HOMOTECIA

CÁTEDRA DE CÁLCULO - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN - UNIVERSIDAD DE CARABOBO

PUBLICACIÓN PERIODICA N° 8 - AÑO 1 e-mail: homotecia@hotmail.com Valencia, 1° de Septiembre de 2003

EDITORIAL

Culminó el semestre 1-2003. Felicitamos a todos los que, gracias a su esfuerzo y dedicación, ingenio y creatividad, superaron los retos académicos que se les presentaron, viendo con alegría como el éxito llegó a ellos. Entre este logro y la suerte existe una marcada diferencia. La suerte, mayormente, es un beneficio proporcionado por terceros, y puede corresponder con nuestros deseos. El éxito es producto de una actitud conciente, inteligente, constante. Lo producido por la suerte no nos asegura un mañana exitoso. El éxito nos permitirá ser cada vez mejores.

REFLEXIONES

"La misma naturaleza nos suministra cantidades observables y medibles, con una dependencia matemática definida.El concepto de función viene sugerido por todos los procesos naturales en los que observamos fenómenos que varían con el tiempo o la distancia. Casi todas las funciones "conocidas" provienen de los intentos de resolver problemas geométricos, mecánicos o físicos".

Tomado del libro de J. T. Mertz: *"A History of European Thought in the Nineteen Century"* (*"Historia del pensamiento europeo en el siglo diecinueve"*).Edinburgo y Londres, 1903. P. 696.

Números primos

Una de las cuestiones básicas en la teoría de números es la cuestión de la divisibilidad de un número por otro. Los docentes y estudiantes de matemática en general, saben que los números enteros que sólo son divisibles por 1 y por si mismos, se llaman *números primos*. El número de números primos es infinito. El primero que lo demostró fue Euclides, en el Libro IX de Elementos, después lo demostraron Euler y Chebichev. La demostración es muy sencilla: Supongamos que tenemos un conjunto $\{p_1, p_2, p_3, ...\}$ que incluye todos los números primos. Calculemos el número N = p1.p2.p3 ... + 1. Evidentemente este número es primo porque no es divisible por ninguno de los números primos que hemos considerado. Por lo tanto, el conjunto del que hemos partido no incluye todos los números primos.

Los números primos son, en cierto modo, como los elementos químicos. A partir de los elementos químicos se forman todos los compuestos químicos y a partir de los números primos podemos obtener el resto de los números.

Sería fantástico que hubiese una fórmula que produjese números primos. Hasta 1536 se pensó que los números de la forma 2^n-1 eran todos primos, pero ese año Hudalricus Regius, demostró que $2^{11} - 1 = 2047$ era el producto de 23 y 89. Sin embargo, muchos (se supone que infinitos) números primos cumplen esa condición. A los números primos que cumplen esa condición se les llama *números primos de Mersenne* (Marin Mersenne (1588-1648) fue un monje francés, muy famoso en su época). Mersenne en su libro Cogitata Physica-Mathematica dijo que los números de la forma $2^n - 1$ eran primos para n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127 y 257 y compuestos para los restantes números < 257.

Euler en 1750 lo demostró para n = 31, Lucas, en 1876 lo demostró para n = 127. Años mas tarde Pervouchine encontró que también era primo el número para n = 61 y en 1900 Powers descubrió que también lo eran para n = 89 y n = 107.

Los números primos de Mersenne y los números perfectos están relacionados. Los números primos de Mersenne son de la forma 2^{n-1} y los perfectos son de la forma $2^{n-1}(2^n - 1)$.

Hasta el año 20001 se habían descubierto 39 números de Mersenne, el último es $2^{13466917} - 1$ descubierto por el GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search) el 14 de noviembre de 2001.

Tabla de números primos de Mersenne conocidos

N° orden	Exponente	Año descubrimiento	Descubridor
1	2		
2	3		
3	5		
4	7		
5	13	1456	Anónimo
6	17	1588	Cataldi
7	19	1588	Cataldi
8	31	1772	Euler
9	61	1883	Pervushin
10	89	1911	Powers
11	107	1914	Powers
12	127	1876	Lucas
13	521	1952	Robinson
14	607	1952	Robinson
15	1279	1952	Robinson
16	2203	1952	Robinson
17	2281	1952	Robinson
18	3217	1937	Riesel
19	4253	1961	Hurwitz
20	4423	1961	Hurwitz
21	9689	1963	Gillies
22	9941	1963	Gillies
23	11213	1963	Gillies
24	19937	1971	Tickerman
25	21701	1978	Noll y Nickel
26	23209	1979	Noll
27	44497	1979	Nelson y Slowinski
28	86243	1982	Slowinski
29	110503	1988	Colquitt y Welsh
30	132049	1983	Slowinski
31	216091	1985	Slowinski
32	756839	1992	Slowinski y Gage
33	859433	1994	Slowinski y Gage
34	1257787	1996	Slowinski y Gage
35	1398269	1996	GIMPS
36	2976221	1997	GIMPS
37	3021377	1998	GIMPS
38	6972593	1999	GIMPS
39	13466917	2001	GIMPS

Pierre de Fermat (1601-1665) creyó haber encontrado una fórmula que producía números primos $F_i = 2^n + 1$ siendo $n = 2^i$, esta fórmula genera números primos para i = 0, 1, 2, 3 y 4. Leonhard Euler (1707-1783) descubrió que F_5 no es primo, en 1880 se demostró que F_6 tampoco lo es, en 1970 se demostró que tampoco lo era F_7, en 1980 se demostró para F_8 y en 1990 para F_9.

Algunos números primos están separados sólo por un número par (por ejemplo, el 3 y el 5). A estos números se les llaman *números primos gemelos*. Por lo tanto la cantidad mínima de números entre dos números primos es uno. ¿Cuál será la cantidad máxima? La respuesta es la que queramos: Si nos piden construir 1000 números consecutivos que no sean primos, sólo tenemos que hacer la siguiente operación:

$$1001! + 2,\ 1001! + 3,\ 1001! + 4, ...\ 1001! + 1001.$$

Los diez primos gemelos más grandes

Número primo	Número de dígitos	Año descubrimiento
$33218925 \cdot 2^{169690} \pm 1$	51090	2002
$318032361 \cdot 2^{107001} \pm 1$	32220	2001
$1807318575 \cdot 2^{98305} \pm 1$	29603	2001
$665551035 \cdot 2^{80025} \pm 1$	24099	2000
$781134345 \cdot 2^{66445} \pm 1$	20011	2001
$1693965 \cdot 2^{66443} \pm 1$	20008	2000
$83475759 \cdot 2^{64955} \pm 1$	19562	2000
$291889803 \cdot 2^{60000} \pm 1$	18098	2001
$4648619711505 \cdot 2^{60000} \pm 1$	18075	2000
$2409110779845 \cdot 2^{60000} \pm 1$	18075	2000

Sólo hay tres números primos contiguos: 3, 5 y 7.

Se dice que dos números son *primos entre sí* (también se llaman *primos relativos*) cuando no son divisibles entre si. Ejemplo, los números 38 y 14 son primos entre sí.

Dado un número "a", se llama *conjunto reducido de restos*, al conjunto de números menores que "a", que son primos entre sí con el número "a". Ejemplo: el conjunto reducido de restos de 14 es {3,4,5,6,8,9,10,11,12,13}.

La *función de Euler* de un número n [se representa por φ (n)], da el número de elementos que forman el conjunto reducido de restos. En nuestro ejemplo φ (14) = 11.

Los diez números primos más grandes

Número primo	Número de dígitos	Año descubrimiento
$2^{13466917}-1$	4053946	2001
$2^{6972593}-1$	2098960	1999
$2^{3021377}-1$	909526	1998
$2^{2976221}-1$	895932	1997
$2^{1398269}-1$	420921	1996
$1361846^{65536}+1$	402007	2002
$1266062^{65536}+1$	399931	2002
$5 \cdot 2^{1320487}+1$	397507	2002
$1057476^{65536}+1$	394807	2002
$857678^{65536}+1$	388847	2002

¿Cómo se distribuyen los números primos?

Se utiliza p (x) para representar el número de primos menor que o igual a x. La distribución es la siguiente:

Distribución de números primos

X	p(x)	p(x)/x	r(x)=X/p(x)	$e^{r(x)}$
10	4	0,40	2,5	12,182494
100	25	0,25	4,0	54,598150
1000	168	0,168	5,95238095	384,668125
10000	1229	0,1229	8,13669650	3417,609
100000	9592	0,09592	10,4253545	33703,4168
1000000	78498	0,078498	12,7391781	340843,2932
10000000	664579	0,06645790	15,0471201	3426740

(continúa en la siguiente página)

(viene de la primera página)

Si se observa la última columna, vemos que cuando x es grande cada número de esa columna es aproximadamente 10 veces el anterior.

Dicho en lenguaje llano: la proporción de primos entre enteros es aproximadamente igual al inverso de **Lnx** cuando x es grande.

Puede parecer increíble que alguien descubra esta relación, sin embargo, esta relación la descubrió Carl Friedich Gauss cuando tenía 14 años.

Si p y 2p+1 son primos, a p se le llama *número primo de Sofía Germain*.

Un número es *casi primo* si sólo tiene dos divisores primos. Por ejemplo 21 es casi primo, porque solo es divisible por 3 y 7.

En 1978 Ronald Rivest, Adi Shamir y Leonard Adlermann desarrollaron un método para cifrar mensajes (llamado RSA por las iniciales de sus apellidos) basándose en los números casi primos.

Este método consiste en seleccionar dos números primos, p y q (suficientemente grandes, de centenas de dígitos) y obtener su producto n = pq. Podemos hacer público el número n (sería la clave pública) porque es muy difícil obtener los factores p y q.

Para hacer más difícil la descomposición en factores primos del número n, se eligen p y de tal forma que cumplan las siguientes condiciones:

1) mc d de p - 1 y q - 1 pequeño.
2) La descomposición en factores primos de p - 1 y q - 1 debe tener algún factor primo grande p' y q'.
3) La descomposición en factores primos de p' - 1 y q' - 1 deben tener factores primos grandes.
4) La descomposición en factores primos de p' + 1 y q' + 1 deben tener factores primos grandes.

Los números primos p y q que cumplen estas cuatro condiciones se llaman números *primos fuertes*.

La clave privada sería otro número m (es conveniente que este número sea primo también) (de centenas de dígitos) que cumple la siguiente condición:

mcd (m,(p - 1).(q - 1)) = 1 (el máximo común divisor de m y el producto (p - 1)(q - 1) es 1).

Para cifrar una texto se convierten las letras a números mediante una tabla, a continuación se forman bloques de números y elevamos ese número a la m y lo dividimos por n y nos quedamos con el resto. Después convertimos ese resto a las letras resultantes.

¿Cómo averiguar si un número es primo?

No es fácil saber si un número es primo.

Método de la criba de Eratóstenes.-
Consiste en construir una tabla con todos los números y a continuación, empezando por el 2 tachamos todos los números que estén a una distancia de 2 (el 4, 6, 8, etc.) después seguimos con el 3 tachando todos los números que estén a una distancia de 3 (el 6, 9, 12, etc) y así sucesivamente.

Método de división a prueba.-
Consiste en dividir n por todos los números primos anteriores a n. En realidad basta con calcular los números primos anteriores a raíz cuadrada de n.

Método de Fermat.-
El pequeño teorema de Fermat dice que si p es primo y a es un entero $a^p = a$ (mod p). Dicho en palabras claras: El resto de dividir a^p entre p y el resto de dividir a entre p son iguales.

Dividiendo $a^p = a$ (mod p) por a nos queda $a^{p-1} = 1$ (mod p), que es la forma que se utiliza para probar si un número es primo.

Sea p el número que queremos saber si es primo. Si $a^{p-1} = 1$ (mod p) luego p *puede* ser primo (ojo puede que no lo sea). Si cumple la prueba se dice que p es *probable primo base a (a-PRP)*.

Los números que pasan la prueba pero no son primos se llaman pseudoprimos. Por ejemplo 341 pasa la prueba 2-PRP pero es compuesto (341 = 11.31).

Este teorema (pequeño teorema de Fermat) también se llama teorema de Euler-Fermat.

Método de la prueba p - 1.-
Una característica de los números primos grandes es que en casi todos, el número anterior o el siguiente se factorizan muy fácilmente.

Se basa en el siguiente teorema:

Sea p > 1. Si para factor primo q de p - 1, existe un entero a tal que:

$a^{p-1} = 1$ (mod p) y $a^{(p-1)/q}$ no = 1 (mod p), luego p es primo.

Método de la prueba p + 1.-
Una característica de los números primos grandes es que en casi todos, el número anterior o el siguiente se factorizan muy fácilmente.
Sean p y q enteros, tales que $p^2 - 4q$ no es un cuadrado módulo n.

Una de las soluciones de $x^2 - px + q = 0$ es $r = (p + sqr(p^2 - 4q))/2$.

Las potencias de r tienen la forma:
$r^m = (V(m) + U(m)sqr(p^2 - 4q))/2$ donde U y V se definen recursivamente de esta forma:

$U(0) = 0, U(1) = 1, \ldots U(m) = pU(m - 1) - qU(m - 2)$

$V(0) = 2, V(1) = p, \ldots V(m) = pV(m - 1) - qV(m - 2)$

Estas secuencias se llaman secuencias de Lucas asociadas a p y q. Para el caso, p = 1, q = -1, la secuencia U es la serie de Fibonacci.

Una propiedad importante de estas secuencias es esta: $U(2m) = U(m)V(m)$;

$V(2m) = V(m)^2 - 2q^m$

Sea $2r = a + b\ sqr(p2 - 4q)$ mod(n). Si n es primo $2r^n = a - b\ sqr(p2 - 4q)$ mod(n).

Si existe un entero d, para el cual el símbolo de Jacobi (d|n) = -1 y para todos los factores primos r de n + 1, existen primos relativos p y q que cumplen:
$p2 - 4q = d$

$U(n + 1) = 0$ (mod n)

$U((n + 1)/r)$ no es 0 (mod n) entonces n es primo.

Método de las curvas elípticas.-
Este método realiza una operación que sólo da resultado si n es primo (cuando n es compuesto la operación falla).
Una curva elíptica E(a,b) tiene la ecuación $y^2 = x^3 + ax + b$ (siendo $4a^3 + 27b^2$ no cero).
Se llaman curvas elípticas porque se presentaron por primera vez, en la resolución del cálculo de la longitud de arcos de elipses.

Método de la criba cuadrada.-
Se trata de hallar números naturales x e y con la propiedad de que n sea un divisor de $x^2 - y^2$.

Números perfectos

Un número se dice que es perfecto cuando la suma de sus divisores propios es igual al número.

Los primeros números perfectos son: 6, 28, 496, 8128, 33550336, 8589869056. Observa que todos los números perfectos terminan en 6 o en 8, pero ¡ojo! no se van alternando indefinidamente.

Los números perfectos tienen una bonita propiedad, descubierta por Pitágoras:

$$6 = 1+2+3$$
$$28 = 1+2+3+4+5+6+7$$
$$496 = 1+2+3+4+5+6+7+\ldots+30+31$$
$$8128 = 1+2+3+\ldots+126+127$$

Euclides descubrió que los números perfectos tienen esta forma:

$$6 = 2^1.(2^2-1)$$
$$28 = 2^2.(2^3-1)$$
$$496 = 2^4.(2^5-1)$$
$$8128 = 2^6.(2^7-1)$$

Este número, $2^{216090}.(2^{216091}-1)$, que tiene mas de cien mil dígitos, es perfecto.

Los números perfectos cumplen la condición $2^{n-1}(2^n-1)$ (recuerden: 2^n-1 un número primo de Mersenne). Por lo tanto, los números perfectos y los números primos de Mersenne están relacionados.

Un número se dice *ligeramente deficiente* si la suma de sus divisores es igual al número -1.

Hay bastantes números que cumplen esta condición, en cambio no se ha encontrado ningún número *ligeramente abundante* (cuando sus divisores suman +1).

Nadie ha conseguido demostrar que no existen números ligeramente abundantes.

Un número es *abundante* cuando la suma de sus divisores propios es mayor que el mismo número.

Un número es *deficitario* cuando la suma de sus divisores propios es menor que dicho número.

Nombres de los números

Los nombres de los números muy grandes, por ser infrecuentes en la vida cotidiana, presentan dificultades para muchas personas.

109.876.543.210 sería 109 mil 876 millones, 543 mil 210.

2.109.876.543.210 sería 2 billones 109 mil 876 millones 543 mil 210.

32.109.876.543.210 sería 32 billones 109 mil...

5.432.109.876.543.210 sería 5 mil 432 billones, 109 mil...

765.432.109.876.543.210 sería 765 mil 432 billones 109 mil...

8.765.432.109.876.543.210 sería 8 trillones 765 mil 432 billones 109 mil...

y a sí sucesivamente (después de los trillones vendrían cuatrillones, después quintillones, sextillones, septillones, octallones, nonallones, decallones, endecallones, dodecallones...).

EQUIPO DE ACCIÓN ACADÉMICA:

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Papel de Trabajo Nº 4

Problemas sin solución

Se ha demostrado que los dos problemas que se indican a continuación, no tienen solución, por lo tanto no pierdan ni un minuto intentando resolverlos:

Cuadratura del círculo.

Dado un círculo de radio R, se trata de construir, utilizando regla y compás, un cuadrado de igual superficie.

Sea L el lado del cuadrado. Tendríamos:

$$L^2 = \pi R^2$$

Resulta que Lindemann demostró que π no es solución de ningún polinomio.

El primero que intentó resolver este problema fue Anaxágoras, mientras estaba en la cárcel como prisionero político (fue liberado gracias a la intervención de Pericles, de quien había sido profesor). Dicen que llenó las paredes de la celda con los cálculos.

Construcción de n-ágonos regulares.

Dado un círculo de radio R, se pide construir un n-ágono (un polígono de n lados) regular inscrito en él.

Este problema sólo tiene solución si n tiene la forma $2^k + 1$.

Números amigos

Se dice que dos números son amigos si la suma de los divisores de cada uno de ellos es igual al otro número.

Los números 220 y 284 son amigos. Los divisores de 220 son: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 y 220, si los sumamos (excluyendo 220) da 284. Los divisores de 284 son: 1, 2, 4, 71, 142 y 284, si los sumamos (excluyendo 284) da 220.

Este par de números amigos era conocido por los griegos. El siguiente par de números amigos fue descubierto en el siglo XIII y redescubierto por Fermat en 1636 (los números 17296 y 18416). Descartes descubrió el siguiente par: 9363584 y 9437056.

Fermat estableció que para cualquier $n > 1$ si p, q y r (definidos por las formulas indicadas debajo) son primos, los números $2^n pq$ y $2^n r$ son amigos.

$$p = 3.2^{n-1} - 1$$
$$q = 3.2^{n} - 1$$
$$r = 9^{2n+1} - 1$$

No todos los números amigos se obtienen con esta formula, pero si son amigos todos los números que se obtienen con la formula.Por ejemplo, para $n = 2$, se obtienen los números 220 y 284

El tema no avanzó más hasta que Euler descubrió la norma que cumplen estos números.

Los números perfectos cumplen la condición $2^{n-1}(2^n-1)$ siendo 2^n-1 un número primo de Mersenne.

Todos estos grandes matemáticos se saltaron el par 1184-1210 que fue descubierto por un niño italiano de 16 años Niccolò Paganini.

Los *números sociables* son una generalización de los números amigos. Tres o más números se dice que son sociables si la suma de los divisores del primero da el segundo, los del segundo, el tercero, y los del último el primero.

Problemas no resueltos

¿Hay infinitos números primos de Mersenne?

Sean p y 2p + 1 primos. ¿Hay infinitos pares de números primos que cumplan esta condición?

¿Hay infinitos números primos gemelos? Primos gemelos son los que están separados sólo por un número. Por ejemplo: 3 y 5.

¿Hay infinitos números primos obtenidos sumando 1 a un número elevado al cuadrado?

¿Siempre hay un número primo entre dos números cuadrados consecutivos?

¿Todo número par mayor de 2 se puede obtener como suma de dos números primos? (Esta es la conjetura de Goldbach)

¿Existe algún número primo de Fermat mayor de 65537?

¿La serie de Fibonacci contiene infinitos números primos?

¿Existen infinitos números primos de la forma $n! + 1$ o $n! - 1$?

¿Existen infinitos números primos de la forma $n\# + 1$ o $n\# - 1$? Siendo $n\#$ el producto de todos los números primos menores o iguales a n.

¿Hay algún número perfecto impar?

¿Hay infinitos números perfectos?

Problema para Profesores

Suma infinita.

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots =$$
$$= 1 + 2(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots) =$$
$$= 1 + 2S$$

$$S = 1 + 2S$$

$$S = -1$$

¿Dónde está el error?

GALERÍA

Sofía Vasilyevna Kovalevsky (1850-1891)

Nació el 15 de Enero de 1850 en Moscú, Rusia; y murió el 10 de Febrero de 1891 en Estocolmo, Suecia. Sofía Kovalevsky era hija de Vasily Korvin-Krukovsky, un general de artillería, y Velizaveta Shubert, miembros de la nobleza rusa. Sofía fue educada por tutores e institutrices, en un ambiente familiar y social que incluyó como amigo al escritor Dostoevsky.

Sofía fue atraída por la matemática desde muy joven. Su tío Pyotr Vasilievich Krukovsky que tenía un gran respeto por la matemática, fue quien le hizo las primeras referencias sobre el particular. Escribió en su autobiografía: *"El significado de estos conceptos no los puedo asir todavía naturalmente, pero actuaron en mi imaginación, mientras me infundían una reverencia por la matemática como una ciencia exaltada y misteriosa que abre a sus iniciados un nuevo mundo de maravillas, inaccesible a los mortales ordinarios".*

Cuando Sofía tenía 11 años, las paredes de su guardería fueron empapeladas con motivos que representaban páginas que hacían referencia a la conferencia de Ostrogradski sobre cálculo diferencial e integral. Ella observó que en las hojas aparecían los detalles matemáticos que su tío le había mencionado. El estudio del papel de empapelar fue la introducción de Sofía al cálculo.

Bajo la tutela de Yyo Malevich, Sofía emprendió sus primeros estudios de matemática, y sobre este particular afirmó: *"Yo empecé a sentir una atracción por mi matemática tan intenso que empecé a descuidar mis otros estudios".*

El padre de Sofía decidió poner fin a sus lecciones de matemática pero ella pidió prestado una copia del Álgebra de Bourdeu que leía de noche cuando el resto de la familia dormía.

Un año después un vecino, el Profesor Tyrtov, regaló a la familia un libro de texto para física escrito por él, y Sofía intentó leerlo. No entendía las fórmulas trigonométricas y buscó explicación por si misma. Tyrtov comprendió que en el manejo del concepto seno, ella había utilizado el mismo método que los matemáticos habían desarrollado históricamente. Tyrtov instó al padre de Sofía para que le permitiera seguir estudios de matemática más avanzados pero fue después de varios años que él le permitió a Sofía tomar lecciones privadas.

Sofía se vio obligada a casarse para poder procurarse en el extranjero una educación más avanzada. Su padre no le permitiría dejar la casa para estudiar en una universidad, y las mujeres en Rusia no podían vivir aparte de sus familias sin el permiso escrito de su padre o marido. A la edad de dieciocho, se casó con Vladimir Kovalevsky, un joven paleontólogo. Este matrimonio causó muchos problemas a Sofía y, a lo largo de quince años, fue una fuente de dolor intermitente, exasperación y tensión, y su concentración estaba rota por sus riñas frecuentes con Vladimir.

En 1869 Sofía viajó a Heidelberg para estudiar matemática y ciencias naturales, descubriendo que las mujeres no podían matricularse en la universidad. Posteriormente, persuadió a las autoridades universitarias para que le permitieran asistir como oyente a las conferencias, siempre y cuando los disertantes lo permitieran.Sofía estudió allí con éxito durante tres semestres y, según las memorias de un condiscípulo, ella *"inmediatamente llamó la atención de sus maestros por su asombrosa habilidad matemática. El Profesor Königsberger, el eminente químico Kirchhoff,.... y todos los otros profesores estaban interesados por su estudiante dotada y se fijaban en ella como un fenómeno extraordinario".*

En 1871 Kovalevsky se trasladó a Berlín para estudiar con Karl Weierstrass. A pesar de los esfuerzos de Weierstrass y sus colegas, el consejo le negó el permiso para asistir a los cursos en la universidad. Irónicamente esto la ayudó mucho más porque en los cuatro años siguientes Weierstrass la enseñó particularmente.

Para la primavera de 1874, Kovalevsky había completado tres "papers" (escritos o artículos). Weierstrass juzgó cada uno de estos digno de un doctorado. Los tres papers fueron sobre derivadas parciales, integrales abelianas y los Anillos de Saturno. El primero de éstos es una contribución notable que se publicó en el Periódico de Crelle en 1875. El paper sobre la reducción de integrales abelianas a integrales elípticas simples es de menor importancia pero consistió en una serie experimentada de manipulaciones que le mostraron el orden completo de la teoría de Weierstrass.

En 1874 Kovalevsky obtuvo su doctorado summa cum laude en la Universidad de Göttingen. A pesar de este doctorado y cartas de recomendación por parte de Weierstrass, Kovalevsky no pudo obtener un puesto académico. Se dieron muchas excusas pero el impedimento mayor era su sexo. Se le rechazó como docente durante seis años, tiempo en el cual ni siquiera se dedicó a la investigación. En esa época el mejor trabajo que le ofrecieron fue para dar clases elementales de instrucción aritmética a muchachas en edad escolar.

En 1878, Kovalevsky tuvo una hija, pero a partir de 1880 retomó sus estudios de matemática. En 1882 empezó el trabajo sobre refracción de la luz, y escribió tres artículos sobre el tema. En 1916, Volterra descubrió que Kovalevsky había cometido el mismo error que Gabriel Lamé en cuyo trabajos estaban basados estos papers, aunque ella señaló algunos errores que Lamé tuvo en su presentación del problema. El primero de estos tres artículos todavía era sin embargo un valioso paper, porque contenía una exposición de la teoría de Weierstrass para integrar ciertas ecuaciones de derivadas parciales.

En la primavera de 1883, Vladimir de quien Sofía había estado separada durante dos años, se suicidó. Kovalevsky se sumergió en el trabajo matemático en un esfuerzo por librarse de sentimientos de culpa. El profesor Gösta Mittag-Leffler intercedió para superar la oposición a Kovalevsky en Estocolmo, y obtuvo para ella un puesto como docente privada. Comenzó a trabajar al inicio de 1884 y en junio de ese mismo año se le propuso para que en cinco años alcanzara la categoría de *profesor extraordinario*, y en junio de 1889 se convirtió en la primera mujer desde que la física Laura Bassi y María Gaetana Agnesi ocuparon un puesto en universidades europeas.

Durante los años que Kovalevsky estuvo en Estocolmo, llevó a cabo lo que muchos consideran la investigación más importante; dictó cursos sobre los más recientes alcances del análisis y se hizo la editora del nuevo periódico Acta Mathematica. Ella sirvió de enlace entre los matemáticos de París y Berlín, y tomó parte en la organización de conferencias internacionales. Su estatus atrajo la atención de la sociedad, y comenzó a escribir de nuevo sobre sus reminis-cencias y dramas que había disfrutado cuando joven.

Kovalevsky recibió el Premio Bordin de la Academia Francesa de Ciencias en 1886, por su contribución al estudio de los cuerpos rígidos. En reconocimiento a lo brillante de este trabajo el dinero del premio se aumentó de 3,000 a 5,000 francos.

La extensa investigación de Kovalevsky en este tema ganó un premio de la Academia Sueca de Ciencias en 1889, y en el mismo año, por iniciativa de Chebyshev, Kovalevsky fue elegida miembro de la Academia Imperial de Ciencias. Aunque el gobierno Zarista le había negado repetidamente un puesto en las universidades de su propio país, se cambiaron las reglas en la Academia Imperial para permitir la elección de una mujer.

El último trabajo publicado por Kovalevsky fue un artículo corto referido a un teorema del matemático M. Bruns sobre el que ella realizó una innovadora prueba, más sencilla, en lo referente a una propiedad de la función potencial en un cuerpo homogéneo.

En el comienzo de 1891, a la edad de 41 años, en la plenitud de sus poderes matemáticos y reputación, Kovalevsky murió de influenza complicada por la pulmonía.

Versión en español de la biografía de ***Sofía Kovalevsky*** por *J. J. O'Connor* y *E. F. Robertson*, aparecida en "Las Matemáticas de Mario". (*http://www.terra.es/personal/jftjft/Home.htm*). Traducción: Licenciado Rafael Ascanio H., FACE, UC.

TRABAJANDO EN CÁLCULO

CONTINUIDAD DE FUNCIONES

Sea la función $g: R \to R$ tal que $g(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ para $x \neq 2$. A partir de la gráfica, determinar los posibles puntos donde la función no es continua.

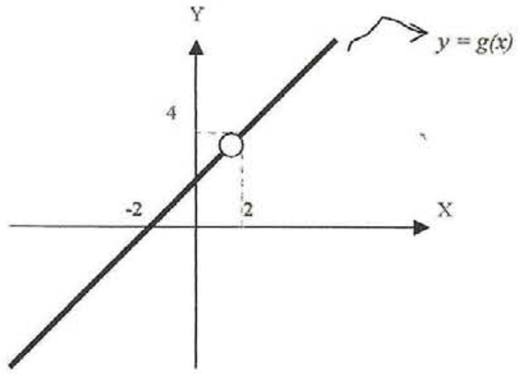
<u>Solución</u>:

Por definición de la función, $g(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ no está definida para $x = 2$.

Para construir la gráfica, se procede a rescribir la expresión algebraica que define a la función, mediante la factorización del numerador: $g(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2} = \dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2} = x+2$.

Ahora puede considerarse que para $x = 2$, $y = 4$.

La representación gráfica de la función es una recta donde no se incluye el punto $(2,4)$:



La gráfica muestra que hay discontinuidad en $x = 2$, por lo que $Dom_g = R - \{2\}$; pero esta discontinuidad es evitable si se redefine la función de la siguiente manera:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & para \quad x \neq 2 \\ 4 \quad para \quad x = 2 \end{cases}$$

Prof. Rafael Ascanio H.

Departamento de Matemática: Actualidad 2003

El Miércoles 06 de Agosto pasado, en el Auditorio "Luis Beltran Díaz" de la Facultad de Ciencias de la Educación, organizada por la Cátedra de Diseño de Investigación, se realizó la Jornada de Exposiciones de "Trabajo Final de Grado" de los aspirantes a egresar como integrantes de la Cuadragésima Primera Promoción de Licenciados en Educación - Mención Matemática. La profesora Rosa Talavera, Jefe del Departamento de Matemática, tuvo a su cargo las palabras de apertura del acto y la Jefe de la Cátedra, Profesora Ivel Páez, tuvo a bien también dirigir unas palabras a los presentes. Entre los asistentes se contó, con la presencia de los profesores María del Carmen Padrón, José Tadeo Morales, Omaira Naveda, Aura Torrealba, Rafael Ascanio, José Tesorero, Jesús Morales y Antonio Díaz.

Es de destacar que en su totalidad, los trabajos presentados mostraron gran calidad, y evidenciaron que los mismos fueron realizados bajo los siguientes patrones: producción propia, inquietud por mejorar su formación, conocimiento de las debilidades a subsanar en el ejercicio de la docencia en matemática, conciencia de la necesidad del aporte educativo que proponen, romper con la inercia que produce el hábito de ejercer la docencia en matemática utilizando métodos tradicionales de enseñanza y ofrecer soluciones a los problemas sociales del país mediante una opción educativa.

La aspirante Lorena Cedillo, en nombre de sus compañeros, agradeció a sus tutores, profesores Ivel Páez, María del Carmen Padrón y José Tadeo Morales, la dedicación que tuvieron para con ellos en la conducción y guía durante la realización de sus trabajos de grado. Agradecieron también a los bachilleres coordinadores de la Biblioteca de Matemática "Mauricio Orellana Chacín" quienes colaboraron con ellos a la hora de la transcripción y reproducción computarizada de los informes, no importándoles prestar esa ayuda mañana, tarde o noche, y hasta los sábados .

Las palabras de cierre fueron dirigidas por el profesor José Tadeo Morales, adscrito a la cátedra de Diseño, las cuales resultaron muy emotivas para los aspirantes.

En un pequeño pero significativo agasajo al final del acto, los presentes departieron en un ambiente amenizado por un grupo de música de antaño. Previo, la profesora María del Carmen Padrón dirigió unas palabras a los aspirantes deseándoles un futuro de exitos y grandes logros.

Cuadragésima Primera Promoción

Licenciados en Educación - Mención Matemática

"Trabajos Especiales de Grado"

Adriana Gómez - Niurivic Silva:
Software Educativo para el aprendizaje del Teorema de Pitágoras, vinculando Aspectos Históricos de la Matemática dirigido al Noveno grado de Educación Básica.

Yudith Mosqueda - Yudith Polanco:
Estrategia para el procesamiento de los Errores Cometidos por los alumnos del Octavo Grado de Educación Básica en el contenido Potenciación en los Números racionales que les permitan la Construcción de un Nuevo Conocimiento.

Lorena Cedillo - Mariana Piñate:
"Marlo", Estrategia para el aprendizaje de la Radicación en el Noveno Grado de Educación Básica basada en la Programación Neurolingüística.

Luisa Sandoval - Ondina Mancilla:
Diseño de un Software de Enseñanza para el Aprendizaje de las Nociones Matemáticas Elementales dirigido a niños de Educación Inicial.

Carlas Castellano - Josseline Monteverde:
Estrategia fundamentada en la Historia de la matemática para el fomento de valores en los alumnos del Séptimo Grado de Educación Básica.

Cleiver Almerón - Martha Rodríguez:
Estrategia didáctica fundamentada en los Procesos de los Patrones del Lenguaje considerados por la Programación Neurolingüística para el tratamineto de los Errores Matemáticos en Conocimientos Previos de los alumnos de Noveno Grado de Educación Básica.

Yosnailys Rivas - Amarelys Toro:
Estrategia para el Procesamiento de los Errores Cometidos por los estudiantes del Primer Año del Ciclo Medio y Diversificado en la Unidad Instruccional Trigonometría.

Keiza Casañas - Luis Meléndez:
Educación Matemática: Una alternativa para el Desarrollo de las Inteligencias Múltiples a nivel de la tercera Etapa de Educación Básica de la Unidad Educativa "Dr. Enrique Tejera".

Juan Arteaga - José Ladera:
Estrategias Constructivistas para la Evaluación de los Procesos de Aprendizaje de los conocimientos matemáticos en el Contenido Números Complejos a nivel del Primer Año de Ciencias del Ciclo Diversificado.

María Piwen - Mirla Rivero:
Estrategias de Evaluación fundamentadas en el Constructivismo para el contenido Conjunto de los Números racionales en el Séptimo Grado de Educación Básica.

Marvic Colina - Carmen Franco:
Estrategias Metodológicas basadas en la Programación Neurolingüística para la enseñanza de Funciones reales a los alumnos de Noveno Grado de Educación Básica.

Cruz Blanco - Carmen Vera:
Estrategias Metodológicas para el aprendizaje de la Historia de la Matemática de los Docentes en formación de la Mención Mátemática de la Universidad de Carabobo.

Enimar Marín - Yazunari Prado:
Estrategia fundamentada en Valores para el aprendizaje de Funciones Reales en la asignatura Lógica - Matemática de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo.

Kelly Cellis - Rafael Piñero:
La Resolución de Problemas Matemáticos fundamentada en los Canales de Representación: Una propuesta dirigida al Primer Año del Ciclo Diversificado del Liceo nacional "Martín J. Sanabria".

Somelys Alvarado - Hildileny González:
Programa para activar los Roles del Docente del Área de matemática de la Escuela Básica "San Diego Norte".

Katty García - Dayalí Sánchez:
Propuesta para la Enseñanza de la Matemática dirigida docentes de Sexto Grado no especialistas en la asignatura.

María Andreína - Palacios Mata.
Propuesta Didáctica para la aplicación del Modelo de Aprendizaje para la Acción de la Educación en Valores en el Proceso de Enseñanza de la Matemática del Quinto Grado del Colegio "San Gabriel Arcángel".

Tairis Martínez - Pedro Ruz:
Resolución de Problemas Matemáticos: Una estrategia para el desarrollo de la Transversalidad en el Séptimo Grado de Educación Básica.

Luz Díaz - Isnaty Pérez:
Estrategia fundamentada en las técnicas de la Programación Neurolingüística para el Aprendizaje de los Polinomios en Octavo Grado de Educación Básica.

Yaneisa Díaz - Fred González:
Estrategias basadas en el Modelo Van Hiele y la Programación Neurolingüística para la Enseñanza del Contenido de Circunferencia y Círculo del Bloque Geometría del Quinto Grado de Educación Básica.

Nivelys Silva - Juan Yélamo:
Estrategias Metodológicas para la Educación Emocional de los alumnos en el Área Matemática del Nivel de Tercera Etapa de Educación Básica.

José Palencia - Elisbeth Zárraga:
Propuesta de un Manual de Procedimiento fundamentado en el Aprendizaje Significativo del contenido Razones Trigonométricas para el Estudio Post Clase dirigida a los alumnos del Primer Año del Ciclo Diversificado.

Gladys Duno - Delia Pérez:
Módulo Instruccional basado en Power Point para la enseñanza y Aprendizaje de las Operaciones Matemáticas Básicas dirigido a los estudiantes de Tercer Grado.

Maryuri González - Alicia Rodríguez:
Propuesta de un Instrumento de Evaluación para la resolución de problemas en la Primera Etapa de Educación Básica fundamentada en la reforma Curricular vigente.

ORIGINALIDAD Y CREATIVIDAD EN LA JORNADA DE EXPOSICIONES DE "TRABAJO ESPECIAL DE GRADO"

Miguel Carrasco - Fernando Hidalgo:
Estrategias Metodológicas basadas en el Error como Oportunidad para el Aprendizaje de la Adición de Números reales en el Noveno Grado de Educación Básica.

Freddy Alambarrios - Maritza Carvajal:
Estrategia Metodológica para la enseñanza de la Estadística ante la Nueva Reforma Curricular a Nivel de Séptimo Grado de Educación Básica.

Laura Heredia - Araselis Pérez:
Diseño Instruccional para la Enseñanza y Aprendizaje de las Ecuaciones con Solución en el Conjunto de los Números Racionales, haciendo uso de la tecnología de la computadora y dirigido al Séptimo Grado de Educación Básica.

Yurizay Pacheco - Reina Rea:
Presentaciones en Multimedia para el Aprendizaje de la Unidad Instruccional Números Enteros, dirigido al Séptimo Grado de Educación Básica.

Aysa Urdaneta -Teoma Ramírez:
Efectividad del Software "Aula Matemática" para la Enseñanza de los Sistemas de Ecuaciones a los alumnos del Noveno Grado de educación Básica.

Y la jornada continuó ...

Pero todo no quedó aquí. El día Martes 19 de Agosto, reunidos en el Salón de Lectura de la Biblioteca Central "Luis Azocar Granadillo", ante un jurado integrado por profesores del Departamento de Matemática, los mejores once trabajos según decisión conjunta de los tutores y los mismos bachilleres ponentes de la jornada del día 06, fueron presentados para escojer entre ellos a los tres mejores, de donde el ubicado en primer lugar representará a la Mención Matemática en una jornada global de la facultad prevista para el próximo mes de Octubre.

Los once mejores trabajos seleccionados fueron los presentados por los bachilleres:

Adriana Gómez y Niurivic Silva, Yudith Mosqueda y Yudith Polanco, Lorena Cedillo y Mariana Piñate, Carlas Castellano y Josseline Monteverde, Cleiver Almerón y Martha Rodríguez, Yosnailys Rivas y Amarelys Toro, Keiza Casañas y Luis Meléndez, Yaneisa Díaz y Fred González, Nivelys Silva y Juan Yélamo, Yurizay Pacheco y Reina Rea, Aysa Urdaneta y Teomar Ramírez.

El resultado fue el siguiente:

Primer Lugar:

Carlas Castellano - Josseline Monteverde

Estrategia fundamentada en la Historia de la Matemática para el fomento de valores en los alumnos del Séptimo Grado de Educación Básica.

Segundo Lugar:

Adriana Gómez - Niurivic Silva

Software Educativo para el aprendizaje del Teorema de Pitágoras, vinculando Aspectos Históricos de la Matemática dirigido al Noveno Grado de Educación Básica.

Tercer Lugar:

Keiza Casañas - Luis Meléndez

Educación Matemática: Una alternativa para el Desarrollo de las Inteligencias Múltiples a nivel de la tercera Etapa de Educación Básica de la Unidad Educativa "Dr. Enrique Tejera".

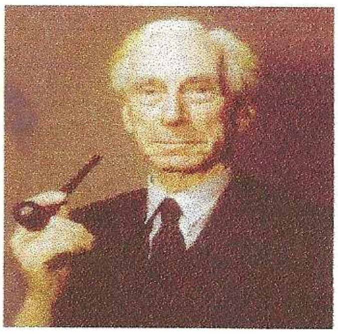
Mención Honorífica:

Lorena Cedillo - Mariana Piñate

"Marlo",
Estrategia para el aprendizaje de la Radicación en el Noveno Grado de Educación Básica basada en la Programación Neurolingüística.

Como nota final, cabe destacar que todos estos once trabajos que participaron en esta jornada, obtuvieron el máximo puntaje posible, según informaron los tutores. ¡Felicitaciones!

FINITUD E INDUCCIÓN MATEMÁTICA



Por Bertrand Russel

Como se ha visto en el capítulo 1, es posible definir toda la serie de los números naturales si se sabe qué se entiende por los tres términos: "0", "número" y "sucesor". Pero se puede avanzar un paso más y definir todos los números naturales si se sabe qué se entiende por "0" y "sucesor". Entender de qué modo esto es posible y por qué no es posible extender este método más allá de lo finito, nos ayudará a comprender la diferencia entre finito e infinito. De momento, no entraremos a considerar cómo pueden definirse "0" y "sucesor"; nos limitaremos a admitir que conocemos el significado de estos términos y a demostrar cómo, a partir de ahí, pueden obtenerse todos los restantes números naturales.

Se ve fácilmente que podremos llegar hasta cualquier número prefijado, por ejemplo 30 000. Empezaremos definiendo "1" como el sucesor de "0", luego definiremos "2" como el sucesor de "1", y así sucesivamente. En el caso de un número prefijado, como 30 000, es posible comprobar experimentalmente que se puede llegar hasta él procediendo paso a paso de este modo; basta con tener paciencia y continuar hasta llegar a 30 000. Pero, aunque el método experimental es aplicable a cualquier número natural concreto, no sirve para demostrar la proposición general de que es posible alcanzar *todos* los números de este tipo por esta forma: avanzando paso a paso de cada número a su sucesor, empezando por 0. ¿Es posible demostrarlo de alguna otra manera?

Demos vuelta a la pregunta. ¿Qué números pueden alcanzarse dados los términos "0" y "sucesor"? ¿Es posible definir de algún modo toda la clase de estos números? Obtenemos 1 como el sucesor de 0; 2 como el sucesor de 1; 3, como el sucesor de 2; y así sucesivamente. Ahora se trata de sustituir "y así sucesivamente" por algo menos vago e indefinido. Podríamos tener la tentación de decir que "y así sucesivamente " significa que el proceso de pasar al sucesor puede repetirse *cualquier número finito* de veces; pero el problema que nos ocupa es el de dar una definición de "número finito", y por tanto, no debemos incluir esta noción en nuestra definición. Esta no debe presuponer que sabemos que es un número finito.

La clave del problema está en la *inducción matemática*. Como recordará el lector, ésta era la quinta de las cinco proposiciones primitivas sobre los números naturales que señalábamos en el capítulo 1. En ella se afirmaba que toda propiedad perteneciente al 0 así como al sucesor de todo número que posea dicha propiedad, pertenecerá a todos los números naturales. Aquí adoptaremos como definición esta proposición que antes presentábamos como principio. No resulta difícil comprobar que los términos que la cumplen coinciden con los números que pueden alcanzarse sucesivamente paso a paso a partir de 0. Sin embargo, dada la importancia de este punto, lo examinaremos con algún detalle.

Será conveniente empezar con algunas definiciones, que también nos serán útiles en otros contextos.

Se dice que una propiedad es "hereditaria" en la serie de los números naturales si, siempre que pertenece a un número n, también pertenece $n + 1$, el sucesor de n. Análogamente, se dice que una clase es "hereditaria" si, siendo n un miembro de ella, también lo es $n + 1$. No resulta difícil *ver*, aunque se supone que todavía no lo sabemos, que decir que una propiedad es hereditaria equivale a decir que pertenece a todos los números naturales no inferiores a uno de ellos; por ejemplo, tiene que pertenecer a todos los que no sean menores que 100, o que 1000, o a todos los que no sean menores que 0, esto es, a todos sin excepción.

Se llama "inductiva" a la propiedad hereditaria que pertenece al 0. Análogamente, una clase es "inductiva" cuando es una clase hereditaria a la cual pertenece el 0.

Dada una clase hereditaria a la cual pertenece el 0, de ello se sigue que 1 también pertenecerá a ella, puesto que una clase hereditaria contiene a los sucesores de sus miembros, y 1 es el sucesor de 0. Análogamente, dada una clase hereditaria a la cual pertenece 1, de ello se sigue que 2 pertenecerá también a ella; y así sucesivamente. De este modo podremos demostrar, procediendo paso a paso, cualquier número natural prefijado, 30 000 pongamos por caso, pertenece a todas las clases inductivas.

Definiremos la "posteridad" de un número natural dado con respecto a la relación "antecesor inmediato" (que es el inverso de "sucesor") como todos aquellos términos que pertenecen a todas y cada una de las clases hereditarias a las cuales pertenece el número dado. También en este caso resulta fácil *ver* que la posteridad de un número natural se compone de este mismo número y de todos los números naturales mayores que él; pero tampoco lo sabemos oficialmente aún.

Según las anteriores definiciones, la posteridad de 0 se compondrá de los términos pertenecientes a toda clase inductiva.

A partir de aquí, no es difícil poner de manifiesto que la posteridad de 0 coincide con el conjunto de los términos que pueden alcanzarse por pasos sucesivos a partir de 0. En efecto, en primer lugar, 0 pertenece a ambos conjuntos (en el sentido en el cual hemos definido nuestros términos); en segundo lugar, si n pertenece a ambos conjuntos, también pertenecerá a ellos $n + 1$. Cabe señalar que el asunto que aquí nos ocupa no admite una demostración exacta, es decir, no admite la comparación de una idea relativamente vaga con otra relativamente precisa. La noción de "los términos que pueden alcanzarse por pasos sucesivos a partir de 0" es indeterminada, aunque *parece* sugerir un significado definido; por otro lado, "la posteridad de 0" es una noción precisa y explícita precisamente donde es difusa la otra idea. Puede considerarse que expresa lo que *queríamos* decir al referirnos a los términos que pueden alcanzarse por pasos sucesivos a partir de 0.

Estableceremos ahora la siguiente definición: *Los "números naturales" son la posteridad de 0 con respecto a la relación "antecesor inmediato"* (que es la inversa de "sucesor").

Así, habremos obtenido una definición de una de las tres ideas primitivas de Peano en términos de las otras dos. Esta definición hace innecesarias dos de sus proposiciones primitivas -a saber, la que afirma que 0 es un número y la que establece la inducción matemática-, en la medida en que estas se desprenden de la definición. La que afirma que el sucesor de un número natural es un número natural sólo se precisa en su forma más atenuada de que "todo número natural tiene un sucesor".

Evidentemente, no resulta difícil definir "0" y "sucesor" mediante la definición del número en general obtenida en el capítulo 2. El número 0 es el número de términos de una clase que no tiene ningún miembro, esto es, de la clase denominada "clase nula o vacía". En virtud de la definición general de número, el número de términos de la clase vacía es el conjunto de todas las clases semejantes a la clase vacía, esto es (como puede demostrarse fácilmente), el conjunto formado únicamente por la clase vacía, es decir la clase cuyo único miembro es la clase vacía. (La cual no es lo mismo que la clase vacía, puesto que tiene un miembro, concretamente, la clase vacía, mientras que la propia clase vacía no tiene ninguno. Una clase que tiene un miembro nunca es idéntica a ese miembro, como explicaremos cuando hablemos de la teoría de las clases.) Así obtendremos la siguiente definición puramente lógica: *0 es la clase cuyo único miembro es la clase nula o vacía.*

Queda por definir el "sucesor". Dado cualquier número n, sea a una clase de n miembros, y x un término que no es miembro de a. Entonces, la clase integrada por a más x tendrá $n + 1$ miembros. Lo cual nos da la siguiente definición: *El sucesor del número de términos de la clase a es el número de términos de la clase integrada por a junto con x, siendo x un término cualquiera no perteneciente a la clase.*

Para que esta definición fuese perfecta deberían añadirse algunos detalles que por ahora no nos interesan. El lector recordará que ya hemos dado (en el capítulo 2) una definición lógica del número de términos de una clase, es decir, la definíamos como el conjunto de todas las clases que son semejantes a la clase dada.

Así habremos reducido las tres ideas primitivas de Peano a ideas de la lógica: las definiciones que hemos dado de ellas las hacen determinadas, no susceptibles ya de una infinidad de significados distintos, como ocurría cuando sólo estaban determinadas en la medida en que cumplían los cinco axiomas de Peano. Las hemos separado del arsenal de términos que deben ser sólo aprehendidos y hemos incrementado con ello la articulación deductiva de la matemática.

Por lo que respecta a las cinco proposiciones primitivas, ya hemos conseguido que dos de ellas resulten demostrables mediante nuestra definición de "número natural". ¿Cuál es la situación con respecto a las tres restantes? Es muy sencillo demostrar que 0 no es el sucesor de ningún número y que el sucesor de todo número es un número. Pero la otra proposición primitiva, a saber, que "dos números distintos no tienen nunca el mismo sucesor", plantea un problema cuando el número total de individuos del universo es finito. En efecto, dados dos números m y n, ninguno de los cuales es el número total de individuos del universo, resulta fácil probar que no es posible que $m + 1 = n + 1$ a menos que $m = n$. Pero supongamos que el número total de individuos sea, por ejemplo, 10; entonces no habría ninguna clase de 11 individuos y el número 11 sería la clase vacía. Lo mismo ocurriría con el 12. Con lo cual 11 = 12; y por consiguiente el sucesor de 10 sería igual al sucesor de 11, aunque 10 no sería igual a 11. Luego tendríamos dos números distintos con el mismo sucesor. Este fallo del tercer teorema no se plantea, en cambio, si el número de individuos del mundo no es finito. Volveremos sobre este tema más adelante.

Luego, bajo el supuesto que el número de individuos del universo no sea finito, no sólo habremos logrado definir las tres ideas primitivas de Peano, sino que también habremos hallado la forma de probar sus cinco proposiciones primitivas, mediante ideas primitivas y proposiciones de la lógica. De lo cual se desprende que toda la matemática pura, en la medida en la medida en que es deducible de la teoría de los números naturales, sólo es una prolongación de la lógica. La ampliación de este resultado a las ramas modernas de la matemática que no son deducibles de la teoría de los números naturales no plantea ninguna dificultad de principio, como hemos demostrado en otros trabajos.

El proceso de inducción matemática, mediante el cual hemos definido los números naturales, es susceptible de generalización. Definíamos los números naturales como la "posteridad" de 0 con respecto a la relación de un número con su sucesor inmediato. Si designamos esta relación como N, todo número m tendrá dicha relación con $m + 1$. Una propiedad será "hereditaria con respecto a N", o simplemente "N-hereditaria" si, siempre que un número m presente esta propiedad, también la presente $m + 1$, esto es, el número con el cual m tiene la relación N. Y diremos que un número n pertenece a la "posteridad" de m con respecto a la relación N si n presenta todas las propiedades N-hereditarias pertenecientes a m. Estas definiciones pueden aplicarse a cualquier otra relación distinta de N. Así, siendo R una relación cualquiera, podemos establecer las siguientes definiciones:

Una propiedad se denomina "R-hereditaria" cuando, si un término x presenta esa propiedad y x mantiene la relación R con y, entonces y también la presenta.

Una clase será R-hereditaria si su propiedad definitoria lo es.

Diremos que x es un "antecesor R" del término y cuando y presente todas las propiedades R-hereditarias que presenta x, siempre que x sea un término que tenga la relación R con algo o que algo tenga la relación R con x. (Con ello sólo se pretende excluir los casos triviales.)

La "posteridad R" de x estará formada por todos los términos de los que x sea un antecesor R.

Hemos dispuesto las anteriores definiciones de forma que si un término es antecesor de algo, también será su propio antecesor y pertenecerá a su propia posteridad. Se trata sólo de una cuestión de comodidad.

Obsérvese que si tomamos como R la relación "padre", "antecesor" y "posteridad" tendrán sus significados habituales, con la salvedad de que una persona formaría parte de sus propios antecesores y de su posteridad. Desde luego, es inmediatamente evidente que "antecesor" debe ser susceptible de definición en términos de "padre", pero hasta que Frege desarrolló su teoría generalizada de la inducción, nadie podría haber definido con precisión "antecesor" en términos de "padre". Una breve consideración sobre este punto nos ayudará a destacar la importancia de la teoría.

Una persona que se enfrentase por primera vez con el problema de definir "antecesor" en términos de "padre" naturalmente diría que A es un antecesor de Z si, entre A y Z, se sitúan un cierto número de personas, B, C ..., de las cuales B es hija de A y cada una es padre de la siguiente, hasta la última, que es padre de Z. Pero esta definición resulta inadecuada si no añadimos que el número de términos intermedios debe ser finito. Considérese, por ejemplo, una serie como la siguiente: -1, - 1/2, - ¼ , -1/8, ... 1/8, ¼, ½, 1. En ella tenemos, primero, una serie sin fin de fracciones negativas y, luego, una serie de fracciones positivas sin comienzo. ¿Podemos decir que en esta serie, -1/8 es un antecesor de 1/8? Según la definición para principiantes que se ha sugerido, así sería, pero no ocurriría lo mismo con cualquier definición capaz de comunicar el tipo de idea que deseamos definir. Para ello es esencial que el número de intermediarios sea finito. Pero, como ya se ha visto, "finito" debe definirse a través de la inducción matemática y es más sencillo definir de inmediato la relación de antecedencia en términos generales, en vez de definirla primero sólo para el caso de la relación de n con $n + 1$ y ampliarla luego a otros casos. Aquí, como ocurre constantemente en todos los casos, empezar por la generalidad, aunque al principio tal vez exija mayor esfuerzo de reflexión, a la larga redundará en una economía mental y una mayor potencia lógica.

En el pasado, el uso de la inducción matemática en las demostraciones tenía un halo de misterio. No parecía existir ninguna duda razonable sobre su validez como método de prueba, pero nadie sabía exactamente por qué era válida. Algunos la consideraban un caso de auténtica inducción, en el sentido que la lógica da a este término. Poincaré la consideró un principio de la máxima importancia, que permitía condensar un número infinito de silogismos en un solo argumento. Ahora sabemos que todas esas concepciones son erróneas y que la inducción matemática es una definición, no un principio. Algunos números la admiten y otros (como veremos en el capítulo 8) no la admiten. *Definimos* los "números naturales" como aquellos que admiten las pruebas por inducción matemática, esto es, los que poseen todas las propiedades inductivas. De lo cual se desprende que estas pruebas no son aplicables a los números naturales en virtud de alguna misteriosa intuición o axioma o principio, sino una proposición puramente verbal. Si definimos los "cuadrúpedos" como animales de cuatro patas, de ello se seguirá que los animales que tienen cuatro patas son cuadrúpedos; y el caso de los números que admiten la inducción matemática es exactamente análogo.

Emplearemos la expresión "números inductivos" para designar el mismo conjunto que hasta el momento hemos llamado "números naturales". La expresión "números inductivos" es preferible en la medida en que sirve para recordarnos que la definición de este conjunto de números se obtiene a partir de la inducción matemática.

Ante todo, la inducción matemática nos ofrece la característica esencial que distingue lo finito de lo infinito. El principio de la inducción matemática podría expresarse familiarmente, más o menos de esta forma: "lo que puede inferirse de uno al siguiente, en pasos sucesivos, también puede inferirse del primero al último". Lo cual es cierto si el número de pasos intermedio entre el primero y el último es finito, pero no en caso contrario. Cualquiera que haya observado alguna vez la puesta en marcha de un tren de mercancías habrá observado que el impulso se transmite de cada vagón al siguiente con una sacudida, hasta que finalmente el último vagón se pone en movimiento. Si el tren es muy largo, transcurrirá mucho tiempo antes de que empiece a moverse el último vagón. Si el tren fuese infinitamente largo, habría una sucesión infinita de sacudidas y nunca llegaría el momento en que todo el tren estuviera en movimiento. Pero, si la serie de vagones no fuese más larga que la serie de los números inductivos (la cual, como veremos más adelante, constituye un ejemplo de la infinitud más pequeña), todos los vagones se pondrían en movimiento más pronto o más tarde si la máquina perseverara en su esfuerzo, aunque más atrás siempre quedarían otros vagones que todavía no habrían empezado a moverse. Esta imagen puede ayudarnos a aclarar el argumento de "uno al siguiente, en pasos sucesivos" y su relación con la finitud. Cuando entremos en los números infinitos, para los que ya no serán válidos los argumentos derivados de la inducción matemática, las propiedades de estos números nos ayudarán a comprobar, por contraste, el uso casi inconsciente que hacemos de la inducción matemática en el caso de los números finitos.

Tomado de: **"Introducción a la Filosofía Matemática"**. *B. Russell (1988). Ediciones PAIDOS. Pp. 27 - 33. Impreso en España.*

ESPACIO LITERARIO: Poemas

Rita Baldassarri

TODAS LAS CHIMENEAS...

Todas las chimeneas se tienden en hilera hacia la luna,
se adentran en un mundo esmaltado de azul
en donde el viento frota las estrellas
hasta hacerlas brillar.
Falta ese centro, ese recogimiento:
falta un punto de amor en el que cada cosa se conforte.
Aquí se cuentan las penas de los otros
como si fuesen fábulas.
Ya casi es invierno y un grillo canta todavía.

Ojo de gato, 1986

LOS QUE EN LA NOCHE SE DESPIDEN...

Los que en la noche se despiden
mientras la lluvia cae
y solamente vibra un rolido de automóviles
que parten:
la ráfaga de viento y de vacío
que es nuestro yo
vacila en vilo
de ese rumor, con él se desvanece.
Luego, los montes: la línea de sombra
que divide el mundo,
todas las calles que llevan a ellos,
los seres que destellan y se apagan.
Lo que está fuera de nosotros:
los techos que gatean ondulantes
y una espesura de árboles respirando lenta
sobre un hormiguear negro de presencias
que llevamos adentro.
Después el desborde del cielo entre las ramas
hasta encontrar el día
que choca contra el muro de la noche
y se repliega,
desgajado de ella por el tajo
que nos separa de nosotros mismos.
Voces que estallan en lo oscuro.
Luego el silencio que se recompone.

Ojos de gato, 1986

PERSPECTIVAS CREATIVAS

Pero el ingenio, la creatividad y la inquietud sigue presente entre los estudiantes de la Mención Matemática. Desde ya, los estudiantes cursantes del Noveno Semestre están presentando sus Proyectos de Investigación. En jornadas recientes, realizadas en la Biblioteca de Matemática "Mauricio Orellana Chacín" y en el Salón Departamental de la Mención Matemática, los estudiantes mencionados presentaron sus proyectos, entre los que se pueden mencionar los siguientes:

Iber Piña - Iliana Rodríguez:
Estrategias para el desarrollo del pensamiento divergente a través de la resolución de problemas matemáticos en alumnos del Séptimo grado de la Escuela Básica "Antonio Herrera Toro".

Maira Clemente - John García:
Articulación de los Software educativos con los procesos de eneseñanza y aprendizaje de Cálculo I. Caso Estudiantes de la mención Matemática.

Luis Jaimes - Yeli Noguera:
manual estratégico para la enseñanza de la matemática dirigido a los padres delos niños del Tercer Nivel de Educación Inicial.

Carlos Guerra - José Jiménez:
Estrategia metodológica fundamentada en mapas conceptuales para el aprendizaje del contenido Movimiento Uniforme de los cuerpos en la asignatura Física del Noveno grado de Educación Básica.

María Duarte - Aura Marval:
Diseño de una estrategia basada en juegos didácticos para el aprendizaje de la división de números naturales en los alumnos del Tercer Grado de Educación Básica.

Heidi García - Yesenia perozo:
Diagnóstico del conocimiento matemático de los estudiantes del Octavo Semestrede Educación matemática de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo.

Anderson Bracho - John García:
Estrategia para la enseñanza de las funciones trigonométricas directas basadas en el constructivismo.

Gilmerys Martínez - Darwin Soto:
Diseño instruccional computarizado basado en el programa Macromedia Flash Mx versión 6.0 para la enseñanza de los números enteros en el Séptimo Grado de Educación Básica.

Yulimar García -Beisy Polanco:
Propuesta de estrategias fundamentadas en la relajación Creativa y la resolución de Problemas Matemáticos del Primer Año Ciclo Diversificado de la U. E. "José félix Mora" del Municipio Juan José Mora del Estado Carabobo.

Ingrid Seco - Franklin Torres:
Estrategia Torbellino de Ideas para el aprendizaje de la multiplicación, en alumnos del Tercer Grado de Educación Básica.

María Aponte - Lilibeth Pérez:
Propuesta de estrategia de Evaluación Formativa para el contenido números reales del Noveno Grado de Educación Básica de la U. E. "Carlos Arvelo".

Ana Duque - Haidée Padrón:
propuesta de la estrategia metodológica Comparación fundamentada en el constructivismo para el aprendizaje de la Geometría Plana en alumnos del Séptimo Grado de la U. E. "Hipólito Cisnero".

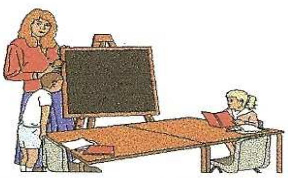
Edgar Guillén - Rosana rodríguez:
Estrategia metodológica para la enseñanza del bloque de contenido Geometría del Sexto Grado de Educación Básica fundamentada en la teoría constructivista.

Dionicia Aguirre - Gloria López:
Diseño instruccional para el aprendizaje de los contenidos geométricos a partir de la intuición espacial en alumnos del Quinto Grado de Educación Básica.

Leonel Chávez - Yibrahin Mendoza:
Propuesta para una estrategia metodológica fundamentada en la intuición para un aprendizaje significativo delos números complejos en alumnos del primer Año de Ciencias del Ciclo Diversificado de la U. E. "Antonio Miguel Letteron".

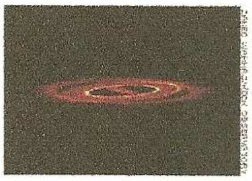
Anayrú Melgar:
Actitud docente en la II Etapa de Educación Básica hacia los Juegos Didácticos en el Área de Matemática.

Hay otros proyectos que fueron presentados publicamente y que consideramos que son muy buenos, pero lamentablemente los mismos ponentes no nos hicieron llegar a tiempo un reporte sobre los mismos, lo que nos impide publicarlos en este número. Esperamos poder hacerlo en la siguiente oportunidad.



TEMA DE INTERÉS PARA LA CIENCIA

Los planetas podrían formarse en sólo tres millones de años, dice teoría.



26 de mayo, 2003

WASHINGTON (Reuters) -- Esta es la receta para un planeta "instantáneo" de características similares a la Tierra: polvo cósmico arremolinándose en torno a una estrella recién nacida y esperar "sólo" tres millones de años. Incluso, los gigantescos planetas de gas como Júpiter podrían formarse en este lapso de tiempo, cerca de tres veces más rápido de lo que pensaban, dijo el lunes un equipo de científicos. Tres millones de años podrían parecer una eternidad si se comparan con la duración de la vida humana, pero son un "parpadeo" en términos cósmicos. La Tierra se considera un planeta de mediana edad de cerca de 4.500 millones de años aproximadamente y, comparados con la Tierra, estos planetas de teóricamente tres millones de años se formarían cuando la estrella que orbitan tiene la edad equivalente a un bebé de una semana. Los astrónomos Elizabeth Lada, de la Universidad de Florida, y Karl Haisch, de la Universidad de Michigan, llegaron a la conclusión de que al comienzo, los planetas podrían formarse unos tres millones de años después del nacimiento de las estrellas, tras estudiar los discos de polvo que se forman alrededor de las estrellas nacientes. Estos discos están compuestos de polvo cósmico y gas que pueden ser absorbidos por la estrella en formación o dispersarse en aglomeraciones de material que se pueden convertir en planetas. Pero sin un disco, es poco probable que los planetas se formen alrededor de una estrella. "En las agrupaciones más jóvenes, entre el 80 y 90 por ciento de las estrellas en la aglomeración tiene un disco", dijo Lada en una entrevista telefónica. "Pero cuando observamos aglomeraciones de estrellas más viejas, el número de estrellas que tenía un indicador de un disco decrecía con la edad hasta que alcanzamos los cinco o seis millones de años, cuando el polvo... desapareció". Los astrónomos se fijaron en cuatro regiones de formación de estrellas situadas en las constelaciones de Orión y Perseo, localizadas a unos 1.000 años luz de la Tierra. Un año luz equivale a unos 10 billones de kilómetros, es decir, la distancia que recorre la luz en un año. Para detectar discos potencialmente formadores de planetas alrededor de estrellas jóvenes, los científicos observaron la luz infrarroja. Descubrieron que los discos de polvo tomaban la luz infrarroja de la estrella central y emitían su propia luz infrarroja, por lo que, cuando Lada y sus colegas encontraron emisiones excesivas de infrarrojos, presumieron la presencia de un disco de polvo. Debido a que descubrieron que en la mayoría de los casos el disco de polvo se disipa en tres millones de años o menos, calcularon que los planetas rocosos como la Tierra -- que están compuestos principalmente de ese tipo de polvo -- deben comenzar, como mínimo, a formarse en ese momento. Los científicos estimaron que el gas en los discos debería disiparse con la misma rapidez, lo que significaría que los gigantescos planetas de gas como Júpiter comenzarían a formarse más o menos en el mismo período de tiempo. Estos hallazgos fueron presentados en una reunión de la Sociedad Astronómica Estadounidense en Nashville, Tennessee. Anteriormente, los astrónomos estimaban que los planetas podrían formarse en unos 10 millones de años después del nacimiento de una estrella. Sin embargo, simulaciones realizadas en supercomputadoras publicadas el año pasado en la revista Science sugerían un camino mucho más rápido en la formación de los planetas, con cálculos que indican que planetas grandes como Júpiter podrían crearse en apenas cientos de años en vez de millones.

Tomado de la página WEB de CNN en Español