyes de la física. En las tres leyes de la dinámica y en la famosa ley de la Gravitación Universal se basa toda la Física Clásica, la cual constituyó el fundamento de prácticamente toda la física hasta los comienzos del siglo XX y aun lo es hoy de la mecánica de los objetos del macromundo no animados de velocidades cercanas a la de la luz. El método de razonamiento intrínseco en la Mecánica de Newton fue tomado por la ciencia en general y por la filosofía constituyendo el llamado Paradigma Newtoniano. El que ese paradigma fuera sustituido a principios del siglo pasado por lo que pudiéramos llamar Paradigma Cuántico-Relativista para el micromundo y altas velocidades, en nada rebaja la gloria de Isaac Newton y cuya teoría como ya dije, es la que se utiliza para lo de gran tamaño y no muy veloz, vale decir para lo cotidiano.

Cuando una teoría como la de Newton no puede explicar algunos fenómenos, es cuando la comunidad científica se da cuenta de que las teorías, como ya he explicado en otras ocasiones, no reflejan completamente la realidad y que solo constituyen una hipótesis de trabajo, un modelo para el estudio de la realidad como la maqueta que construye un urbanista para planificar una ciudad. Algunas veces esa hipótesis, esa maqueta es de imponderable genialidad como es el caso de la Mecánica de Newton.

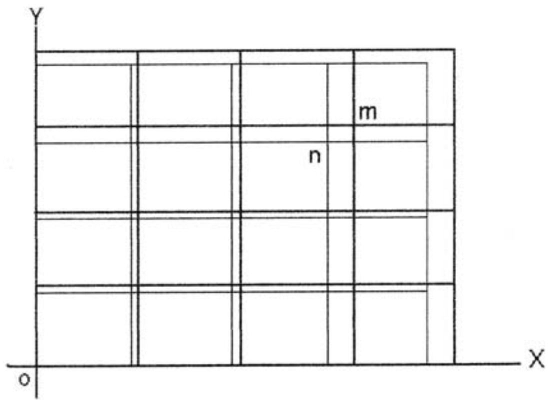
En Filosofía de la Ciencia, a ese método de estudiar la realidad mediante hipótesis o de maquetas como me he permitido llamarlas, se le llama instrumentalismo y constituye dentro del positivismo, una variante del pragmatismo de Dewey y el convencionalismo de Henri Poincaré.

Cuando en la Edad Media, Nicolás Copérnico se enfrentó a la Iglesia aduciendo que la Tierra giraba alrededor del Sol, esta institución al principio no condenó al sabio polaco porque consideraba que la teoría de éste no era una descripción de la realidad sino sólo una hipótesis que facilitaba los cálculos. Aunque no existía el concepto, la Iglesia consideró a Copérnico como instrumentalista. Cuando éste insistió en que la Tierra se movía fue refutado y perseguidos sus seguidores. Así sufrieron persecución Galileo, Giordano Bruno y otros que no admitieron ser instrumentalistas y se empecinaron en afirmar que describían la realidad tal como era. Galileo fue obligado a retractarse pero lo cierto es que la tesis copernicana es sólo una hipótesis instrumentalista, pues moverse o no moverse depende del punto de referencia. Sin embargo los que murieron en la hoguera dieron una lección de entereza al defender aquello en lo que se cree que es la verdad.

VARIACIÓN DEL ESPACIO DEBIDO A LAS PERTURBACIONES EN LOS PLANOS PARALELOS

Por: Lic. Domingo Urbáez
DEPARTAMENTO MATEMÁTICA-FACE-UC

La figura que se ilustra a continuación representa la perturbación de los ejes y por lo tanto la perturbación del plano. En este ejemplo en particular, el plano se contrae a diferencia de un plano fijo.



Lo interesante de esta concepción es que plantea que cualquier punto del plano e incluso del espacio funciona como un centro de perturbación - un punto que a pesar de las perturbaciones mantiene su posición visual - es decir, existen infinitos centros de perturbación. Estos centros de perturbación deforman el espacio tal y como lo conocemos.

Según esta definición, la distancia del origen al punto *m* sería exactamente igual a la distancia del origen al punto *n*. ¿Qué consecuencia genera esta definición? Las consecuencias que se generan de esta nueva definición podrían ser las siguientes:

a) La única diferencia existente entre el punto *m* y el punto *n*, es su posición visual.

b) Tanto el punto *m* como el punto *n*, poseen las mismas coordenadas; por lo tanto, la distancia existente al origen en cada caso es igual.

c) La distancia del punto *m* al punto *n* es igual a cero, ya que sus coordenadas son iguales.

Estas premisas afirman que pueden existir dos o más puntos de posiciones visualmente distintas pero de coordenadas exactamente iguales. Luego, si existen puntos con estas características deben existir funciones que cumplan con estas premisas. Por lo tanto, podríamos dibujar una circunferencia de radio 4 con centro en el origen y otra circunferencia concéntrica de radio 2. Según las premisas antes citadas, ambas circunferencias serían iguales, lo que establecería una igualdad general para toda función.

Un enunciado para una hipotética igualdad matemática universal sería:

"Para toda función matemática definida como $y= f(x)$, existe y debe existir otra función matemática definida como $y=g(x)$, tal que visualmente $f(x)$ sea distinta a $g(x)$ y ambas cumplan con todas las definiciones del cálculo, de tal manera que $f(x)$ sea igual a $g(x)$ para efectos de dichos cálculos, y una se defina en un plano fijo y la otra en un plano perturbado”. *Dicho enunciado se extiende al espacio.*

Esta teoría afirma que una función $f(x)$ de longitud L1, es igual a una función $g(x)$ de longitud L2, si y sólo si, L1 es igual a L2. Si las longitudes fueran distintas entonces no podrían ser iguales. Esto supondría una limitación a una igualdad matemática universal de las funciones de *"n"* variables. Sin embargo, la solución la podríamos encontrar en la perturbación de los ejes, plano y espacio.

Trataré de explicar esto de una forma más clara.

La teoría de la igualdad matemática universal de funciones indica que si logramos ubicar dos tipos de plano: uno fijo y uno perturbado, podríamos crear dos puntos separados por una distancia hipotética λ pero de iguales coordenadas en el plano perturbado y de coordenadas distintas en el plano fijo.

Por lo tanto, si logramos crear no una, sino *"n"* perturbaciones en el plano movible se podrían crear en consecuencia *"n"* puntos de iguales coordenadas pero en distintas posiciones en el plano fijo.

(Continúa en la página siguiente)

(Viene de la página anterior)

Entonces, sea *p* el punto fijo del plano fijo, y sean p_1, p_2, p_3, p_4,..., los puntos creados en el plano perturbado y λ_1, λ_2, λ_3, λ_4,..., las distancias de estos al punto fijo *p*, se tiene que:

a) En el plano fijo: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4 \neq \cdots \neq \lambda_n$

b) En el plano perturbado: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \cdots = \lambda_n$

Como las distancias en el plano fijo son distintas, las coordenadas también lo serán. Esto me permite concluir que mediante la perturbación de los planos se pueden crear "n" puntos a partir de uno solo.

Dicha proposición explica y aclara hasta cierto punto que no sólo las funciones de igual longitud pueden igualarse, sino que las de distintas longitudes también.

En pocas palabras, esta teoría se atrevería a afirmar que una función cuadrática es exactamente igual a un simple punto. Por supuesto, el punto tendría una versión un poco más compleja que la aceptada hasta el momento.

En conclusión, el punto sería un elemento que cumpliría con dos condiciones universales. Estas condiciones serían:

1) Todo punto tiene la capacidad de:

1.1. Estar en una misma posición visible pero con distintas coordenadas.

1.2. Estar en distintas posiciones visibles pero con las mismas coordenadas

2) Todo punto tiene la capacidad de generar:

2.1. Infinitos puntos de iguales coordenadas.

2.2. Infinitos puntos de distintas coordenadas.

Estas dos condiciones son suficientes y necesarias para poder establecer algún enunciado que defina de forma general la igualdad universal. Toda correspondencia, relación y comportamiento que presenciamos podría ser explicado por medio del estado vibratorio de un punto o partícula.

En cuanto a la igualdad de las funciones, hasta el momento no he podido encontrar una que satisfaga todas las premisas que expuse anteriormente. Sin embargo, puedo decir que este método debe ser capaz de deformar la estructura de las funciones y moldearlas de tal manera que alcancen una nueva estructura matemática, a pesar de no significar exactamente lo mismo.

Por ejemplo, una parábola explicaría el decrecimiento y crecimiento de cierto proceso biológico; por otro lado, una recta de pendiente positiva explicaría otro proceso totalmente distinto y sin ninguna relación directa con el primero. La representación gráfica permite visualizar sus diferencias.

El detalle es que creo que ambas funciones pueden igualarse una con otra mediante un método. Esta igualdad nos permitiría demostrar que todo está conectado y que nada es absolutamente independiente de cualquier otro proceso físico existente.

Creo también, poder indicar que este método consiste en un movimiento vibratorio de los planos. Si quisiéramos escribir que una función f (x) es igual a una función g (x) mediante un movimiento vibratorio, entonces decimos:

$$f\,(x) = \mathbf{Mov}\ [g\,(x)]$$

El prefijo "Mov" se describe como el procedimiento mediante el cual dos o más funciones se pueden igualar gráficamente.

Por ejemplo: se tienen tres funciones *f(x)=x*, *g(x)=Cos(x)* y *h(x)=l/x*. Podríamos afirmar que *f(x)*=Mov [Cos(x)] y *f(x)* = Mov [l/x], por lo tanto

$$\boxed{\mathbf{Mov\ [Cos(x)] = Mov\ [l/x]}}$$

DEUS

EL PENSAMIENTO COMPLEJO EN MATEMÁTICA (Parte III)

Por: ***Rafael Ascanio H.***

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - FACE – UC

Con respecto a mi escrito en el número anterior de HOMOTECIA sobre el pensamiento complejo en matemática, donde incluí algunos elementos para tratar sobre lo que consideramos en matemática *densidad de la recta numérica,* conversé sobre esto con el conocido y respetado profesor Miguel Ángel Castillo.

Cuando le conversé sobre lo que había escrito, él me preguntó: *"¿Tú eres denso?"*. Mi respuesta fue inmediata: *"Sí"*. Al oír mi respuesta, hizo silencio unos instantes y luego agregó: *"Si tú fueras denso en las mismas condiciones que lo defines para la recta numérica, yo no pudiera hacer esto"*, y a continuación, colocó un dedo sobre mi abdomen y lo hundió.

¿Qué quiso que entendiera con esta acción? Reflexioné. Posiblemente esto: es evidente que yo soy denso pero la diferencia entre lo denso que yo soy y la forma como afirmamos que supuestamente lo es la recta numérica es abismal. Recordemos a Morin (se lee Morán): el cuerpo humano es un ente material, tangible, no solamente es un conglomerado de células sino un conjunto organizado y en donde las interacciones entre sus partes lo convierte en lo que es, un ser viviente. Lo denso del ser humano sólo puede ser reconocido y hasta conceptualizado por el hombre, mas no puede ser ideado.

Lo denso de la recta numérica es una idea, una definición, una construcción del pensamiento del hombre. Es más, la misma recta numérica es una idea. En otras palabras, así como *no* se puede cambiar el concepto de lo denso del cuerpo humano; *sí* puede hacerse con la definición de lo denso de la recta numérica, pero aparentemente cometemos el error de *aceptar* que ambas densidades significan (o representan) lo mismo. Hay que convenir entonces, que para solucionar el problema de la densidad de la recta numérica, basta solo con redefinirla. Pero ahí está el problema, ¿cómo hacerlo?

Redefinir lo denso de la recta numérica debe ser una inquietud de los matemáticos; quizás esta es la razón del estudio actual de algunos elementos en esa línea, tales como el caso de los números p-ádicos que mencioné en el escrito anterior. Esperemos que pronto lleguen a algo satisfactorio. Los investigadores en Educación Matemática así como los docentes del área, mantenemos la inquietud en espera de un conocimiento cuya transmisión luce sumamente importante en el hacer y en el aprendizaje de la matemática. Es la historia de la construcción de la cultura del hombre, particularmente dentro del mundo de la matemática.

R. A. H.

En Matemática, ¿qué es una *"Conjetura"*?

Por: Coordinadores de Publicación de HOMOTECIA

La palabra *Conjetura* viene del latín *coniectūra*. Es el valor otorgado, ya sea moral, ético o matemático, a las cosas o sucesos por indicios y observaciones.

En Matemática, la expresión *conjetura* hace referencia a una afirmación que se supone cierta, pero que no ha sido probada ni refutada hasta la fecha. Cuando se comprueba, entonces queda considerada como un *teorema*. Algunas conjeturas muy conocidas en matemática son las siguientes:

Conjetura abc, sobre números primos, propuesta por *Joseph Oesterlé* y *David Masser* en el año 1985.

Conjetura de Catalan , sobre potencias de números naturales, propuesta por *Eugène Charles Catalan* en 1844.

Conjetura de Collatz es un famoso problema sobre números enteros, conocido también como *conjetura 3n+1* que fue enunciada por el matemático *Lothar Collatz* en 1937.

Conjetura (fuerte) de Goldbach es uno de los problemas abiertos más antiguos en matemática, enunciada por *Christian Goldbach* en 1742 en los siguientes términos: *"Todo número par mayor que 2 puede escribirse como suma de dos números primos"* (se puede emplear dos veces el mismo número primo).

Conjetura (débil) de Goldbach afirma que: *"Todo número impar mayor que 7 puede expresarse como suma de tres números primos impares"* o, de forma equivalente, *"Todo número impar mayor que 5 puede expresarse como suma de tres números primos"* (se puede emplear el mismo número primo más de una vez en esta suma); recibe el nombre de "débil" porque si se demuestra la conjetura fuerte de Goldbach, se demostraría ésta automáticamente.

Conjetura de Taniyama-Shimura convertida en teorema gracias a los trabajos de *Andrew Wiles* (El Último Teorema de Fermat), *Christophe Breuil*, *Brian Conrad*, *Fred Diamond* y *Richard Taylor*, muy importante dentro de la matemática moderna, que conecta la topología y la teoría de números, inicialmente propuesta por *Yutaka Taniyama* en 1955 y posteriormente desarrollada junto a *Goro Shimura*.

Conjetura de los números primos gemelos, denominación que les dio *Paul Stackel*, y hace referencia a dos números primos que son impares consecutivos y la conjetura propone que existen infinitas parejas de este tipo de número.

La *hipótesis de Riemann*, formulada por primera vez por *Bernhard Riemann* en 1859. Es una conjetura sobre la distribución de los ceros de la *función zeta de Riemann* $\zeta(s)$ y constituye uno de los problemas abiertos más importantes de las matemáticas contemporáneas. El Instituto Clay de Matemáticas ofrece dentro del marco de su programa de *problemas del milenio* un millón de dólares como premio por una prueba de esta conjetura.

Conjetura de Poincaré, propuesta en 1904, y hoy ya *Teorema de Poincaré* gracias al trabajo del ruso *Perelman*, fue una de las hipótesis más importantes de la topología. La conjetura sostenía que la esfera tridimensional es la única variedad compacta tridimensional en la que todo lazo o círculo cerrado se puede deformar (transformar) en un punto. Este último enunciado es equivalente a decir que sólo hay una variedad cerrada y simplemente conexa de dimensión 3, la esfera tridimensional.

En los siguientes números de HOMOTECIA presentaremos por separado trabajos sobre estas conjeturas y cualquier otra que, aunque no esté mencionada en este grupo, pueda resultar interesante.

FUENTE: Wikipedia® de Wikimedia Foundation, Inc. Junio de 2006.

HUMOR EN LA RED

¿Qué es un niño complejo? Un niño con la madre real y el padre imaginario.

¿Qué es un oso polar? Un oso rectangular, después de un cambio de coordenadas.

Dos vectores se encuentran y uno le dice al otro: "¿Tienes un momento?".

¿Por qué existe la tangente? Porque las otras curvas le dijeron "¡No nos toque!".

Me gustan los polinomios, pero solo hasta cierto grado.

¿Cuál sería la razón para que un libro de matemática se suicide? Porque tiene demasiados problemas.

Va e^x por la calle y se le cruza un integrador, el cual, todo prepotente, le dice: "¡A que te integro!" y e^x le contesta: "Y a mí qué...". [Recuerden: $\int e^x dx = e^x + C$ puesto que $\frac{d\left(e^x\right)}{dx} = e^x$]

En un examen oral, un profesor pregunta al alumno: "¿Por qué toma usted el valor absoluto de esa exponencial?". El estudiante se da cuenta de su error, e intenta "arreglarlo" diciéndole: "Para que sea más positivo todavía".

En mitad de una conferencia de matemáticas, un participante levanta la mano y dice: "¡Tengo un contraejemplo para ese teorema!". A lo que el conferencista responde: "No importa, yo tengo dos pruebas".

AMENIDADES

1. Un trozo caído del espacio sobre la superficie terrestre ¿es un meteoro, o un meteorito? **Es un meteorito. Meteoro es todo fenómeno luminoso que se produce en la atmósfera terrestre por la entrada de un cuerpo sólido proveniente del espacio exterior.**

2. ¿Cómo se llama el eclipse en que la Tierra está entre el sol y la luna: lunar, solar o qué? **Se llama Lunar.**

3. ¿En qué mes celebran los rusos la Revolución de Octubre? **En Noviembre. El calendario ruso estaba 13 días retrasado respecto del nuestro.**

4. El 'Big Ben' del parlamento británico, ¿es la torre o sólo la campana? **Es la campana. La torre es la 'Torre del Big Ben'.**

5. ¿Cuál es el color simbólico del luto en Oriente? **Es el blanco.**

6. ¿Qué animal "zurea" (emitir arrullos)? **La paloma.**

7. ¿Que descubrió Alfred Nobel? **Descubrió la dinamita.**

8. ¿Quién era el mayor de los hermanos Marx, famosos cómicos estadounidenses? **Era Leonard M. Marx, conocido como "Chico".**

9. "Jack el Destripador", el feroz asesino inglés nunca descubierto, destripaba con la mano izquierda, ¿por qué? **Porque era zurdo.**

10. ¿Cuál es la flor del naranjo? **La flor del naranjo es el Azahar.**

Sudoku!!!

El juego numérico que activa la inteligencia

Un grupo de lectores nos han manifestado que, gracias a nuestra publicación mensual de SUDOKU, se entusiasmaron por este pasatiempo, han adquirido libros donde se proponen la resolución de muchos de ellos ajustados a niveles de experiencia y en su asidua búsqueda, se han encontrado hasta con calculadoras especiales diseñadas para dedicarse a resolver infinidades de éstos. De igual manera también participan en competencias de resolución de Sudoku. Por estas razones, seguiremos publicándolo mensualmente mientras exista este interés.

Recuerda: la regla para hacerlo es rellenar cada fila, cada columna y cada caja de 3x3 con los números del 1 al 9 sin repetirlos.

La respuesta del anterior:

2	5	6	9	7	8	1	3	4
3	7	9	2	4	1	6	8	5
4	8	1	5	3	6	9	2	7
6	1	4	7	2	3	8	5	9
5	9	2	8	1	4	7	6	3
8	3	7	6	5	9	4	1	2
1	2	8	3	9	7	5	4	6
7	4	5	1	6	2	3	9	8
9	6	3	4	8	5	2	7	1

Y ahora…….

¡¡¡Sexto Reto!!!

9	4						3	1
	8		9		6		2	
2		6				8		9
			1		3			
7								5
			8		2			
1		2				3		8
	7		3		1		5	
4	5						9	7

Tomado de: **Mephan, M. (**Comp.) (2005). *Sudoku. El nuevo juego numérico que activa la inteligencia.* Caracas-Venezuela: Editorial Random House Mondadori.

¡Éxito y hasta el próximo encuentro!

GALERÍA

Grigori "Grisha" Yakovlevich Perelman
(En ruso: Григорий Яковлевич Перельман)
Nació: 13 de junio de 1966

Matemático ruso, nacido en Leningrado en la otrora Unión Soviética (Actualmente: San Petersburgo, Rusia). Se le conoce con el nombre de "Grisha". Ha hecho grandes aportes a la geometría Riemanniana y a la geometría topológica. Se le considera y se le respeta como experto en las transformaciones topológicas denominadas *flujo de Ricci*.

Vida y Educación

A los 16 años, ganó una medalla de oro en la Olimpiada Internacional de Matemática, un concurso para escolares de secundaria. También, a principios de los 80, consiguió la puntuación más alta en la prestigiosa organización para personas con elevado coeficiente intelectual Mensa.

Perelman es doctor en matemáticas por la Universidad de San Petersburgo. Durante los años 80 y 90 trabajó en varias universidades norteamericanas y finalmente volvió a Rusia en 1995 a trabajar en el Instituto Steklov en su demostración de la forma del universo.

Conjetura de Geometrización de Thurson

En noviembre de 2002 anunció que había encontrado un método que resolvía la conjetura de geometrización de Thurston, de la que la famosa Conjetura de Poincaré, propuesta por éste en 1904, es un caso especial, y publicó una serie de 3 artículos explicando en líneas generales su aproximación al problema.

A finales de 2005 la demostración completa de ambas conjeturas (geometrización y Poincaré) utilizando el método Hamilton-Perelman fue desarrollada por Huai-Dong Cao y Xi-Ping Zhu y publicada en la edición de junio de 2006 del Asian Journal of Mathematics.

El consenso entre la comunidad de expertos en geometría diferencial es que el desarrollo de Perelman es esencialmente correcto y en consecuencia la conjetura se da por probada y en adelante deberá ser considerada un teorema.

Por todo esto, el 22 de agosto de 2006 se le otorgó la medalla Fields durante el XXV Congreso de la Unión Matemática Internacional, que se celebró en España. Perelman no asistió al evento, intención que ya le había comunicado meses antes al presidente de la Unión Matemática Internacional, John Ball debido a que "[El premio] es completamente irrelevante para mí. Cualquiera puede entender que si la prueba es correcta no se necesita ningún otro reconocimiento".

Nota de los Coordinadores de Publicación de Homotecia:

Como no hay Premio Nóbel de Matemática, se instauraron antes de la Segunda Guerra Mundial las Medallas Fields; premio que concede la Unión Matemática Internacional cada cuatro años. Estas medallas se conceden a una o a más personas de forma simultanea y es el mayor honor al que puede aspirar un matemático. Físicamente está chapada en oro y tiene la cabeza del matemático griego Arquímedes.

Puede leer en la página siguiente, un artículo cuya autora es la periodista MALEN RUIZ DE ELVIRA, publicado en el diario EL PAÍS, de Madrid, de fecha 22-08-2006, sobre la renuncia de Perelman a la Medalla Fields.

El ruso Perelman rechaza la medalla Fields, la mayor distinción matemática

Por: MALEN RUIZ DE ELVIRA - Madrid - España
EL PAÍS - Sociedad - 22-08-2006

Grigori Perelman, el matemático ruso que, al demostrarla, ha convertido en teorema la conjetura de Poincaré, ha rechazado la prestigiosa medalla Fields concedida precisamente por este trabajo, que se anunciará hoy en Madrid en la inauguración del Congreso Internacional de Matemáticos. En sus primeras declaraciones después de varios años de silencio, Perelman, que está sin trabajo y vive con su madre, en las afueras de San Petersburgo, asegura que ha abandonado las matemáticas porque está decepcionado y que nada de lo que pueda decir interesa a la gente.

Hoy, 22-08-2006, arranca en Madrid la máxima cita mundial de los matemáticos, con asistencia de unos 3.000 especialistas. Las sesiones, en las que se tratarán prácticamente todas las áreas de las matemáticas, se prolongarán hasta el próximo día 30.

Hoy se harán públicas, como siempre al inicio de estos congresos que se celebran cada cuatro años, entre otros galardones, las medallas Fields que presentará el Rey Juan Carlos. Se trata de los premios más prestigiosos de las matemáticas; se establecieron en 1936 con el objetivo de estimular la investigación, por lo que sólo las obtienen matemáticos de hasta 40 años de edad, la edad de Perelman. Han ido ganando prestigio y hasta ahora sólo se han otorgado 44 y nunca un matemático ha rechazado el galardón. Ayer no hubo reacción oficial de la Unión Matemática Internacional (IMU, siglas en inglés) ante el rechazo sin precedentes de Perelman, pero fuentes de la organización del congreso señalaron que se le otorgará el premio de todas formas.

Según Perelman, John Ball, presidente de la IMU, le visitó para comunicarle el premio. "Desde el principio le dije que lo rechazaba. Es completamente irrelevante para mí. Cualquiera puede entender que si la prueba es correcta no se necesita ningún otro reconocimiento", le comentó a los periodistas Sylvia Nasar y David Gruber, del *The New Yorker*. Las declaraciones de Perelman forman parte de un extenso artículo sobre los trabajos en torno a la conjetura de Poincaré que publicó ayer esta revista.

Retiro

En la entrevista Perelman declara que se ha retirado de la comunidad matemática y que no se considera ya un matemático profesional. Se muestra decepcionado por la falta de ética en la disciplina y explica que la posibilidad de ser galardonado con la medalla Fields es lo que le ha obligado a dejar la profesión: "Mientras no era conocido tenía la posibilidad de decir cosas feas [sobre la profesión] o ser tratado como una mascota. Al pasar a ser conocido, no puedo ser una mascota y no decir nada. Por eso me he tenido que ir". En opinión de Perelman la mayoría de los matemáticos son conformistas: "Son más o menos honrados, pero toleran a los que no son honrados".

Un asunto de gran interés en la actualidad, el intento de dos matemáticos chinos (discípulos del famoso Shing-Tung Yau, a su vez medalla Fields) de atribuirse una explicación completa y original del problema de geometrización (en el que se inscribe la conjetura de Poincaré) menospreciando, según muchos, la aportación de Perelman, le merece a éste el comentario: "No me quedó claro qué nueva aportación han hecho", y sobre Yau: "No puedo decir que esté enfadado. Otras personas hacen cosas peores". El matemático ruso también parece estar dolido con la actitud del estadounidense Richard Hamilton, del que se considera discípulo, ya que propuso la técnica sobre la que se basó, y que ha tenido una larga colaboración con Yau. Perelman dice que le ofreció trabajar juntos y no obtuvo respuesta.

Perelman dejó de trabajar en el Instituto Steklov, en San Petersburgo, en diciembre pasado y sobrevive con lo poco ahorrado que tiene y la escasa pensión de su madre, profesora de matemáticas. Su versión es que le echaron del instituto, lo que niegan otras fuentes, y que no tiene ni dinero para pagarse el viaje a Madrid. Pero, sobre todo, no le importa que le hagan o no caso, según otras declaraciones, a *The Sunday Telegraph*: "Ya sé que la autopromoción es algo corriente y si la gente quiere hacerla pues muy bien, pero no creo que sea positiva. Me di cuenta de ello hace mucho tiempo y nadie va a cambiar mi parecer". Y también: "Si alguien está interesado en mi forma de resolver el problema, está todo ahí, que vayan y lo lean. He publicado todos mis cálculos, es lo que puedo ofrecer al público."

Lo único que deja en el aire Perelman es lo que hará si dentro de dos años le ofrecen en firme el premio Clay, un millón de dólares por resolver uno de los siete Problemas del Milenio, la conjetura de Poincaré.