HOMOTECIA

CÁTEDRA DE CÁLCULO - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN - UNIVERSIDAD DE CARABOBO
PUBLICACIÓN PERIODICA Nº 2 - AÑO 1 e-mail: homotecia@hotmail.com Valencia, 1º de Abril de 2003

EDITORIAL

Con **agrado, tenemos la ocasión de hacerles entrega del segundo número de nuestro *HOMOTECIA*, siempre con el propósito de utilizarlo como herramienta que ayude a la formación de los estudiantes de la mención matemática, y que se convierta en instrumento de integración de la comunidad que conforma nuestro Departamento. Estamos abiertos a recibir la colaboración de los docentes que estén adscritos a otras cátedras, a otros departamentos y hasta de otras facultades quienes consideren pertinentes publicar en este medio. Y extendemos también esta invitación a todos los estudiantes a proveer material publicable. Como se deja traslucir en nuestro primer editorial, la idea es construir un perfil del egresado sobre la base de una cultura matemática. ¡A trabajar, entonces!**

Reflexiones

Todo ser humano debe tener una causa por la cual vivir, una causa a la cual servir, debe llenar su corazón de amor. Esto definirá cuál es su vocación, le permitirá descubrir cuál es su mejor talento y al servicio de quién lo quiere poner. El ser humano debe vivir un compromiso y para esto debe vivir la vida con pasión, debe dar la vida por un sueño.

Miguel Ángel Cornejo

CINEMÁTICA DE LA CARRERA

Ralph Boas, Profesor de Matemáticas de la Northwestern University (EE. UU.)

Algunas personas creen que el Cálculo es aburrido, pero no era ésa la opinión hace más de tres siglos, cuando fue inventado. Entonces produjo resultados inesperados; hoy también los produce. Este ensayo versa sobre uno de ellos.

En el teorema del valor intermedio se indica, por ejemplo, que si una persona corre a 5 minutos por kilómetro, debe haber exactamente un momento en que la velocidad es exactamente de un quinto de kilómetro por minuto (suponiendo como es natural en un curso de Cálculo, que el tiempo empleado es una función continua de la distancia recorrida). Este principio es muy intuitivo y era conocido antes de la invención del Cálculo. Galileo lo sabía en 1638 y creía que Platón lo había conocido también. . Por otra parte, hay una cuestión que tiene una respuesta mucho menos intuitiva que no se ha dado hasta los últimos tiempos (y por un físico, lo que a los matemáticos no les gusta admitir). Supongamos que un corredor hace una media de 5 minutos por kilómetro y que se lanza a una carrera larga. ¿Habrá un momento en que haga un kilómetro concreto (por ejemplo, entre dos postes consecutivos de una carretera) en 5 minutos exactamente? La respuesta no es en absoluto intuitiva : dependerá de que el recorrido total sea un número exacto de kilómetros o no. En concreto, si recorre un número exacto, entonces hará uno de ellos en 5 minutos exactamente. Pero si no recorre un número exacto de kilómetros, entonces no necesariamente habrá uno que se recorra en 5 minutos.

Para demostrar la afirmación anterior, sea x la distancia (en kilómetros) que el corredor ha recorrido en cualquier punto de su carrera y supongamos que, cuando se para, ha hecho un número entero de n de kilómetros. Sea $f(x)$ el tiempo (en minutos) que le costó hacer los primeros x kilómetros; supondremos que f es una función continua. Si la media es de 5 minutos por kilómetro, entonces $f(x)-5x=0$ cuando $x=0$ y cuando $x=n$. Supongamos que el corredor no recorrió ninguno de los kilómetros en 5 minutos; en lenguaje matemático esto se expresa escribiendo que

$$f(x+1) - f(x) = 5$$

Como $f(x+1) - f(x) - 5$ es continua y no se anula nunca, debe ser siempre positiva o siempre negativa; supongamos, por ejemplo, que es positiva. Para $x = 0,1, ..., n$ es:

$$f(1)-f(0)>5$$

$$f(2)-f(1)>5$$

$$\vdots$$

$$f(n)-f(n-1)>5$$

Sumando miembro a miembro obtenemos que $f(n)-f(0)>5n$.Pero teníamos como hipótesis que $f(n)=5n$ y $f(0)=0$, luego aparece una contradicción.

Más difícil es probar que sólo funcionan los valores enteros de n. Supongamos que el tiempo que el corredor necesita para hacer x kilómetros es

$$J(x) = k \cdot Sen^2 \frac{\pi x}{n} + 5x$$

donde n no es un entero y k es pequeño. Esto es una hipótesis razonable porque J es una función creciente (como debe serlo el tiempo) si k es suficientemente pequeño. Para asegurarse de esto se calcula la derivada (aquí hay que usar Cálculo o un computador):

$$J'(x) = \frac{k\pi}{n} \cdot Sen \frac{2\pi x}{n} + 5$$

Si k es suficientemente pequeño entonces $J'(x)>0$. Esto prueba, no solamente que J es creciente, sino que $J(x+1) - J(x)$ no puede ser nunca igual a 5. Como $J(x+1) - J(x)$ no es nunca negativo, si el corredor hace un tiempo de $J(x)$ no hará jamás un kilómetro en menos de 5 minutos.

Tomado de. **BRADLEY, G. L. y SMITH, K. J.** (1998). *"Cálculo de una Variable"*. Volumen 1 (Pp. 351-352) PRENTICE HALL. Título original en inglés: Calculus. Traducción: Profesor José Luis Vicente Córdova. Revisión técnica: Pedro Paúl Escolano. Impreso en Madrid, España.

Ralph Boas (1912-1992), Profesor Emérito de Matemáticas de la Northwestern University, escribió este ensayo. El Profesor Boas fue conocido por sus artículos y actividades profesionales. Además de su trabajo en análisis real y complejo, escribió muchos artículos de divulgación, como este ensayo, sobre la enseñanza o el uso de las matemáticas.

NOTAS HISTÓRICAS

Sobre matemáticos hindúes

Aryabhata (476-¿550?)

Cuando se trabaja con expresiones racionales, hay que tener cuidado de no dividir por cero, así como la posibilidad de obtener una forma indeterminada. Uno de los tratamientos más antiguos que se conocen de las formas indeterminadas, se atribuye al matemático Aryabhata. Dio reglas para la aproximación de raíces cuadradas y sumas de progresiones aritméticas, así como reglas para cálculos algebraicos básicos. Un ejemplo de su trabajo es el siguiente claculo del número pi: "Súmese cuatro a cien, multiplíquese por ocho y añádase sesenta y dos mil. El resultado es el valor aproximado de la longitud de una circunferencia de diámetro veinte mil". Es de hacer notar que aún hoy, casi nadie trata de aproximar pi sin usar una calculadora. El primer satelite de la India fue llamado ARYABHAT en su honor.

Bhaskaracharya

La posibilidad de dividir por cero es algo que preocupa a los matemáticos. Una de las primeras observaciones sobre la división sobre la división por cero de la que se tiene noticia fue hecha por el matemático hindú Bhaskaracharya, que escribió: "La fracción cuyo denominador es cero es una cantidad infinita. Bhaskaracharya continuó dando un "concepto muy bello del infinito", que implicaba su visión de Dios y de la creación.

Brahmagupta

Fue el matemático hindú más insigne del siglo VII. Hizo algunos trabajos sobre series aritméticas y sumas de cuadrados de números naturales. Escribió un trabajo sobre astronomía que contenía varios capítulos de matemáticas. Fue un expositor extraordinariamente claro. Antes de dar un ejemplo, enunciaba una regla que se le aplicaba.

Cálculo Asiático primitivo

El matemático ***Seki Kôwa*** (1642-1708) midió el área de un círculo usando rectángulos. Los japoneses llaman *yenri* a este procedimiento de hallar el área.

OMISIONES INVOLUNTARIAS

Por esos errores que escapan a nuestra voluntad, en el primer número de *HOMOTECIA*, no incluimos entre el grupo de graduandos de la XXXIX Promoción de Licenciados en Educación Mención Matemática, a varios de éllos. Esperamos que sepan disculparnos y al igual que al resto de sus compañeros de promoción, les deseamos éxito y una brillante carrera.

DE INTERÉS DIDÁCTICO

Sobre funciones

La misma naturaleza nos suministra cantidades observables y medibles, con una dependencia matemática definida. El concepto de función viene sugerido por todos los procesos naturales en los que observamos fenómenos que varían con el tiempo o la distancia. Casi todas las funciones "conocidas" provienen de los intentos de resolver problemas geométricos, mecánicos o físicos.

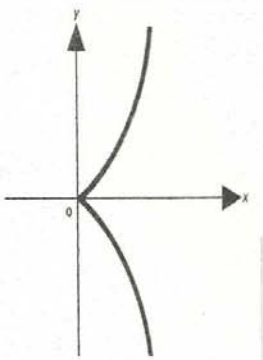
DEFINICIONES MATEMÁTICAS

Cota: En un conjunto de números, es un valor más allá del cual no hay elementos del conjunto. Una *cota inferior* es menor o igual que todo número del conjunto. Una *cota superior* es mayor o igual que todo número del conjunto. La *mínima cota superior* (extremo superior) es el menor número que es mayor o igual que todo número del conjunto; y la *máxima cota inferior* (extremo inferior) es el mayor número que es menor o igual que todo número del conjunto. Por ejemplo, el conjunto {0,6; 0,66; 0,666; ...} tiene como extremo superior a 2/3.

Otra definición: Cota de una función es toda cota del conjunto de valores que la función puede tomar para el intervalo de valores de la variable. Por ejemplo, si la variable puede ser todo número real, entonces la función $f(x)=x^2$ tiene una cota inferior 0.

Cúspide: Punta aguda formada por una discontinuidad en una curva. Por ejemplo, dos semicírculos en contacto forman una cúspide en el punto donde se tocan .

También se considera una *cúspide* al vértice de una pirámide o de un cono.



En este gráfico ocurre un punto cuspidal en el origen o.

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

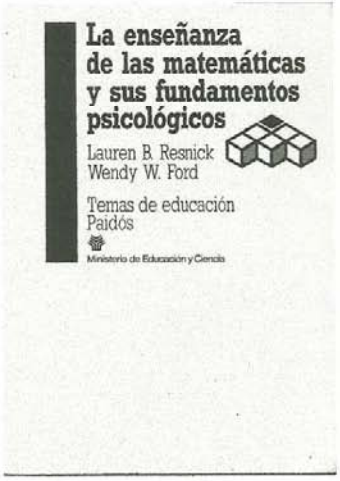
En esta oportunidad recomendamos el libro ***"La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos"*** (1990), siendo ***Lauren B. Resnick*** y ***Wendy W. Ford*** sus autoras. Editado en conjunto por ***PAIDOS*** y el Ministerio de Educación y Ciencia de México.

En la contraportada del mismo, se lee lo siguiente: "¿De qué puede tratar un libro sobre la psicología de las matemáticas? La mayoría de la gente sabe que la psicología tiene que ver con el aprendizaje de las personas, con el modo en que realizan sus tareas y con las fases de su desarrollo. Pero muy pocos piensan en ella como algo que pueda estar relacionado con áreas de interés como las matemáticas, las ciencias sociales o cualquier otra materia que se imparta en las escuelas. ... Por todo ello, este libro interesará por igual a aquellos psicológos, educadores y científicos que deseen conocer a fondo los procesos mentales implicados en el aprendizaje de las matemáticas."

El texto, en definitiva, propone una verdadera psicología de la instrucción, una psicología explícitamente dedicada a relacionar los procesos de aprendizaje con la planificación y ejecución de la enseñanza, recorriendo los estudios de Edward L. Thorndike, las tendencias guestálticas, las piagetianas y muchas otras consideradas por la psicología conductista y la cognotivista..

En su calidad de especialistas, Resnick y Ford colaboran con el Learning Research and Development Center de la Universidad de Pittssburgh; y de Resnick se conoce que fue investigadora en el Center for Advanced Study in the Behavioral Sciences.

Consideramos que es un libro que todo docente de matemática y quienes se forman para serlo, deben leer.



TRABAJANDO EN CÁLCULO

LA NOCIÓN DE LÍMITE EN EL CÁLCULO MATEMÁTICO

Noción intuitiva de límite.-

La idea de límite se halla en la estructura básica del Cálculo como un concepto fundamental. Conviene entonces, antes de dar una definición, tener noción clara de su significado. Considérese el siguiente ejemplo:

Dada la función *f:* R $\longrightarrow R$ definida por $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, estudiar su comportamiento cuando *x* tiende a 2.

Solución:

Si *x* tiende a 2 entonces para estudiar el comportamiento de ***f(x)*** podemos considerar que la variable pertenece, por ejemplo, al entorno $E^{*}_{0,25}(2)$. En consecuencia, elaboremos dos cuadros para valores de la función cuando *x<2* y *x>2*, para un radio $\delta = 0{,}25$:

x<2: *x>2:*

x	1,75	1,8	1,85	1,9	1,99	1,999	x	2,25	2,2	2,1	2,01	2,001	2,0001
$f(x)=\frac{1}{1-x}$	-1,33	-1,25	-1,17	-1,11	-1,01	-1,001	$f(x)=\frac{1}{1-x}$	-0,80	-0,83	-0,90	-0,99	-0,999	-0,9999

Los resultados permiten afirmar que *f(x)* tiende a –1 cuando *x* tiende a 2. Luego: $\lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{1-x}\right) = -1$.

Otro ejemplo que se puede considerar es el siguiente: Estudiar la función $g(x)=\begin{cases} 4x+1 & si\ x \neq 3 \\ 5 & si\ x = 3 \end{cases}$, cuando *x* tiende a 3.

Solución:

Como puede determinarse, cuando *x* tiende a 3 el valor de la función tiende a 13 pero por definición de la función $g(3) \neq 13$. Esto quiere decir que no siempre ocurre que el límite de la función para un valor de *x* sea igual al valor de la función para dicho número.

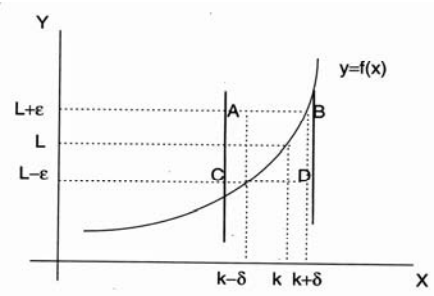
Intentando definir límite de una función:

Estos resultados se pueden generalizar. Entonces para cualquier función se puede escribir: $\lim_{x \to k} f(x) = L$ (límite de la función cuando la variable tiende al valor *k* es *L*). La separación entre la función y su límite se podrá hacer arbitrariamente pequeña, por ejemplo menor que un número ε positivo, con sólo hacer que la separación entre *x* y *k* sea inferior a un número positivo δ. Es decir que si:

$0 < |x - k| < \delta$ *entonces* $|f(x) - L| < \varepsilon$

donde $|x - k|$ es la distancia entre *x* y *k* cuando *x* pertenece, para este caso, a un entorno reducido de *k*.

La gráfica permite detallar lo siguiente: La variable $x \in E^{*}_{\delta}(k)$ y su imagen según la función *f* se encuentra en el entorno $E_{\varepsilon}(L)$. Mientras más pequeño es δ , las rectas $k-\delta$ y $k+\delta$ están más cerca de *k*, y de igual forma las rectas $L-\varepsilon$ y $L+\varepsilon$ lo están de *L*, y entonces el área del rectángulo *ABCD* se reduce. Al hacerse δ infinitamente pequeño, el rectángulo se reduce hasta casi identificarse con el punto (*k*, *L*). Es aquí cuando se afirma que el límite de *f(x)* cuando *x* tiende a *k* es *L*.



Prof. Rafael Ascanio H.

La paradoja de Zenón de Elea (siglo V a.C.)

La intención de Zenón fue desacreditar las sensaciones, lo que pretendió hacer a través de una brillante serie de argumentos o paradojas, sobre el espacio y el tiempo que han perdurado hasta nuestros días como mosaicos intelectuales complejos. Una paradoja clásica afirma que un corredor no puede llegar a la meta porque, para lograrlo, debe recorrer una distancia; pero no puede recorrer esa distancia sin primero recorrer la mitad de ella, y así *ad infinitum*. Porque existe un número infinito de bisecciones en una distancia espacial, uno no puede recorrer una distancia en tiempo finito, a menos que acorte la distancia o aumente la velocidad. Este argumento, como muchos otros de Zenón, se proponía demostrar la imposibilidad lógica del movimiento. Dado que los sentidos nos llevan a creer en la existencia del movimiento, los sentidos son ilusorios y por lo tanto no existe ningún obstáculo para aceptar las inverosímiles teorías de Parménides de otra forma. Zenón es reconocido no sólo por sus paradojas, sino por establecer los debates filosóficos que favorecen la discusión razonada. Por todo ello, Aristóteles le consideró el creador del razonamiento dialéctico.

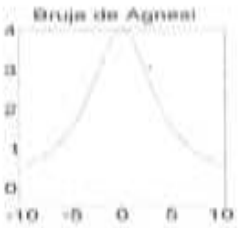
GALERÍA

MARÍA AGNESI (1718-1799)

Una de las mujeres más famosas en la historia de las matemáticas es María Agnesi. Nació en Milán y era la mayor de 21 hijos. Su primera publicación, a los 9 años de edad, fue un discurso en latín defendiendo el derecho de las mujeres a la educación superior. Su obra más importante es un texto de Cálculo, ahora clásico, publicado en 1748. Se recuerda también a María Agnesi por una curva, que se llama la *bruja de Agnesi*, que tiene como ecuación

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$$

y su gráfica es:



Guido Grandi (1672-1742) llamó a la curva *versoria*, pero Agnesi confundió esta palabra con *versiera*, que significa en latín "la abuela del diablo." La traducción inglesa produjo la palabra "witch," bruja, y desde entonces la curva se quedó con el nombre de bruja de Agnesi.

Karl Weierstrass (1815 - 1897)

Matemático alemán que colaboró en la fundación de la moderna teoría de las funciones. Nacido en Ostenfelde, pasó cuatro infructuosos años en la universidad de Bonn y después ingresó en la academia de Münster para formarse como profesor de escuela. Allí se interesó por las matemáticas y, en particular, por el estudio de las funciones elípticas del profesor Christoph Gudermann. Durante muchos años trabajó en el anonimato, pero la publicación de un ensayo en 1854 acerca del trabajo del matemático noruego Niels Henrik Abel, le procuró una repentina fama. A partir de ese momento enseñó en la Escuela Regia Politécnica de Berlín y en la Universidad de Berlín. Su investigación, que también se apoyaba en la del matemático alemán Carl Gustav Jacobi, ayudó a situar el cálculo sobre una base lógica sólida. Conocido como el padre del análisis moderno, Weierstrass dispuso los cimientos para aritmetizar el análisis matemático a través de rigurosos desarrollos del sistema de números reales.

La idea de continuidad evolucionó, desde la noción de curva "sin rupturas o saltos", hasta la definición dada por Karl Weierstrass. Nuestra definición de continuidad es un refinamiento de la original de Bernhard Bolzano (1781-1848). Galileo y Leibniz imaginaron la continuidad en términos de densidad de puntos sobre una curva, pero usando los conocimientos de hoy en día, podríamos decir que esta idea es errónea porque los números racionales tienen esa propiedad y, sin embargo, no forman una curva continua. El concepto de continuidad es muy difícil y es natural que evolucionase con el tiempo. Otro matemático, J. W. R. Dedekind (1831 - 1916), tomó un sendero totalmente distinto, deduciendo que el concepto de continuidad se debe a la división de un segmento en dos partes, tomando un punto sobre el segmento: "Mediante este lugar común, vamos a revelar el concepto de continuidad".

Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Matemático francés, considerado uno de los impulsores del análisis en el siglo XIX. Nació en París y estudió en la Escuela Politécnica de esta ciudad. Fue profesor simultáneamente en el Colegio de Francia, en la Escuela Politécnica y en la Universidad de París. En 1848 fue nombrado profesor de astronomía matemática de esa universidad. Cauchy verificó la existencia de funciones elípticas recurrentes, dio el primer impulso a la teoría general de funciones y sentó las bases para el tratamiento moderno de la convergencia de series infinitas. También perfeccionó el método de integración de las ecuaciones diferenciales de primer grado. En el campo de la física se interesó por la propagación de la luz y la teoría de la elasticidad.

En el siglo XIX, Cauchy y Weierstrass trataron de precisar el concepto de límite. La definición epsilon - delta es resultado de sus esfuerzos. Howard Eves describe a Cauchy no sólo como un matemático de primer orden con una productividad enorme, sino como pintor, abogado y escalador. Cauchy escribió en 1814 un tratado sobre integrales que ha sido considerado un clásico. En 1816, su artículo sobre propagación de ondas en líquidos ganó el premio de la Academia francesa. Se ha dicho que la era del análisis moderno comenzó con él. Escribió en total más de 700 artículos que aun hoy, se siguen considerando brillantes.